MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA

Schaum

TEORIA y
75 problemas
resueltos

mcgraw-hill

RANALD V. GILES

Prólogo

Este libro ha sido concebido con el principal propósito de complementar los textos ordinarios (de mecánica de los fluidos e hidráulica. Se basa en la convicción del autor de que el esclarecimiento y comprensión de los principios fundamentales de cualquier rama de la mecánica se obtienen mejor mediante numerosos ejercicios ilustrativos.

La anterior edición de este libro ha sido acogida muy favorablemente. En esta segunda edición, muchos de los capítulos han sido revisados y adicionados con objeto de poner al día determinados temas de acuerdo con los más recientes conceptos, métodos y terminología. Se ha dedicado especial atención al análisis dimensional recogiendo los nuevos materiales en el Capítulo 5. La revisión más extensa se ha llevado a cabo en los capítulos que tratan los fundamentos del flujo de fluidos, flujo de fluidos en tuberías y flujo en canales abiertos.

La materia se divide en capítulos que abarcan áreas bien definidas de teoría y estudio. Cada capítulo se inicia con el establecimiento de las definiciones pertinentes, principios y teoremas, junto con el material ilustrativo y descriptivo al que sigue una serie de problemas resueltos y problemas propuestos. Los problemas resueltos ilustran y amplían la teoría, presentan métodos de análisis, proporcionan ejemplos prácticos e iluminan con aguda perspectiva aquellos aspectos de detalle que capacitan al estudiante para aplicar los principios fundamentales con corrección y seguridad. El análisis del cuerpo libre, los diagramas vectoriales, los principios de trabajo y energía de la cantidad de movimiento y las leyes de Newton se utilizan a lo largo de todo el libro. No se ha regateado esfuerzo para presentar problemas originales desarrollados por el autor en los largos años dedicados a la enseñanza de .esta materia. Entre los problemas resueltos se incluyen numerosas demostraciones de teoremas y deducciones de fórmulas. El elevado número de problemas propuestos asegura un repaso completo del material de cada capítulo.

Los alumnos de las Escuelas de Ingeniería reconocerán la utilidad de este libro al estudiar la mecánica de los fluidos y, adicionalmente, aprovecharán la ventaja de su posterior empleo como libro de referencia en su práctica profesional. Encontrarán soluciones muy detalladas de numerosos problemas prácticos y, cuando lo necesiten, podrán recurrir siempre al resumen de la teoría. Asimismo, el libro puede servir al ingeniero profesional que ha de recordar esta materia cuando es miembro de un tribunal examinador o por cualesquiera otras razones.

Deseo expresar mi agradecimiento a mi colega Robert C. Stiefel, que ha comprobado cuidadosamente la solución de muchos de los nuevos problemas. También he de expresar mi gratitud a la redacción de la Schaum Publishing Company y, muy particularmente, a Henry Hayden y Nicola Miracapillo, por sus inestimables sugerencias e inapreciable cooperación.

RANALD V. GILES

Tabla de materias

TABLA DE MATERIAS

APÉNDICES Páginas

DIAGRAMAS

SIMBOLOS Y ABREVIATURAS

En la siguiente lista se da el significado de las letras empleadas en este libro. Por la limitación del alfabeto es imposible evitar la utilización de la misma letra para representar más de una magnitud. Como cada símbolo se define al introducirlo por primera vez, no existe confusión posible.

a	aceleración en m/seg^2, área en m^2
A	área en m^2
b	longitud de un vertedero en m, anchura en la superficie libre del agua en m, anchura de solera de un canal abierto en m
c	coeficiente de desagüe o descarga, celeridad de la onda de presión en m/seg (velocidad del sonido)
c_c	coeficiente de contracción
c_v	coeficiente de velocidad
C	coeficiente de Chezy, constante de integración
CG	centro de gravedad
C_p	centro de presión, coeficiente de potencia en hélices
C_D	coeficiente de arrastre o resistencia
C_F	coeficiente de empuje en hélices
C_L	coeficiente de sustentación
C_T	coeficiente del par en hélices
C_1	coeficiente de Hazen-Williams
cfs	pies cúbicos por segundo
d, D	diámetro en m
D_1	diámetro unitario en cm
Dr	densidad relativa
e	rendimiento
E	módulo de elasticidad volumétrico en kg/m^2, en kg/cm^2 o en kg/mm^2, energía específica en kgm/kg
f	factor o coeficiente de rozamiento de Darcy en flujo en tuberías
F	fuerza en kg, empuje en kg
g	aceleración de la gravedad = 9,81 m/seg^2 = 32,2 pies/seg^2
gpm	galones americanos por minuto
h	altura de carga en m, altura o profundidad en m, altura o carga de presión en m
H	altura o carga total (energía por unidad de peso) en m o kgm/kg
H_L, h_L	pérdida de carga en m (algunas veces se designa por LH)
hp	potencia en caballos de vapor (CV) = $wQH/75$
I	momento de inercia en m^4 o cm^4
I_{xy}	producto de inercia en m^4 o cm^4
k	relación de los calores específicos, exponente isoentrópico (adiabático), constante de Von Karman
K	coeficiente de desagüe en canales trapezoidales, coeficiente de pérdida de carga en ensanchamientos, constante
K_c	coeficiente de pérdida de carga en contracciones
l	longitud de mezcla en m
L	longitud en m
L_E	longitud equivalente en m
m	coeficiente de rugosidad en la fórmula de Bazin, coeficiente de vertedero en presas
M	masa en UTM (unidad técnica de masa) o kg seg^2/m, peso molecular
n	coeficiente de rugosidad, exponente, coeficiente de rugosidad en las fórmulas de Kutter y de Manning
N	velocidad de rotación en rpm
N_s	velocidad específica en rpm
N_u	velocidad unitaria en rpm
N_F	número de Froude
N_M	número de Mach
N_W	número de Weber
p	presión en kg/m^2, perímetro mojado en m
p'	presión en kg/cm^2
P	fuerza en kg, potencia en kgm/seg
P_u	potencia unitaria en kgm/seg
psf	libras/pie^2 (lb/ft^2)
psia	libras/pulgada^2 (lb/in^2), absoluta. En el sistema técnico europeo kg/cm^2 (ab)
psig	lb/in^2, manométrica. En el sistema técnico europeo simplemente kg/cm^2
q	caudal por unidad de anchura en m^3/seg por unidad de anchura
Q	caudal en volumen en m^3/seg

Q_u	descarga o caudal unitario en m^3/seg
r	radio en m
r_o	radio de una tubería en m
R	constante de los gases, radio hidráulico en m
R_E	número de Reynolds
S	pendiente de la línea de alturas piezométricas, pendiente de la línea de alturas totales
S_o	pendiente de la solera de un canal
t	tiempo en seg, espesor en cm, viscosidad en grados Saybolt
T	temperatura, par en mkg, tiempo en seg
u	velocidad periférica de un elemento que está girando en m/seg
u, v, w	componentes de la velocidad en las direcciones X, Y y Z
v	volumen en m^3, velocidad local en m/seg, velocidad relativa en maquinaria hidráulica en m/seg
v_s	volumen específico = $1/w$ en m^3/kg
v_*	velocidad de corte = $\sqrt{\tau/\rho}$ en m/seg
V	velocidad media en m/seg (o como venga definida)
V_c	velocidad crítica en m/seg
w	peso específico en kg/m^3
W	peso en kg, caudal en peso = wQ en kg/seg
x	distancia en m
y	profundidad en m, distancia en m
y_c	profundidad crítica en m
y_N	profundidad normal en m
Y	coeficientes de expansión en flujos compresibles
z	elevación, altura topográfica o cota (carga) en m
Z	altura de la cresta de un vertedero sobre la solera del canal en m

---

α (alfa)	ángulo, coeficiente de corrección de la energía cinética
β (beta)	ángulo, coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento
δ (delta)	espesor de la capa límite en m
Δ (delta)	término correctivo del flujo
ϵ (épsilon)	rugosidad superficial en cm
η (eta)	viscosidad de remolino
θ (theta)	ángulo genérico
μ (mi)	viscosidad absoluta o dinámica en kg seg/m^2 (o en poises)
ν (ni)	viscosidad cinemática = μ/ρ en m^2/seg (o en stokes)
π (pi)	parámetro adimensional
ρ (ro)	densidad = w/g en kg seg^2/m^4 o UTM/m^3
σ (sigma)	tensión superficial en kg/m, tensión o esfuerzo normal en kg/cm^2
τ (tau)	tensión o esfuerzo cortante o tangencial en kg/m^2
ϕ (fi)	coeficiente de velocidad, potencial de velocidad, relación
ψ (psi)	función de corriente
ω (omega)	velocidad angular en rad/seg

FACTORES DE CONVERSION

1 pie cúbico (ft^3) = 7,48 galones americanos = 28,32 litros
1 galón americano = 8,338 libras de agua a 60° F = 3,7854 litros
1 pie cúbico por segundo = 0,646 millones de galones por día = 448,8 galones por minuto
1 libra-segundo por pie cuadrado (μ) = 478,7 poises = 4,88 kg seg/m^2
1 poise = 1 g_m/cm seg = 1/98,1 kg seg/m^2
1 pie cuadrado por segundo (ν) = 929 stokes (cm^2/seg)
1 horsepower (HP) = 550 pie-libras por segundo = 0,746 kilovatios = 1,014 caballos de vapor (CV) = 76 kgm/seg
1 caballo de vapor (CV) = 75 kgm/seg = 0,736 kilovatios (kW) = 0,986 horsepower (HP)
760 mm Hg = 30 pulgadas de mercurio (in Hg)
= 34 pies de agua (ft H_2O)
= 14,7 libras por pulgada cuadrada (lb/in^2)
= 1,033 kg/cm^2 = 1 Atm (atmósfera física)
1 kg/cm^2 = 1 at (atmósfera técnica) = 0,9678 Atm = 14,22 lb/in^2
1 libra por pie cuadrado (lb/ft^2 o psf) = 4,88 kg/m^2

Capítulo 1

Propiedades de los fluidos

LA MECANICA DE LOS FLUIDOS Y LA HIDRAULICA

La rama de la mecánica aplicada que estudia el comportamiento de los fluidos ya sea en reposo o en movimiento constituye la mecánica de los fluidos y la hidráulica. En el desarrollo de los principios de la mecánica de los fluidos algunas de las propiedades de los fluidos juegan un papel preponderante, mientras que otras o influyen muy poco o nada. En la estática de los fluidos, el peso específico es la propiedad importante, mientras que en el flujo de fluidos la densidad y la viscosidad son las que predominan. Cuando tiene lugar una compresibilidad apreciable es necesario considerar los principios de la termodinámica. Al intervenir presiones manométricas negativas la tensión de vapor pasa a ser importante y la tensión superficial afecta a la estática o cinemática de los fluidos cuando las secciones de paso son pequeñas.

DEFINICION DE FLUIDO

Los fluidos son sustancias capaces de «fluir» y que se adaptan a la forma de los recipientes que los contienen. Cuando están en equilibrio, los fluidos no pueden soportar fuerzas tangenciales o cortantes. Todos los fluidos son compresibles en cierto grado y ofrecen poca resistencia a los cambios de forma.

Los fluidos pueden dividirse en líquidos y gases. Las diferencias esenciales entre líquidos y gases son (*a*) los líquidos son prácticamente incompresibles y los gases son compresibles, por lo que en muchas ocasiones hay que tratarlos como tales y (*b*) los líquidos ocupan un volumen definido y tienen superficies libres mientras que una masa dada de gas se expansiona hasta ocupar todas las partes del recipiente que lo contenga.

SISTEMA TECNICO DE UNIDADES

Las magnitudes fundamentales seleccionadas son la longitud, fuerza y tiempo. Las tres unidades fundamentales correspondientes son el metro para la longitud, el kilogramo fuerza (o kilogramo peso) y el segundo. Las otras unidades pueden deducirse a partir de éstas. Así, la unidad de volumen es el m^3, la unidad de la aceleración el m/seg^2, la de trabajo el kgm y la unidad de presión el kg/m^2. Algunos datos pueden venir dados en otras unidades y deben convertirse al sistema metro-kilogramo fuerza-segundo antes de aplicarlos a la solución de los problemas.

La unidad de masa en este sistema, la UTM (unidad técnica de masa), se establece a partir de las unidades de fuerza y de aceleración. Para un cuerpo que cae en el vacío la aceleración a que está sometido es la de la gravedad ($g = 9{,}81\ m/seg^2$ al nivel del mar) y la única fuerza que actúa es su peso. A partir del segundo principio de Newton,

$$\text{fuerza en kg} = \text{masa en UTM} \times \text{aceleración en m/seg}^2$$

De aquí

$$\text{peso en kg} = \text{masa en UTM} \times g(9{,}81\ \text{m/seg}^2)$$

o

$$\text{masa } M \text{ en UTM} = \frac{\text{peso } W \text{ en kg}}{g(9{,}81\ \text{m/seg}^2)} \qquad (1)$$

PESO ESPECIFICO

El peso específico w de una sustancia es el peso de la unidad de volumen de dicha sustancia. En los líquidos, w puede considerarse constante para las variaciones ordinarias de presión. El peso específico del agua para las temperaturas más comunes es de 1000 kg/m^3. Véase el Apéndice, Tablas 1(C) y 2, para valores adicionales.

Los pesos específicos de los gases pueden calcularse mediante la *ecuación de estado* de los gases o

$$\frac{pv_s}{T} = R \quad \text{(leyes de Charles y Boyle)} \tag{2}$$

donde p es la presión absoluta en kg/m^2, v_s el volumen específico o volumen ocupado por la unidad de peso en m^3/kg, T la temperatura absoluta en grados Kelvin (°K = °C + 273) y R la *constante del gas* en m/°K. Como $w = 1/v_s$, la ecuación anterior puede escribirse

$$w = \frac{p}{RT} \tag{3}$$

DENSIDAD DE UN CUERPO ρ (ro) = masa por unidad de volumen = w/g.

En el sistema técnico de unidades, la densidad del agua es 1000/9,80665 = 101,972 ($\simeq$102) UTM/m^3 o kg seg^2/m^4. En el sistema cgs la densidad del agua es 1 g/cm^3 a 4° C. Véase Apéndice, Tabla 1(C).

DENSIDAD RELATIVA DE UN CUERPO

La densidad relativa de un cuerpo es un número adimensional que viene dado por la relación del peso del cuerpo al peso de un volumen igual de una sustancia que se toma como referencia. Los sólidos y líquidos se refieren al agua a 4° C, mientras que los gases se refieren al aire libre de CO_2 e hidrógeno a 0° C y Atm de presión, como condiciones normales. Por ejemplo,

$$\text{densidad relativa de una sustancia} = \frac{\text{peso de la sustancia}}{\text{peso de igual volumen de agua}} \tag{4}$$

$$= \frac{\text{peso específico de la sustancia}}{\text{peso específico del agua}}$$

Así, si la densidad relativa de un aceite es 0,750 su peso específico será 0,750(1000 kg/m^3) = 750 kg/m^3.

La densidad relativa del agua es 1,00 y la del mercurio 13,57. La densidad relativa de una sustancia viene dada por el mismo número en cualquier sistema de unidades. Véase Apéndice, Tabla 2.

VISCOSIDAD DE UN FLUIDO

La viscosidad de un fluido es aquella propiedad que determina la cantidad de resistencia opuesta a las fuerzas cortantes. La viscosidad se debe primordialmente a las interacciones entre las moléculas del fluido.

Con referencia a la Fig. 1-1, se consideran dos placas planas y paralelas de grandes dimensiones, separadas una pequeña distancia y, y con el espacio entre ellas lleno de un fluido. Se supone que la placa superior se mueve a una velocidad constante U al actuar sobre élla

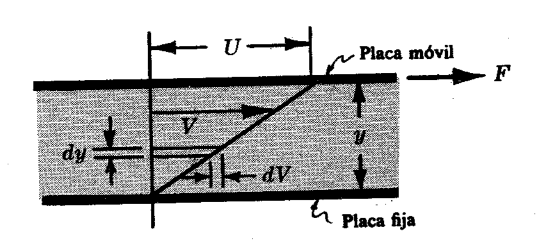


Fig. 1-1

una fuerza F, también constante. El fluido en contacto con la placa móvil se adhiere a ella moviéndose a la misma velocidad U, mientras que el fluido en contacto con la placa fija permanecerá en reposo. Si la separación y y la velocidad U no son muy grandes, la variación de las velocidades (gradiente) vendrá dada por una línea recta. La experiencia ha demostrado que la fuerza F varía con el área de la placa, con la velocidad U e inversamente con la separación y. Como por triángulos semejantes, $U/y = dV/dy$, tenemos

$$F \propto \frac{AU}{y} = A\frac{dV}{dy} \qquad \text{o} \qquad \frac{F}{A} = \tau \propto \frac{dV}{dy}$$

donde $\tau = F/A$ = tensión o esfuerzo cortante. Al introducir la constante de proporcionalidad μ (mi), llamada *viscosidad absoluta o dinámica*,

$$\tau = \mu\frac{dV}{dy} \qquad \text{o} \qquad \mu = \frac{\tau}{dV/dy} \tag{5}$$

Las unidades de μ son $\dfrac{\text{kg seg}}{\text{m}^2}$, ya que $\dfrac{\text{kg/m}^2}{(\text{m/seg})/\text{m}} = \dfrac{\text{kg seg}}{\text{m}^2}$. Los fluidos que siguen la relación (5) se llaman *fluidos newtonianos* (véase Problema 9).

Otro coeficiente de viscosidad, llamado *viscosidad cinemática*, viene definido por

$$\text{viscosidad cinemática } \nu \text{ (ni)} = \frac{\text{viscosidad absoluta } \mu}{\text{densidad}}$$

o

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{w/g} = \frac{\mu g}{w} \tag{6}$$

Las unidades de ν son $\dfrac{\text{m}^2}{\text{seg}}$, ya que $\dfrac{(\text{kg seg/m}^2)(\text{m/seg}^2)}{\text{kg/m}^3} = \dfrac{\text{m}^2}{\text{seg}}$.

Las viscosidades en los manuales vienen dadas normalmente en poises y stokes (unidades del sistema cgs) y en ocasiones en grados o segundos Saybolt, a partir de medidas en viscosímetros. Algunas conversiones de un sistema a otro de unidades se dan en los Problemas 6-8. En las Tablas 1 y 2 del Apéndice se dan algunos valores de viscosidades.

En los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura, pero no se ve afectada apreciablemente por las variaciones de presión. La viscosidad absoluta de los gases aumenta al aumentar la temperatura, pero casi no varía con la presión. Como el peso específico de los gases varía con la presión (a temperatura constante), la viscosidad cinemática es inversamente proporcional a la presión. Sin embargo, de la ecuación anterior, $\mu g = w\nu$.

PRESION DE VAPOR

Cuando tiene lugar el fenómeno de la evaporación dentro de un espacio cerrado, la presión parcial a que dan lugar las moléculas de vapor se llama presión de vapor. Las presiones de vapor dependen de la temperatura, aumentando con ella. En la Tabla 1(C) se dan valores para el agua.

TENSION SUPERFICIAL

Una molécula en el interior de un líquido está sometida a la acción de fuerzas atractivas en todas las direcciones, siendo la resultante nula. Pero si la molécula está en la superficie del líquido, sufre la acción de un conjunto de fuerzas de cohesión, cuya resultante es perpendicular a la superficie. De aquí que sea necesario consumir cierto trabajo para mover las moléculas hacia la superficie venciendo la resistencia de estas fuerzas, por lo que las moléculas superficiales tienen más energía que las interiores.

La tensión superficial de un líquido es el trabajo que debe realizarse para llevar moléculas en número suficiente desde el interior del líquido hasta la superficie para crear una nueva unidad de super-

ficie (kgm/m^2). Este trabajo es numéricamente igual a la fuerza tangencial de contracción que actuara sobre una línea hipotética de longitud unidad situada en la superficie (kg/m).

En la mayoría de los problemas presentados en las mecánicas de fluidos elementales la tensión superficial no es de particular importancia. En la Tabla 1(C) se dan valores de la tensión superficial σ (sigma) para el agua en contacto con el aire.

CAPILARIDAD

La elevación o descenso de un líquido en un tubo capilar (o en situaciones físicas análogas, tales como en medios porosos) vienen producidos por la tensión superficial, dependiendo de las magnitudes relativas de la cohesión del líquido y de la adhesión del líquido a las paredes del tubo. Los líquidos ascienden en tubos que mojan (adhesión > cohesión) y descienden en tubos a los que no mojan (cohesión > adhesión). La capilaridad tiene importancia en tubos de diámetros aproximadamente menores de 10 mm.

PRESION DE UN FLUIDO

La presión de un fluido se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y actúa normalmente a cualquier superficie plana. En el mismo plano horizontal, el valor de la presión en un líquido es igual en cualquier punto. Las medidas de presión se realizan con los manómetros, que pueden ser de diversas formas. De no advertir lo contrario, a través de todo el libro las presiones serán las presiones relativas o manométricas. La presión manométrica representa el valor de la presión con relación a la presión atmosférica.

LA PRESION viene expresada por una fuerza dividida por una superficie. En general,

$$p\ (\text{kg/m}^2) = \frac{dP\ (\text{kg})}{dA\ (\text{m}^2)}$$

Cuando la fuerza P actúa uniformemente distribuida sobre una superficie, tenemos

$$p\ (\text{kg/m}^2) = \frac{P\ (\text{kg})}{A\ (\text{m}^2)} \qquad \text{y} \qquad p'\ (\text{kg/cm}^2) = \frac{P\ (\text{kg})}{A\ (\text{cm}^2)}$$

DIFERENCIA DE PRESIONES

La diferencia de presiones entre dos puntos a distintos niveles en un líquido viene dada por

$$p_2 - p_1 = w(h_2 - h_1) \qquad \text{en kg/m}^2 \tag{7}$$

donde w = peso específico de líquido (kg/m^3) y $h_2 - h_1$ = diferencia en elevación (m).

Si el punto 1 está en la superficie libre del líquido y h es positiva hacia abajo, la ecuación anterior se transforma en

$$p = wh \qquad [\text{en kg/m}^2\ (\text{man})] \tag{8}$$

Para obtener la presión en kg/cm^2,

$$p' = \frac{p}{10^4} = \frac{wh}{10^4} \qquad [\text{en kg/cm}^2(\text{man})] \tag{9}$$

Estas ecuaciones son aplicables en tanto que w se mantenga constante (o varía tan ligeramente con h, que no introduzca un error significativo en el resultado).

VARIACIONES DE LA PRESION EN UN FLUIDO COMPRESIBLE

Las variaciones de presión en un fluido compresible son, por lo general, muy pequeñas ya que los pesos específicos son pequeños, como también lo son las diferencias en elevación consideradas en la mayoría de los cálculos en la hidráulica. Cuando se han de tener en cuenta para pequeñas diferencias en elevación dh, la ley de variación de la presión puede escribirse en la forma

$$dp = -w\,dh \qquad (10)$$

El signo negativo indica que la presión disminuye al aumentar la altitud, con h positiva hacia arriba. En los Problemas 29-31 se dan aplicaciones de esta fórmula.

ALTURA O CARGA DE PRESION h

La altura de presión h representa la altura de una columna de fluido homogéneo que dé la presión dada. Así

$$h\ (\text{m de fluido}) = \frac{p\ (\text{kg/m}^2)}{w\ (\text{kg/m}^3)} \qquad (11)$$

MODULO VOLUMETRICO DE ELASTICIDAD (E)

El módulo volumétrico de elasticidad expresa la compresibilidad de un fluido. Es la relación de la variación de presión a la variación de volumen por unidad de volumen.

$$E = \frac{dp'}{-dv/v} = \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{m}^3/\text{m}^3} = \text{kg/cm}^2 \qquad (12)$$

COMPRESION DE LOS GASES

La compresión de los gases puede tener lugar de acuerdo con diversas leyes de termodinámica. Para la misma masa de gas sujeta a dos estados diferentes,

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2} = WR \quad \text{y} \quad \frac{p_1}{w_1 T_1} = \frac{p_2}{w_2 T_2} = R \qquad (13)$$

donde p = presión absoluta en kg/m^2, v = volumen en m^3, W = peso en kg,
w = peso específico en kg/m^3, R = constante del gas en m/°K,
T = temperatura absoluta en grados Kelvin (°C + 273).

PARA CONDICIONES ISOTERMICAS (temperatura constante) la expresión anterior (*13*) se transforma en

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \quad \text{y} \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{p_1}{p_2} = \text{constante} \qquad (14)$$

También Módulo volumétrico $E = p$ (en kg/m^2) (*15*)

PARA CONDICIONES ADIABATICAS O ISOENTROPICAS (sin intercambio de calor) las expresiones anteriores se convierten en

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \quad \text{y} \quad \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^k = \frac{p_1}{p_2} = \text{constante} \qquad (16)$$

También
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} \tag{17}$$

y
$$\text{Módulo volumétrico } E = kp \text{ (en kg/m}^2\text{)} \tag{18}$$

donde k es la relación de calores específicos a presión constante y a volumen constante. Se le llama también exponente adiabático.

La Tabla 1(A) del Apéndice da algunos valores típicos de R y k. Para muchos gases, el producto de R por el peso molecular es aproximadamente 848.

PERTURBACIONES EN LA PRESION

Cualquier perturbación en la presión de un fluido se propaga en forma de ondas. Estas ondas de presión se mueven a una velocidad igual a la de propagación del sonido a través del fluido. La velocidad de propagación o celeridad, en m/seg, viene dada por

$$c = \sqrt{E/\rho} \tag{19}$$

donde E viene medido en kg/m². Para los gases, la velocidad de sonido es

$$c = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kgRT} \tag{20}$$

Problemas resueltos

1. Calcular el peso específico w, el volumen específico v_s y la densidad ρ del metano a 38° C y 8,50 kg/cm² de presión absoluta.

Solución:

De la Tabla 1(A) del Apéndice, $R = 53$.

$$\text{Peso específico } w = \frac{p}{RT} = \frac{8{,}5 \times 10^4}{53(273 + 38)} = 5{,}16 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Volumen específico } v_s = \frac{1}{w} = \frac{1}{5{,}16} = 0{,}194 \text{ m}^3\text{/kg}$$

$$\text{Densidad } \rho = \frac{w}{g} = \frac{5{,}16}{9{,}81} = 0{,}527 \text{ UTM/m}^3$$

2. Si 6 m³ de un aceite pesan 5080 kg, calcular su peso específico w, densidad ρ y densidad relativa.

Solución:

$$\text{Peso específico } w = \frac{5080 \text{ kg}}{6 \text{ m}^3} = 848 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Densidad } \rho = \frac{w}{g} = \frac{848 \text{ kg/m}^3}{9{,}81 \text{ m/seg}^2} = 86{,}5 \text{ UTM/m}^3$$

$$\text{Densidad relativa} = \frac{w_{ac}}{w_{ag}} = \frac{848}{1000} = 0{,}848$$

3. A 32° C y 2,10 kg/cm², el volumen específico v_s de cierto gas es 0,71 m³/kg. Determinar la constante del gas R y su densidad ρ.

Solución:

$$\text{Como } w = \frac{p}{RT}, \quad R = \frac{p}{wT} = \frac{pv_s}{T} = \frac{(2{,}10 \times 10^4)(0{,}71)}{273 + 32} = 68{,}8.$$

$$\text{Densidad } \rho = \frac{w}{g} = \frac{1/v_s}{g} = \frac{1}{v_s g} = \frac{1}{0{,}71 \times 9{,}81} = 0{,}1436 \text{ UTM/m}^3$$

4. (*a*) Determinar la variación de volumen de 1 m³ de agua a 27° C al aumentar la presión en 21 kg/cm². (*b*) A partir de los siguientes datos experimentales determinar el módulo de elasticidad volumétrico del agua: a 35 kg/cm² el volumen era de 30 dm³ y a 250 kg/cm² de 29,70 dm³.

Solución:

(*a*) De la Tabla 1(*C*) del Apéndice, E a 27° C es de 22,90 × 10³ kg/cm². Mediante la fórmula (*12*),

$$dv = -\frac{v\,dp'}{E} = -\frac{1 \times 21 \times 10^4}{22{,}9 \times 10^7} = -9{,}15 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

(*b*) La definición asociada con la fórmula (*12*) indica que las variaciones *correspondientes* en la presión y volumen son las que deben considerarse en la fórmula. De aquí, un aumento en la presión se corresponde con una disminución de volumen.

$$E = -\frac{dp'}{dv/v} = -\frac{(250 - 35) \times 10^4}{(29{,}70 - 30) \times 10^3/30 \times 10^3} = 21{,}50 \times 10^7 \text{ kg/m}^2$$

5. Un cilindro contiene 356 dm³ de aire a 49° C y una presión absoluta de 2,80 kg/cm². Se comprime el aire hasta 70 dm³. (*a*) Suponiendo condiciones isotérmicas, ¿cuál es la presión en el nuevo volumen y cuál el módulo de elasticidad volumétrico? (*b*) Al suponer condiciones adiabáticas, ¿cuál es la presión final, la temperatura final y el módulo de elasticidad volumétrico?

Solución:

(*a*) Para condiciones isotérmicas, $p_1 v_1 = p_2 v_2$

De aquí, $2{,}80 \times 10^4 \times 0{,}356 = p_2' \times 10^4 \times 0{,}070$ y $p_2' = 14{,}20$ kg/cm² (ab)

El módulo volumétrico $E = p' = 14{,}20$ kg/cm².

(*b*) Para condiciones adiabáticas, $p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$ y la Tabla 1(*A*) del Apéndice da $k = 1{,}40$. De aquí,

$$2{,}80 \times 10^4 (0{,}356)^{1{,}40} = p_2' \times 10^4 (0{,}070)^{1{,}40} \quad \text{y } p_2' = 27{,}22 \text{ kg/cm}^2 \text{ (ab)}.$$

La temperatura final se obtiene a partir de la ecuación (*17*):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k}, \quad \frac{T_2}{273 + 49} = \left(\frac{27{,}22}{2{,}80}\right)^{0{,}40/1{,}40}, \quad T_2 = 616° \text{ K} = 343° \text{ C}$$

El módulo volumétrico $E = kp' = 1{,}40 \times 27{,}22 = 38{,}10$ kg/cm².

6. De las International Critical Tables, la viscosidad del agua a 20° C es 0,01008 poises. Calcular (*a*) la viscosidad absoluta en kg seg/m². (*b*) Si la densidad relativa a 20° C es 0,998, calcular el valor de la viscosidad cinemática en m²/seg.

Solución:

El poise está medido en dinas seg/cm². Como 1 kg = 9,81 × 10⁵ dinas y 1 m = 100 cm, obtenemos

$$1 \frac{\text{kg seg}}{\text{m}^2} = \frac{9{,}81 \times 10^5 \text{ dinas seg}}{10^4 \text{ cm}^2} = 98{,}1 \text{ poises}$$

(*a*) μ en kg seg/m² $= 0{,}01008/98{,}1 = 10{,}28 \times 10^{-5}$

(*b*) ν en m²/seg $= \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{\mu}{w/g} = \dfrac{\mu g}{w} = \dfrac{10{,}28 \times 10^{-5} \times 9{,}81}{0{,}998 \times 1000} = 1{,}01 \times 10^{-5}$

7. Hallar la viscosidad cinemática de un líquido cuya viscosidad absoluta es de 15,14 poises y su densidad relativa 0,964 dando el resultado en m²/seg.

Solución:

Procediendo como en el Problema 6,

$$\nu = \frac{15{,}14 \times 9{,}81}{98{,}1 \times 964} = 1{,}57 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{seg.}$$

8. Convertir una viscosidad de 510 segundos Saybolt a 15,5° C en viscosidad cinemática ν en m²/seg.

Solución:

Cuando para la determinación se ha utilizado un viscosímetro universal Saybolt, para la conversión se utiliza uno de los dos grupos de fórmulas siguientes:

(*a*) para $t \leq 100$, μ en poises $= (0{,}00226t - 1{,}95/t) \times$ densidad relativa
para $t > 100$, μ en poises $= (0{,}00220t - 1{,}35/t) \times$ densidad relativa

(*b*) para $t \leq 100$, ν en stokes $= (0{,}00226t - 1{,}95/t)$
para $t > 100$, ν en stokes $= (0{,}00220t - 1{,}35/t)$

donde t mide los segundos Saybolt. Para convertir stokes (cm²/seg) en m²/seg solo es necesario dividir por 10^4.

Mediante el segundo grupo (*b*) de fórmulas, ya que $t > 100$, $\nu = \left(0{,}00220 \times 510 - \dfrac{1{,}35}{510}\right) \times 10^{-4}$
$= 1{,}1194 \times 10^{-4}$ m²/seg.

9. Estudiar las características de velocidad de deformación bajo esfuerzo cortante, que se representan para diversos tipos de fluidos en la Figura 1-2.

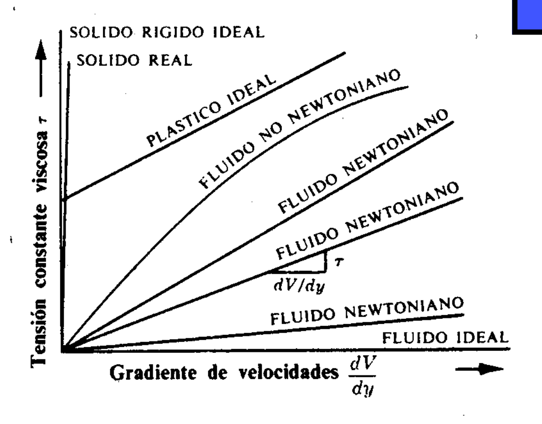


Fig. 1-2

Solución:

(*a*) Los fluidos newtonianos se comportan de acuerdo con la ley $\tau = \mu(dV/dy)$, o bien que la tensión cortante es proporcional al gradiente de velocidades o velocidad de deformación tangencial. Por tanto, para éstos fluidos, la gráfica de la tensión cortante en función del gradiente de velocidades es una línea recta que pasa por el origen. La pendiente de esta recta determina la viscosidad.

(*b*) En un fluido «ideal» la resistencia a la deformación cortante o tangencial es nula, de aquí que su gráfica coincida con el eje de abscisas. Aunque los fluidos ideales no existen, en ciertos análisis está justificada y es útil la hipótesis de fluido ideal.

(*c*) Para un sólido rígido «ideal» no hay deformación bajo ningún estado de carga, y la gráfica coincide con el eje y de ordenadas. Los sólidos reales sufren siempre alguna deformación y, dentro del límite de proporcionalidad (ley de Hooke), la gráfica es una línea recta casi vertical.

(*d*) Los fluidos no newtonianos se deforman de manera que la tensión cortante no es proporcional a la velocidad de deformación tangencial, excepto quizá a tensiones cortantes muy pequeñas. La deformación de estos fluidos pudiera clasificarse como plástica.

(*e*) Los materiales plásticos «ideales» pueden soportar cierta cantidad de esfuerzo cortante sin deformarse, y a partir de un cierto valor de aquél se deforman con una velocidad proporcional a la tensión cortante.

10. Con referencia a la Fig. 1-3, el fluido tiene una viscosidad absoluta de $4{,}88 \times 10^{-3}$ kg seg/m² y una densidad relativa de 0,913. Calcular el gradiente de velocidades y el módulo de la tensión cortante en el contorno y en los puntos situados a 25 mm, 50 mm y 75 mm del contorno, suponiendo (*a*) una distribución de velocidades lineal y (*b*) una distribución de velocidades parabólica. La parábola en el dibujo tiene su vértice en *A*. El origen está en *B*.

Fig. 1-3

Solución:

(*a*) Para la hipótesis de distribución lineal, la relación entre la velocidad y la distancia y es $V = 15y$. De aquí $dV = 15\,dy$, y el gradiente de velocidades es $dV/dy = 15$.

Para $y = 0$, $V = 0$, $dV/dy = 15$ seg^{-1} y

$$\tau = \mu(dV/dy) = 4{,}88 \times 10^{-3} \times 15 = 7{,}32 \times 10^{-2}\ \text{kg/m}^2$$

Análogamente, para los otros valores de y, también se obtiene $\tau = 7{,}32 \times 10^{-2}$ kg/m².

(*b*) La ecuación de la parábola debe satisfacer la condición de que la velocidad sea cero en el contorno *B*. La ecuación de la parábola es $V = 1{,}125 - 200(0{,}075 - y)^2$. Luego $dV/dy = 400(0{,}075 - y)$ y la tabulación de los resultados conduce a lo siguiente:

$y \times 10^3$	V	dV/dy	$\tau = 4{,}88 \times 10^{-3}(dV/dy)$
0	0	30	0,1464 kg/m²
25	0,625	20	0,0976 kg/m²
50	1,000	10	0,0488 kg/m²
75	1,125	0	0

Se observará que en los puntos en que el gradiente de velocidades es nulo (cosa que ocurre en el eje de las tuberías en conducción forzada, como se verá más adelante) la tensión cortante es cero.

Las unidades del gradiente de velocidades son seg^{-1} y el producto $\mu(dV/dy) = (\text{kg seg/m}^2)(\text{seg}^{-1}) = \text{kg/m}^2$, dimensiones correctas de la tensión cortante τ.

11. Un cilindro de 12 cm de radio gira concéntricamente en el interior de un cilindro fijo de 12,6 cm de radio. Ambos cilindros tienen una longitud de 30 cm. Determinar la viscosidad del líquido que llena el espacio entre los cilindros, si se necesita un par de 9,0 cm kg para mantener una velocidad angular de 60 revoluciones por minuto.

Solución:

(*a*) El par se transmite al cilindro exterior a través de la capa de fluido. Como el espaciado entre los cilindros es pequeño, los cálculos pueden realizarse sin integración.

Velocidad tangencial del cilindro interior $= r\omega = (0{,}12\ \text{m})(2\pi\ \text{rad/seg}) = 0{,}755$ m/seg.

En el pequeño espacio entre los cilindros puede suponerse lineal el gradiente de velocidades y utilizar el radio medio. Así, $dV/dy = 0{,}755/(0{,}120 - 0{,}126) = 125{,}8$ (m/seg)/m o seg^{-1}

Par aplicado = par resistente

$$0{,}09 = \tau(\text{área})(\text{brazo}) = \tau(2\pi \times 0{,}123 \times 0{,}30)(0{,}123) \quad \text{y} \quad \tau = 3{,}15\ \text{kg/m}^2.$$

De aquí, $\mu = \tau/(dV/dy) = 3{,}15/125{,}7 = 0{,}02500$ kg seg/m².

(*b*) En un método matemático más exacto se utiliza el cálculo como sigue:
Como antes, $0{,}09 = \tau(2\pi r \times 0{,}30)r$, de donde $\tau = 0{,}0476/r^2$.

Ahora bien, $\dfrac{dV}{dy} = \dfrac{\tau}{\mu} = \dfrac{0{,}0476}{\mu r^2}$, donde las variables son la velocidad V y el radio r. La velocidad es cero en el radio mayor e igual a 0,755 m/seg en el radio menor.

Ordenando la expresión anterior y sustituyendo $-dr$ por dy (el signo menos indica que r disminuye cuando y aumenta), se obtiene

$$\int_{V_{ex}}^{V_{in}} dV = \frac{0{,}0476}{\mu}\int_{1{,}126}^{0{,}120} \frac{-dr}{r^2} \quad \text{y} \quad V_{in} - V_{ex} = \frac{0{,}0476}{\mu}\left[\frac{1}{r}\right]_{0{,}126}^{0{,}120}$$

Por tanto, $(0{,}755 - 0) = \dfrac{0{,}0476}{\mu}\left(\dfrac{1}{0{,}120} - \dfrac{1}{0{,}126}\right)$, de donde $\mu = 0{,}02500$ kg seg/m^2.

12. Demostrar que la presión en un punto es la misma en todas las direcciones.

Solución:

Considérese un pequeño prisma triangular de líquido en reposo, bajo la acción del fluido que lo rodea. Los valores medios de la presión sobre las tres superficies son p_1, p_2 y p_3. En la dirección z, las fuerzas son iguales y opuestas y se anulan entre ellas.

Sumando las fuerzas en las direcciones x e y se obtiene

$$\Sigma X = 0, \quad P_2 - P_3 \text{ sen } \theta = 0$$

o $$p_2(dy\,dz) - p_3(ds\,dz) \text{ sen } \theta = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad P_1 - P_3 \cos \theta - dW = 0$$

o $$p_1(dx\,dz) - p_3(ds\,dz) \cos \theta - w(\tfrac{1}{2}\,dx\,dy\,dz) = 0$$

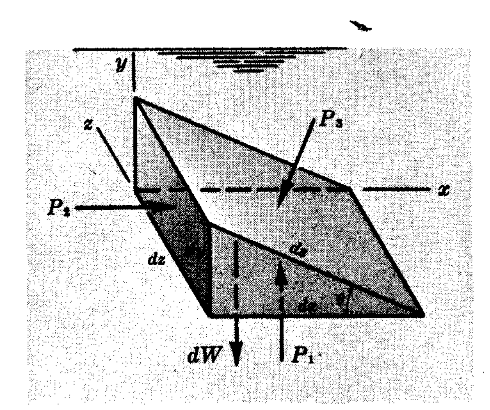


Fig. 1-4

Como $dy = ds$ sen θ y $dx = ds \cos \theta$, las ecuaciones se reducen a las siguientes:

$$p_2\,dy\,dz - p_3\,dy\,dz = 0 \quad \text{o} \quad p_2 = p_3 \qquad (1)$$

y $$p_1\,dx\,dz - p_3\,dx\,dz - w(\tfrac{1}{2}\,dx\,dy\,dz) = 0 \quad \text{o} \quad p_1 - p_3 - w(\tfrac{1}{2}\,dy) = 0 \qquad (2)$$

Cuando el prisma tiende a contraerse sobre un punto, dy tiende a cero en el límite, y la presión media se vuelve uniforme en la superficie que tiende a cero y queda definida la presión en un punto. Por tanto, al poner $dy = 0$ en la ecuación (*2*) se obtiene $p_1 = p_3$ y de aquí $p_1 = p_2 = p_3$.

13. Deducir la expresión $(p_2 - p_1) = w(h_2 - h_1)$.

Solución:

Considérese una porción de líquido AB (Fig. 1-5) como un cuerpo libre de sección recta transversal dA que se mantiene en equilibrio bajo la acción de su propio peso y la acción de las otras partículas de líquido sobre el cuerpo AB.

En A la fuerza que actúa es $p_1\,dA$ (la presión en kg/m^2 por el área en m^2); en B es $p_2\,dA$. El peso del cuerpo libre AB es $W = wv = wL\,dA$. Las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AB son normales a sus lados, de las que se muestran solo unas pocas en la figura. Al establecer $\Sigma X = 0$, dichas fuerzas normales no es necesario considerarlas en la ecuación. Por consiguiente,

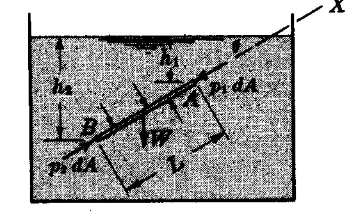


Fig. 1-5

$$p_2\,dA - p_1\,dA - w\,L\,dA \text{ sen } \theta = 0$$

Como L sen $\theta = h_2 - h_1$, la ecuación anterior se reduce a $(p_2 - p_1) = w(h_2 - h_1)$.

14. Determinar la presión en kg/cm^2 sobre una superficie sumergida a 6 m de profundidad en una masa de agua.

Solución:

Utilizando el valor medio de 1000 kg/m^3 para w,

$$p' = \frac{wh}{10^4} = \frac{1000 \times 6}{10^4} = 0{,}60 \text{ kg/cm}^2 \text{ (man)}$$

15. Determinar la presión en kg/cm^2 a una profundidad de 9 m en un aceite de densidad relativa de 0,750.

Solución:

$$p' = \frac{wh}{10^4} = \frac{(0{,}750 \times 1000)9}{10^4} = 0{,}675 \text{ kg/cm}^2 \text{ (man)}$$

16. Encontrar la presión absoluta en kg/cm^2 en el Problema 14 si la lectura barométrica es de 75,6 cm de mercurio (densidad relativa 13,57).

Solución:

Presión absoluta = presión atmosférica + presión debida a los 6 m de agua

$$= \frac{(13{,}57 \times 1000)(0{,}756)}{10^4} + \frac{1000 \times 6}{10^4} = 1{,}628 \text{ kg/cm}^2 \text{ (ab)}$$

17. ¿A qué profundidad de un aceite, de densidad relativa 0,750, se producirá una presión de 2,80 kg/cm^2? ¿A cuál si el líquido es agua?

Solución:

$$h_{ac} = \frac{p}{w_{ac}} = \frac{2{,}80 \times 10^4}{0{,}750 \times 1000} = 37{,}30 \text{ m}, \qquad h_{ag} = \frac{p}{w_{ag}} = \frac{2{,}80 \times 10^4}{1000} = 28{,}00 \text{ m}$$

18. (*a*) Convertir una altura de presión de 5 m de agua en altura de aceite, de densidad relativa 0,750. (*b*) Convertir una altura de presión de 60 cm de mercurio en altura de aceite, de densidad relativa 0,750.

Solución:

(*a*) $h_{ac} = \dfrac{h_{ag}}{\text{den. rel. aceite}} = \dfrac{5}{0{,}750} = 6{,}33 \text{ m}$ (*b*) $h_{ac} = \dfrac{h_{ag}}{\text{den. rel. aceite}} = \dfrac{13{,}57 \times 0{,}60}{0{,}750} = 10{,}85 \text{ m}$

19. Preparar un gráfico de forma que puedan compararse fácilmente las presiones manométricas (man) y absolutas (ab) con las limitaciones que se harán notar.

Solución:

Sea A un punto, Fig. 1-6, a una presión absoluta de 3,85 kg/cm^2. La presión manométrica dependerá de la presión atmosférica reinante. Si tal presión es la atmosférica normal al nivel del mar (1,033 kg/cm^2), la presión manométrica en A será 3,850 − 1,033 = 2,817 kg/cm^2. La lectura barométrica más corriente equivale a una presión de 1,014 kg/cm^2, con lo que la presión manométrica obtenida sería 3,850 − 1,014 = 2,836 kg/cm^2 (man).

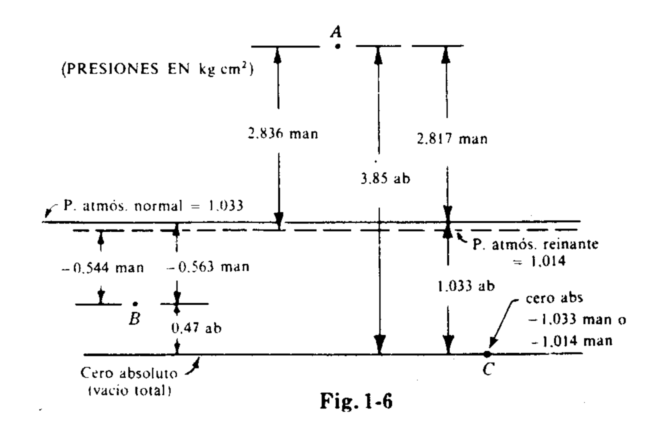


Fig. 1-6

Sea B un punto a una presión absoluta de 0,47 kg/cm². Este valor viene representado gráficamente por de bajo de la presión atmosférica normal 1,033 kg/cm² y la presión manométrica para B será $0{,}470 - 1{,}033 = -0{,}563$ kg/cm² (man). Si la presión atmosférica reinante es de 1,014 kg/cm², la presión manométrica para est valor será $0{,}470 - 1{,}014 = -0{,}544$ kg/cm² (man).

Sea C un punto a una presión absoluta igual a cero. Esta condición es equivalente a una presión manomé trica «normal» negativa de $-1{,}033$ kg/cm² y a una presión manométrica, representativa del valor más corrien te, de $-1{,}014$ kg/cm².

Las conclusiones que se pueden sacar son importantes. Las presiones manométricas negativas no pueden exceder de un límite teórico de la presión manométrica reinante o del valor normal de $-1{,}033$ kg/cm². Las presiones absolutas no pueden tomar valores negativos.

20. Con referencia a la Fig. 1-7, las áreas del pistón A y del cilindro B son, respectivamente, de 40 y 4000 cm² y B pesa 4000 kg. Los depósitos y las conducciones de conexión están llenos de aceite de densidad relativa 0,750. ¿Cuál es la fuerza P necesaria para mantener el equilibrio si se desprecia el peso de A?

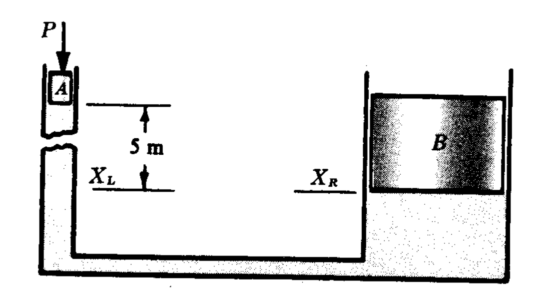


Fig. 1-7

Solución:

Se determina primero la presión que actúa sobre A. Como X_L y X_R están al mismo nivel en la misma masa de líquido, se tiene

$$\text{presión en } X_L \text{ en kg/cm}^2 = \text{presión en } X_R \text{ en kg/cm}^2$$

o $$\text{presión bajo } A + \text{presión debida a los 5 m de aceite} = \frac{\text{peso de } B}{\text{área de } B}$$

Sustituyendo, $$p'_A + \frac{wh}{10^4} = \frac{4000 \text{ kg}}{4000 \text{ cm}^2}$$

$$p'_A + \frac{750 \times 5}{10^4} \text{ kg/cm}^2 = 1{,}0 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{y} \qquad p'_A = 0{,}625 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerza P = presión uniforme × área = 0,625 kg/cm² × 40 cm² = 25,0 kg.

21. Determinar la presión manométrica en A en kg/cm² debida a la columna de mercurio (den. rel. 13,57) en el manómetro en U mostrado en la Figura 1-8.

Solución:

B y C están al mismo nivel y en el mismo líquido, el mercurio; por tanto, podemos igualar las presiones en B y C en *kg/m² (man)*.

$$\text{Presión en } B = \text{presión en } C$$
$$p_A + wh \text{ (para el agua)} = p_D + wh \text{ (para el mercurio)}$$
$$p_A + 1000(3{,}60 - 3{,}00) = 0 + (13{,}57 \times 1000)(3{,}80 - 3{,}00)$$

Al despejar, $p_A = 10.256$ kg/m² y $p'_A = 10.256/10^4 = 1{,}0256$ kg/cm² (man).

Otro procedimiento de resolución consiste en emplear las alturas de presión en metros de agua, lo que conduce por lo general a menos operaciones aritméticas, como se ve a continuación:

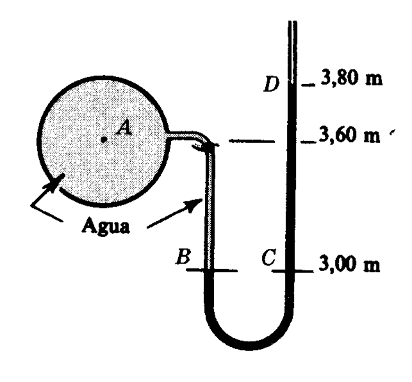


Fig. 1-8

$$\text{Altura de presión en } B = \text{altura de presión en } C$$
$$p_A/w + 0{,}60 \text{ m de agua} = 0{,}80 \times 13{,}57 \text{ m de agua}$$

Al despejar $p_A/w = 10{,}256$ m de agua y $p'_A = (1000 \times 10{,}256)/10^4 = 1{,}0256$ kg/cm² (man), como antes.

22. Aceite de densidad relativa 0,750 está fluyendo a través de la boquilla mostrada en la Fig. 1-9 y desequilibra la columna de mercurio del manómetro en U. Determinar el valor de h si la presión en A es de 1,40 kg/cm².

Solución:

Presión en B = presión en C

o, al utilizar como unidad kg/cm², $p'_A + \dfrac{wh}{10^4}\,(\text{aceite}) = p'_D + \dfrac{wh}{10^4}\,(\text{mercurio})$

$$1{,}40 + \frac{(0{,}750 \times 1000)(0{,}825 + h)}{10^4} = \frac{(13{,}57 \times 1000)h}{10^4} \quad \text{y} \quad h = 1{,}14 \text{ m}$$

Otro método:

Al utilizar ahora como unidad la altura de presión en m de agua,

Altura de presión en B = altura de presión en C

$$\frac{1{,}40 \times 10^4}{1000} - (0{,}825 - h)0{,}750 = 13{,}57h \quad \text{y} \quad h = 1{,}14 \text{ m, como antes}$$

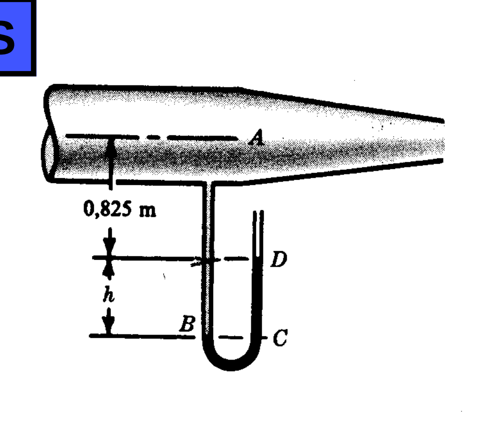


Fig. 1-9

Fig. 1-10

23. Para una presión manométrica en A de $-0{,}11$ kg/cm², encontrar la densidad relativa (Dr) del líquido manométrico B de la Figura 1-10.

Solución:

Presión en C = presión en D

o, en kg/m², $p_A - wh = p_D$

$$-0{,}11 \times 10^4 + (1{,}60 \times 1000)0{,}45 = p_D = -380 \text{ kg/m}^2$$

Ahora bien, $p_G = p_D = -380$ kg/m², ya que el peso de los 0,68 m de aire pueden despreciarse sin error apreciable. Además $p_E = p_F = 0$ en kg/m² (man).

Por tanto, presión en G = presión en E − presión de (3,38 − 3,00) m del líquido manométrico

o $p_G = p_E - (\text{Dr} \times 1000)(3{,}38 - 3{,}00)$

$$-380 = 0 - (\text{Dr} \times 1000)0{,}38 \quad \text{y} \quad \text{Dr} = 1{,}00$$

24. Para una lectura manométrica en A de $-0{,}18$ kg/cm^2, determinar (a) la elevación en las ramas abiertas de los piezómetros E, F y G y (b) la lectura del manómetro en U de mercurio de la Figura 1-11.

Solución:

(a) Como el peso específico del aire (aproximadamente 1,28 kg/m^3) es muy pequeño comparado con el de los líquidos, la presión en la elevación de 15 m puede considerarse igual a $-0{,}18$ kg/cm^2 sin introducir error apreciable en los cálculos.

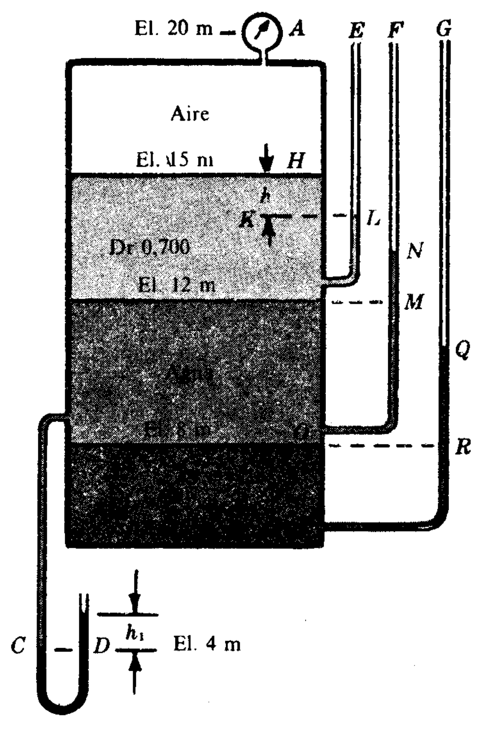


Fig. 1-11

Para la columna E:

Supuesta la elevación de L, como la mostrada, se tiene

en kg/m^2 (man) $\qquad p_K = p_L$

Por tanto, $\qquad p_H + wh = 0$

o bien $\qquad -0{,}18 \times 10^4 + (0{,}700 \times 1000)h = 0$

y $h = 2{,}57$ m.

De aquí, la elevación de L será $15{,}00 - 2{,}57 = 12{,}43$ m.

Para la columna F:

Presión en El. 12 m = presión en El. 15 m + presión del líquido de Dr 0,700

$$= -0{,}18 + \frac{(0{,}700 \times 1000)(15 - 12)}{10^4} = 0{,}03 \text{ kg/cm}^2$$

que debe ser igual a la presión en M. Por tanto, la altura de presión en M será $\dfrac{0{,}03 \times 10^4}{1000} = 0{,}30$ m de agua, y la columna F ascenderá 0,30 m por encima de M o bien la elevación en N es igual a 12,30 m.

Para la columna G:

Presión en El. 8 m = presión en El. 12 m + presión de 4 m de agua

o bien, $$p_O = 0{,}03 + \frac{1000 \times 4}{10^4} = 0{,}43 \text{ kg/cm}^2$$

que debe ser igual a la presión en R. Por tanto, la altura de presión en R será $\dfrac{0{,}43 \times 10^4}{1{,}600 \times 1000} = 2{,}69$ m del líquido y la columna G ascenderá 2,69 m sobre R o hasta una elevación de 10,69 m en Q.

(b) Para el manómetro de tubo en U, al utilizar como unidades metros de agua,

altura de presión en D = altura de presión en C.

$13{,}57h_1$ = altura de presión en El. de 12 m + altura de presión de 8 m de agua

$13{,}57h_1 = 0{,}30 + 8{,}00$

de donde $h_1 = 0{,}61$ m.

25. Un manómetro diferencial está unido a dos secciones rectas A y B de una tubería horizontal por la que circula agua. La lectura en el manómetro de mercurio es de 0,60 m, siendo el nivel más cercano a A el más bajo. Calcular la diferencia de presiones entre A y B en kg/cm^2. Véase la Figura 1-12.

Solución:

Nota: Un croquis o dibujo ayuda a esclarecer el análisis de todos los problemas y a reducir las equivocaciones. Aun un simple diagrama de una línea puede servir.

$$\text{Altura de presión en } C = \text{altura de presión en } D$$

o, al utilizar como unidad el m de agua, $p_A/w - z = [p_B/w - (z + 0{,}60)] + 13{,}57(0{,}60)$

De aquí, $p_A/w - p_B/w$ = diferencia en alturas de presión $= 0{,}60(13{,}57 - 1) = 7{,}54$ m de agua
y $p'_A - p'_B = (7{,}54 \times 1000)/10^4 = 0{,}754$ kg/cm^2.

Si $(p'_A - p'_B)$ fuera negativa, la interpretación correcta del signo sería que la presión en B era 0,754 kg/cm^2 mayor que la presión en A.

Los manómetros diferenciales deben ser purgados del aire de todos los tubos antes de tomar lecturas.

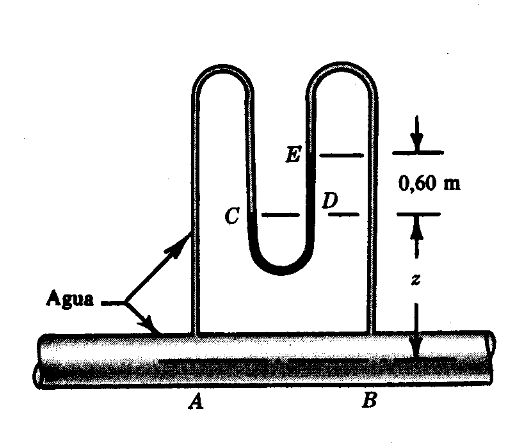


Fig. 1-12

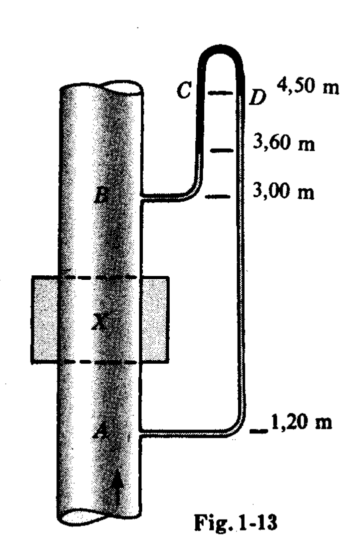


Fig. 1-13

26. Se quiere medir la pérdida de carga a través del dispositivo X mediante un manómetro diferencial cuyo líquido manométrico tiene una densidad relativa de 0,750. El líquido que circula tiene una densidad relativa de 1,50. Hallar la caída en altura de presión entre A y B a partir de la lectura manométrica en el aceite, mostrada en la Figura 1-13.

Solución:

$$\text{Presión en } C \text{ en kg/m}^2 = \text{presión en } D \text{ en kg/m}^2$$
$$p_B - (1{,}50 \times 1000)0{,}60 - (0{,}750 \times 1000)0{,}90 = p_A - (1{,}50 \times 1000)3{,}30$$

De aquí, $p_A - p_B = 3375$ kg/m^2 y la diferencia en alturas de presión $= \dfrac{3375}{w} = \dfrac{3375}{1{,}50 \times 1000} = 2{,}25$ m de líquido.

Otro método:

Al utilizar como unidad el m de líquido (Dr = 1,50),

$$\text{altura de presión en } C = \text{altura de presión en } D$$

$$\frac{p_B}{w} - 0{,}60 - \frac{0{,}750 \times 0{,}90}{1{,}50} = \frac{p_A}{w} - 3{,}30$$

De aquí, $p_A/w - p_B/w$ = diferencia en alturas de presión = 2,25 m de líquido, como antes.

27. Los recipientes A y B contienen agua a las presiones respectivas de 2,80 y 1,40 kg/cm^2. ¿Cuál es la lectura en el manómetro diferencial de mercurio, mostrado en la Figura 1-14?

Solución:

Altura de presión en C = altura de presión en D

$$\frac{2{,}80 \times 10^4}{1000} + x + h = \frac{1{,}40 \times 10^4}{1000} - y + 13{,}57h \quad \text{(en m de agua)}$$

Ordenando, $(10^4/1000)(2{,}80 - 1{,}40) + x + y = (13{,}57 - 1)h$. Al sustituir $x + y = 2{,}00$ m y despejar se obtiene $h = 1{,}27$ m.

El lector habrá observado que empleando como unidades el kg/m^2 o el kg/cm^2 se hacen más operaciones aritméticas, pero como la probabilidad de cometer errores de concepto es menor se recomienda el uso de tales unidades en lugar de las alturas de presión.

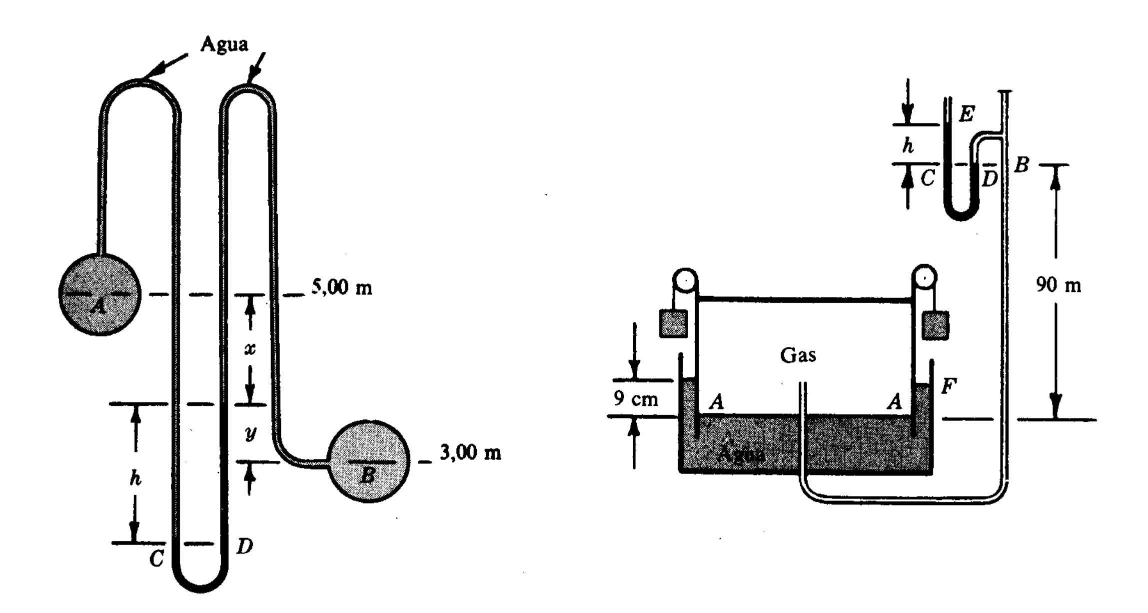


Fig. 1-14

Fig. 1-15

28. La altura de presión al nivel A-A es de 0,09 m de agua y los pesos específicos del gas y del aire son, respectivamente, 0,560 y 1,260 kg/m^3. Determinar la lectura en el manómetro de agua de tubo en U, que mide la presión del gas al nivel B, según se muestra en la Figura 1-15.

Solución:

Se supone que tanto el peso específico del aire como el del gas permanecen constantes en los 90 m de diferencia en elevación. Como los pesos específicos del gas y del aire son del mismo orden de magnitud, debe tenerse en cuenta el cambio en la presión atmosférica con la altitud. Se utilizarán presiones absolutas.

$$\text{(absoluta) } p_C = \text{(absoluta) } p_D \quad (\text{kg/m}^2)$$
$$\text{(atmosférica) } p_E + 1000h = \text{(absoluta) } p_A - 0{,}560 \times 90 \qquad (A)$$

Se calcula ahora la presión absoluta en A en función de la presión atmosférica en E, obteniendo primero la presión atmosférica en F y luego p_A.

$$\text{(absoluta) } p_A = [\text{(atmos.) } p_E + 1{,}260(h + 90 - 0{,}09)] + 0{,}09 \times 1000 \ (\text{kg/m}^2)$$

Sustituyendo este valor en (A), eliminando p_E y despreciando los términos muy pequeños, se obtiene

$$1000h = 90(1{,}260 - 0{,}560) + 0{,}09(1000) \qquad \text{y} \qquad h = 0{,}153 \text{ m de agua}$$

29. ¿Cuál es la presión en el océano a una profundidad de 1500 m, suponiendo (*a*) que el agua salada es incompresible y (*b*) el agua del mar es compresible y tiene un peso específico en la superficie de 1025 kg/m³? $E = 21.000$ kg/cm² (constante).

Solución:

(*a*) Presión $p = wh = 1025 \times 1500 = 15{,}375 \times 10^5$ kg/m² (man).

(*b*) Como la masa no varía al comprimirla ni su peso, $dW = 0$; de aquí

$$dW = d(wv) = w\,dv + v\,dw = 0 \qquad \text{o} \qquad dv/v = -dw/w \tag{A}$$

De las ecuaciones (*10*) y (*12*), $dp = -w\,dh$ y $dv/v = -dp/E$. Sustituyendo en (*A*),

$$dp/E = dw/w \tag{B}$$

Integrando, $p = E \log_e w + C$. En la superficie, $p = p_o$, $w = w_o$; de aquí, $C = p_o - E \log_e w_o$ y

$$p = E \log_e w + p_o - E \log_e w_o \qquad \text{o} \qquad (p - p_o) = E \log_e (w/w_o) \tag{C}$$

Poniendo $dp = -w\,dh$ en (*B*), $\dfrac{-w\,dh}{E} = \dfrac{dw}{w}$ o $dh = -\dfrac{E\,dw}{w^2}$. Integrando,

$$h = E/w + C_1 \tag{D}$$

En la superficie, $h = 0$, $w = w_o$; entonces, $C_1 = -E/w_o$, $h = (E/w - E/w_o)$ y, por tanto,

$$w = \frac{w_o E}{w_o h + E} = \frac{(1025)(21.000 \times 10^4)}{(1025)(-1500) + (21.000 \times 10^4)} = 1032{,}6 \text{ kg/m}^3$$

recordando que h es positiva hacia arriba y dando E en kg/m²

$$p = (21.000 \times 10^4) \log_e (1032{,}6/1025) = 15{,}476 \times 10^5 \text{ kg/m}^2 \text{ (man)}$$

30. Calcular la presión barométrica en kg/cm² a una altitud de 1200 m si la presión al nivel del mar es de 1,033 kg/cm². Supónganse condiciones isotérmicas a 21° C.

Solución:

El peso específico del aire a 21° C es $w = \dfrac{p}{29{,}3(273 + 21)}$. Por tanto, de la ecuación (*10*),

$$dp = -w\,dh = -\frac{p}{29{,}3(294)}\,dh \qquad \text{o} \qquad \frac{dp}{p} = -0{,}000116\,dh \tag{A}$$

Integrando (*A*), $\log_e p = -0{,}000116h + C$, donde C es la constante de integración.

Para calcular C: cuando $h = 0$, $p = 1{,}033 \times 10^4$ kg/m² (ab). De aquí, $C = \log_e (1{,}033 \times 10^4)$ y

$$\log_e p = -0{,}000116h + \log_e (1{,}033 \times 10^4) \qquad \text{o} \qquad 0{,}000116h = \log_e (1{,}033 \times 10^4/p) \tag{B}$$

Pasando (*B*) a logaritmos decimales

$$2{,}3026 \log (1{,}033 \times 10^4/p) = 0{,}0001/6(1200),$$

$$\log (1{,}033 \times 10^4/p) = 0{,}06045, \quad 1{,}033 \times 10^4/p = \text{antilog } 0{,}06045 = 1{,}14935$$

de la cual $p = \dfrac{1{,}033 \times 10^4}{1{,}14935} = 9{,}0 \times 10^3$ kg/m² $= 0{,}90$ kg/cm².

31. Deducir la expresión general que da la relación entre la presión y la elevación, cuando las condiciones son isotérmicas, mediante $dp = -w\,dh$.

Solución:

Para condiciones isotérmicas, la ecuación $\dfrac{p}{wT} = \dfrac{p_o}{w_o T_o}$ se transforma en $\dfrac{p}{w} = \dfrac{p_o}{w_o}$ o $w = w_o \dfrac{p}{p_o}$.

Por tanto, $dh = -\dfrac{dp}{w} = -\dfrac{p_o}{w_o} \times \dfrac{dp}{p}$. Integrando, $\displaystyle\int_{h_o}^{h} dh = -\frac{p_o}{w_o}\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{p}$ y

$$h - h_o = -\frac{p_o}{w_o}(\log_e p - \log_e p_o) = +\frac{p_o}{w_o}(\log_e p_o - \log_e p) = \frac{p_o}{w_o}\log_e \frac{p_o}{p}$$

En realidad, la temperatura de la atmósfera disminuye con la altitud. De aquí, que una solución exacta requiera el conocimiento de las variaciones de la temperatura con la altitud para utilizar la ley de los gases p/wT = constante.

32. Desarrollar una expresión que relacione la presión manométrica p que reina en el interior de una gota de líquido y la tensión superficial σ.

Solución:

La tensión superficial que actúa sobre la superficie de una gota de líquido da lugar a que la presión en el interior de la gota sea superior a la presión exterior.

La Fig. 1-16 muestra las fuerzas que producen el equilibrio en la dirección X de media gota de diámetro d. Las fuerzas $\sigma\, dL$ se deben a la tensión superficial que actúa sobre el perímetro y las fuerzas dP_x son las componentes en la dirección X de las fuerzas $p\, dA$ (véase Capítulo 2). Por tanto, de $\Sigma X = 0$,

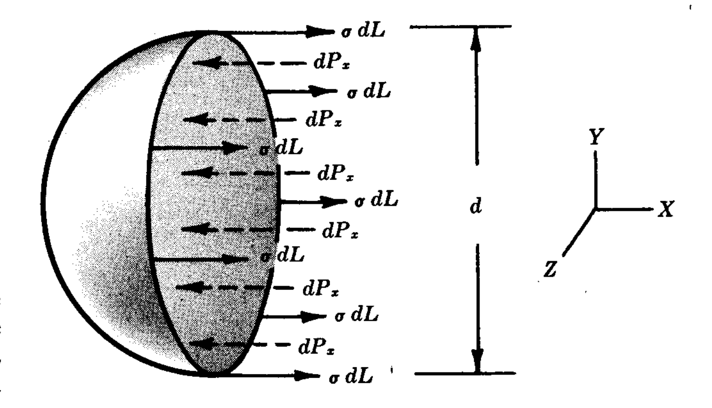


Fig. 1-16

$$\text{suma de fuerzas hacia la derecha} = \text{suma de fuerzas hacia la izquierda}$$
$$\sigma \int dL = \int dP_x$$
$$\text{tensión superficial} \times \text{perímetro} = \text{presión} \times \text{proyección del área}$$
$$\sigma(\pi d) = p(\pi d^2/4)$$

o $p = 4\sigma/d$ en kg/m^2 (man). Las unidades de la tensión superficial son kg/m.

Se observa que cuanto menor es la gota, mayor es la presión.

33. Una pequeña gota de agua a 27° C está en contacto con el aire y tiene un diámetro de 0,50 mm. Si la presión en el interior de la gota es $5{,}80 \times 10^{-3}$ kg/cm^2 mayor que la atmosférica, ¿cuál es el valor de la tensión superficial?

Solución:

$$\sigma = \tfrac{1}{4}pd = \tfrac{1}{4}\,(58)\ \text{kg/m}^2 \times (0{,}5 \times 10^{-3})\ \text{m} = 0{,}029\ \text{kg/m}$$

34. Calcular la altura aproximada a la que ascenderá un líquido que moja el vidrio en un tubo capilar en contacto con la atmósfera.

Solución:

La elevación en un tubo de diámetro pequeño puede calcularse aproximadamente considerando como cuerpo libre la masa de líquido $ABCD$ que se muestra en la Figura 1-17.

Como ΣY debe ser igual a cero, se obtiene

componentes verticales de las fuerzas debidas a la tensión superficial − peso del volumen $ABCD$ hacia abajo + fuerza de la presión sobre AB hacia arriba − fuerza de la presión sobre CD hacia abajo = 0.

o $$+ (\sigma \textstyle\int dL)\ \text{sen}\ \alpha - w(\pi d^2/4 \times h) + p(\text{área } AB) - p(\text{área } CD) = 0$$

Se ve que las presiones en los niveles AB y CD son iguales ambas a la atmosférica. Por tanto, los dos últimos términos del primer miembro se anulan entre sí y, como $\sigma \int dL = \sigma(\pi d)$, se obtiene

$$h = \frac{4\sigma\ \text{sen}\ \alpha}{wd} \quad \text{en metros}$$

Para un mojado total, como ocurre con el agua en contacto con vidrio muy limpio, el ángulo α es prácticamente 90°. No puede garantizarse una mayor aproximación.

En los trabajos experimentales, para evitar errores de consideración debidos a la capilaridad deben utilizarse tubos de diámetro de aproximadamente 10 mm o mayores.

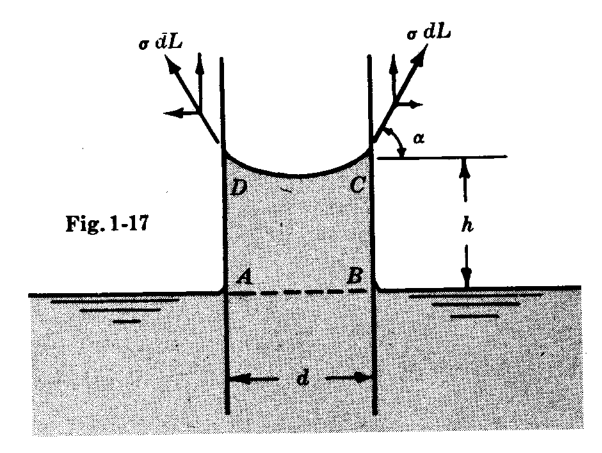


Fig. 1-17

35. Calcular la altura a la que ascenderá en un tubo capilar, de 3,00 mm de diámetro, agua a 21° C.

Solución: De la Tabla 1(*C*), σ = 0,00740 kg/m. Suponiendo un ángulo α = 90°, supuesto el tubo limpio,

$$h = \frac{4\sigma}{wd} = \frac{4 \times 0{,}00740 \text{ kg/m}}{1000 \text{ kg/m}^3 \times 3 \times 10^{-3} \text{ m}} = 0{,}0099 \text{ m} = 9{,}90 \text{ mm}.$$

S

Problemas propuestos

I

36. Si la densidad de un líquido es de 85 UTM/m³, determinar su peso específico y su densidad relativa. *Sol.* 834 kg/m³, 0,834

37. Comprobar los valores de la densidad y del peso específico del aire a 30° C dados en la Tabla 1(*B*).

38. Comprobar los valores de los pesos específicos del anhídrido carbónico y del nitrógeno dados en la Tabla 1(*A*).

39. ¿A qué presión tendrá el aire un peso específico de 1,910 kg/m³ si la temperatura es de 50° C? *Sol.* 1,80 kg/cm² (ab)

40. Dos metros cúbicos de aire, inicialmente a la presión atmosférica, se comprimen hasta ocupar 0,500 m³. Para una compresión isotérmica, ¿cuál es la presión final? *Sol.* 4,132 kg/cm² (ab)

41. En el problema precedente, ¿cuál será la presión final si no hay pérdidas de calor durante la compresión? *Sol.* 7,20 kg/cm² (ab)

42. Determinar la viscosidad absoluta del mercurio en kg seg/m² si en poises es igual a 0,0158. *Sol.* $1{,}61 \times 10^{-4}$ kg seg/m²

43. Si la viscosidad absoluta de un aceite es de 510 poises, ¿cuál es la viscosidad en el sistema kg-m-seg? *Sol.* 5,210 kg seg/m²

44. ¿Qué valores tienen las viscosidades absoluta y cinemática en el sistema técnico de unidades (kg-m-seg) de un aceite que tiene una viscosidad Saybolt de 155 seg y una densidad relativa de 0,932? *Sol.* 315×10^{-5} y $33{,}3 \times 10^{-6}$

45 Dos superficies planas de grandes dimensiones están separadas 25 mm y el espacio entre ellas está lleno con un líquido cuya viscosidad absoluta es 0,10 kg seg/m². Suponiendo que el gradiente de velocidades es lineal, ¿qué fuerza se requiere para arrastrar una placa de muy poco espesor y 40 dm² de área a la velocidad constante de 32 cm/seg si la placa dista 8 mm de una de las superficies? *Sol.* 2,35 kg

46 El depósito de la Fig. 1-18 contiene un aceite de densidad relativa 0,750. Determinar la lectura del manómetro *A* en kg/cm². *Sol.* $-8{,}71 \times 10^{-2}$ kg/cm² (man)

47 Un depósito cerrado contiene 60 cm de mercurio, 150 cm de agua y 240 cm de un aceite de densidad relativa 0,750, conteniendo aire el espacio sobre el aceite. Si la presión manométrica en el fondo del depósito es de 3,00 kg/cm², ¿cuál será la lectura manométrica en la parte superior del depósito? *Sol.* 1,860 kg/cm² (man)

48 Con referencia a la Fig. 1-19, el punto *A* está 53 cm por debajo de la superficie libre del líquido, de densidad relativa 1,25, en el recipiente. ¿Cuál es la presión manométrica en *A* si el mercurio asciende 34,30 cm en el tubo? *Sol.* −0,40 kg/cm² (man)

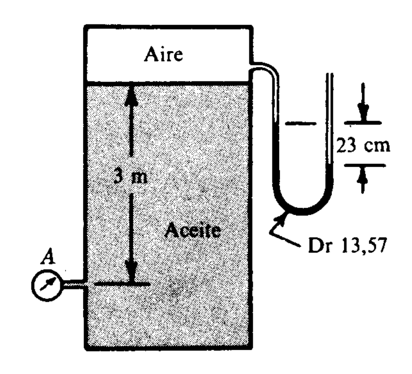


Fig. 1-18

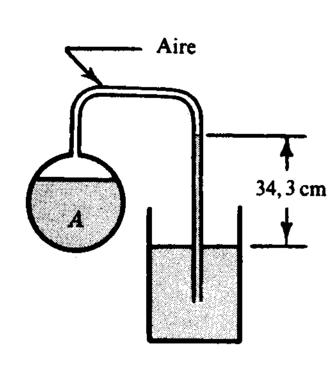


Fig. 1-19

49. Con referencia a la Fig. 1-20 y despreciando el rozamiento entre el pistón A y el cilindro que contiene el gas, determinar la presión manométrica en B en cm de agua. Supóngase que el gas y el aire tienen pesos específicos constantes e iguales, respectivamente, a 0,560 y 1,200 kg/m³. *Sol.* 60,60 cm de agua.

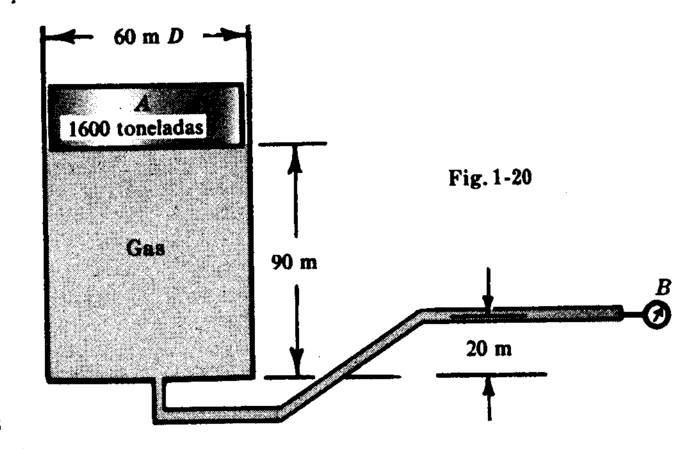


Fig. 1-20

50. Los recipientes A y B, que contienen aceite y glicerina de densidades relativas 0,780 y 1,250, respectivamente, están conectados mediante un manómetro diferencial. El mercurio del manómetro está a una elevación de 50 cm en el lado de A y a una elevación de 35 cm en el lado de B. Si la cota de la superficie libre de la glicerina en el depósito B es de 6,40 m, ¿a qué cota está la superficie libre del aceite en el recipiente A?
Sol. Cota 7,60 m

51. Un depósito A, a una elevación de 2,50 m, contiene agua a una presión de 1,05 kg/cm². Otro depósito B, a una elevación de 3,70 m, contiene un líquido a una presión de 0,70 kg/cm². Si la lectura de un manómetro diferencial es de 30 cm de mercurio, estando la parte más baja en el lado de A y a una cota de 30 cm, determinar la densidad relativa del líquido contenido en B. *Sol.* 0,525

52. El aire del recipiente de la izquierda de la Fig. 1-21 está a una presión de −23 cm de mercurio. Determinar la cota del líquido manométrico en la parte derecha, en A.
Sol. Elevación 26,30 m

53. Los compartimientos B y C de la Fig. 1-22 están cerrados y llenos de aire. La lectura barométrica es 1,020 kg/cm². Cuando los manómetros A y D marcan las lecturas indicadas, ¿qué valor tendrá x en el manómetro E de mercurio?
Sol. 1,80 m

54. El cilindro y el tubo mostrados en la Fig. 1-23 contienen aceite de densidad relativa 0,902. Para una lectura manométrica de 2,20 kg/cm², ¿cuál es el peso total del pistón y la placa W?
Sol. 60.100 kg

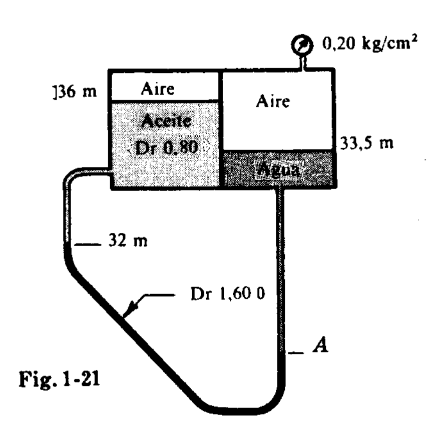
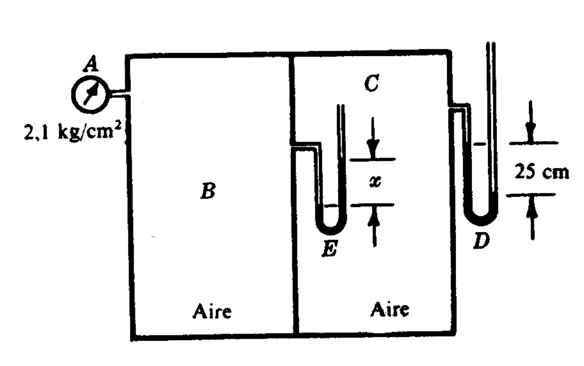


Fig. 1-21



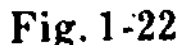


Fig. 1-22

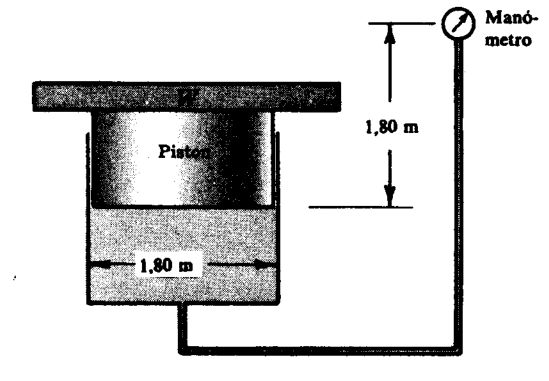


Fig. 1-23

55. Con referencia a la Fig. 1-24, ¿qué presión manométrica de A hará que la glicerina suba hasta el nivel B? Los pesos específicos del aceite y glicerina son 832 y 1250 kg/m^3, respectivamente.
Sol. 0,35 kg/cm^2

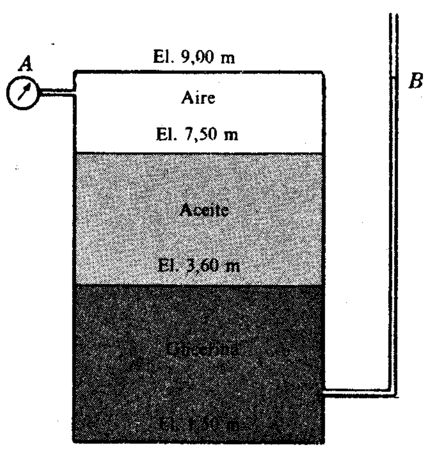


Fig. 1-24

56. Para levantar una plataforma de 10 toneladas se utiliza un gato hidráulico. Si en el pistón actúa una presión de 12 kg/cm^2 y es transmitida por un aceite de densidad relativa 0,810, ¿qué diámetro se requiere? *Sol.* 32,60 cm

57. Si el peso específico de la glicerina es 1260 kg/m^3, ¿qué presión de succión se requerirá para elevar la glicerina 22 cm en un tubo de 12,50 mm de diámetro?
Sol. -277 kg/m^2

58. ¿Cuál es el valor de la presión interior en una gota de lluvia de 1,50 mm de diámetro si la temperatura es de 21° C?
Sol. 19,70 kg/m^2 (man)

S

I

Capítulo 2

Fuerzas hidrostáticas sobre las superficies

INTRODUCCION

El ingeniero debe calcular las fuerzas ejercidas por los fluidos con el fin de poder diseñar satis toriamente las estructuras que los contienen. En este capítulo se evaluarán las tres características de fuerzas hidrostáticas, a saber: módulo, dirección y sentido. Además se determinará también la loc zación de la fuerza.

FUERZA EJERCIDA POR UN LIQUIDO SOBRE UN AREA PLANA

La fuerza P ejercida por un líquido sobre un área plana A es igual al producto del peso específic del líquido por la profundidad h_{cg} del centro de gravedad de la superficie y por el área de la misma. ecuación es

$$P = w\, h_{cg}\, A$$

siendo las unidades

$$\text{kg} = \text{kg/m}^3 \times \text{m} \times \text{m}^2$$

Se observa que el producto del peso específico w por la profundidad del centro de gravedad de la sup ficie es igual a la presión en el centro de gravedad del área.

La línea de acción de la fuerza pasa por el centro de presión, que se localiza mediante la fórm

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg}\, A} + y_{cg}$$

donde I_{cg} es el momento de inercia del área respecto de un eje que pasa por su centro de gravedad. l distancias y se miden a lo largo del plano y a partir de un eje determinado por la intersección del pla que contiene la superficie y de la superficie libre del líquido.

La componente horizontal de la fuerza hidrostática sobre una superficie cualquiera (plana o ir gular) es igual a la fuerza normal sobre la proyección vertical de la superficie. La componente pasa p el centro de presión de la proyección vertical.

La componente vertical de la fuerza hidrostática sobre cualquier superficie (plana o irregular) igual al peso del líquido situado sobre el área, real o imaginario. La fuerza pasa por el centro de gra dad del volumen.

TENSION CIRCUNFERENCIAL O TANGENCIAL

La tensión circunferencial o tangencial (kg/cm^2) se origina en las paredes de un cilindro somet a presión interna. Para cilindros de pared delgada ($t \nless 0{,}1d$),

$$\text{Tensión } \sigma \text{ (kg/cm}^2) = \frac{\text{presión } p' \text{ (kg/cm}^2) \times \text{radio } r \text{ (cm)}}{\text{espesor } t \text{ (cm)}}$$

ENSION LONGITUDINAL EN CILINDROS DE PARED DELGADA

La tensión longitudinal (kg/cm^2) en un cilindro de pared delgada cerrado por los extremos es igual la mitad de la tensión circunferencial.

Problemas resueltos

Desarrollar (*a*) la ecuación que da la fuerza hidrostática que actúa sobre un área plana y (*b*) localizar la fuerza.

Solución:

(*a*) La traza *AB* representa un área plana cualquiera sobre la que actúa un fluido y que forma el ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la Fig. 2-1. Se considera un área elemental de forma que todas sus partículas están situadas a la misma distancia *h* por debajo de la superficie libre del líquido. En la figura viene representada por la banda con rayado inclinado, y la presión sobre esta área es *uniforme*. Por tanto, la fuerza que actúa sobre esta área *dA* es igual al producto de la presión *p* por el área *dA* o bien

$$dP = p\,dA = wh\,dA$$

Sumando todas las fuerzas elementales y considerando que $h = y$ sen θ,

$$P = \int wh\,dA = \int w(y \text{ sen } \theta)\,dA$$
$$= (w \text{ sen } \theta) \int y\,dA = (w \text{ sen } \theta) y_{cg} A$$

donde w y θ son constantes y, por estática, $\int y\,dA = y_{cg}A$. Como $h_{cg} = y_{cg}$ sen θ,

$$P = w\,h_{cg}\,A \qquad (1)$$

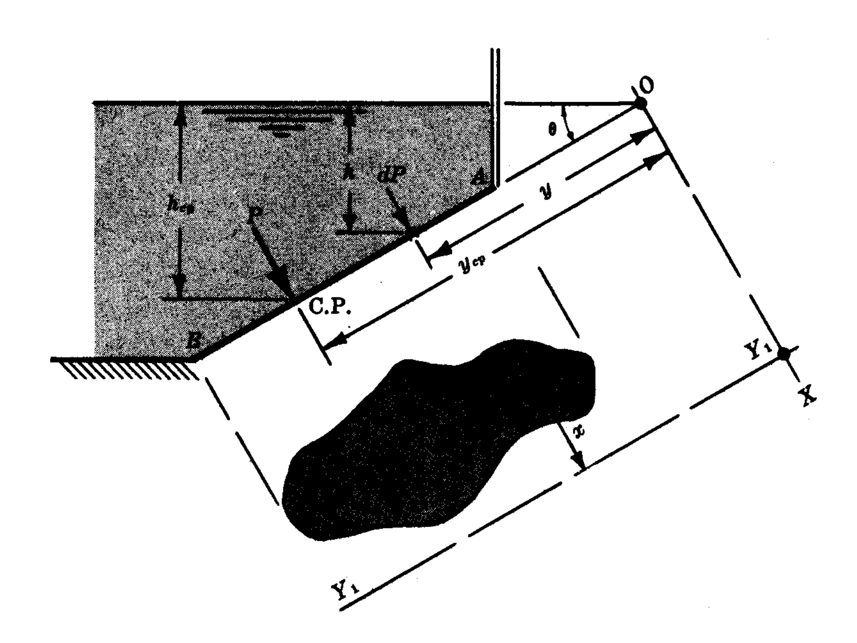


Fig. 2-1

(*b*) Para situar la fuerza P se procede a tomar momentos como en estática. El eje OX se escoge como la interse ción del plano que contiene la superficie con la superficie libre del agua. Todas las distancias y se miden partir de este eje, y la distancia a la fuerza resultante se representa por y_{cp}, que mide la distancia al cent de presión. Como la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto del eje OX = al momento de fuerza resultante, se obtiene

$$\int (dP \times y) = P \times y_{cp}$$

Pero $dP = wh\,dA = w(y \text{ sen } \theta)dA$ y $P = (w \text{ sen } \theta)y_{cg}A$. De aquí,

$$(w \text{ sen } \theta)\int y^2\,dA = (w \text{ sen } \theta)(y_{cg}A)y_{cp}$$

Como $\int y^2\,dA$ es el momento de inercia del área plana respecto del eje OX,

$$\frac{I_o}{y_{cg}A} = y_{cp}$$

En forma más conveniente, a partir del teorema de Steiner,

$$y_{cp} = \frac{I_{cg} + A y_{cg}^2}{y_{cg}A} = \frac{I_{cg}}{y_{cg}A} + y_{cg} \qquad ($$

Se observa que la posición del centro de presión está siempre *por debajo* del centro de gravedad de superficie o bien $(y_{cp} - y_{cg})$ es siempre positivo ya que I_{cg} es esencialmente positivo.

2. Situar lateralmente la posición del centro de presión. Referirse a la Figura 2-1.

Solución:

Si bien, en general, no se requiere conocer la posición lateral del centro de presión, en algunas ocasiones e necesaria dicha información. Utilizando el dibujo del problema precedente, el área elemental dA está ahora fo mada por $(dx\,dy)$ de forma que para los momentos puede tomarse la distancia x convenientemente. Tomand momentos respecto de un eje Y_1Y_1,

$$P\,x_{cp} = \int (dP\,x)$$

Al utilizar los valores obtenidos en el Problema 1 anterior,

$$(wh_{cg}A)x_{cp} = \int p(dx\,dy)x = \int wh(dx\,dy)x$$

o

$$(w \text{ sen } \theta)(y_{cg}A)x_{cp} = (w \text{ sen } \theta)\int xy(dx\,dy)$$

ya que $h = y$ sen θ. La integral representa el producto de inercia del área plana respecto de los ejes X e Y sele cionados, representado por I_{xy}. Por tanto,

$$x_{cp} = \frac{I_{xy}}{y_{cg}A} = \frac{(I_{xy})_{cg}}{y_{cg}A} + x_{cg}$$

Si *uno u otro* de los ejes centroidales fuera un eje de simetría del área plana, I_{xy} sería nulo y la posición later del centro de presión estaría sobre el eje Y que pasa a través del centro de gravedad (no se muestra en la figura Obsérvese que el producto de inercia respecto de un sistema de ejes que pasan por el centro de gravedad, $(I_{xy})_c$ puede ser positivo o negativo, de forma que la posición lateral del centro de presión puede caer a *uno u otr* lado del eje centroidal y.

3. Determinar la fuerza resultante P debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular AB de medidas 1 m × 2 m que se muestra en la Figura 2-2.

Solución:

$$P = wh_{cg}A = (1000 \text{ kg/m}^3) \times (1{,}20 + 1{,}00) \text{ m} \times (1 \times 2) \text{ m}^2 = 4400 \text{ kg}$$

Esta fuerza actúa sobre el centro de presión, que está a una distancia y_{cp} del eje O_1 y es igual a

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg}A} + y_{cg} = \frac{1(2^3)/12}{2{,}20(1 \times 2)} + 2{,}20 = 2{,}352 \text{ m de } O_1$$

4. Determinar la fuerza resultante debida a la acción del agua sobre el área rectangular CD de 1,20 m × 1,80 m mostrada en la Fig. 2-2. C es un vértice del triángulo.

Solución:

$$P_{CD} = 1000(1 + \tfrac{2}{3} \times 0{,}707 \times 1{,}8)(\tfrac{1}{2} \times 1{,}2 \times 1{,}8) = 1200 \text{ kg}$$

Esta fuerza actúa a una distancia y_{cp} del eje O_2, estando medida esta distancia sobre el plano al que pertenece el área CD.

$$y_{cp} = \frac{1{,}2(1{,}8^3)/36}{(1{,}85/0{,}707)(\frac{1}{2} \times 1{,}2 \times 1{,}8)} + \frac{1{,}85}{0{,}707} = 0{,}07 + 2{,}61 = 2{,}68 \text{ m del eje } O_2$$

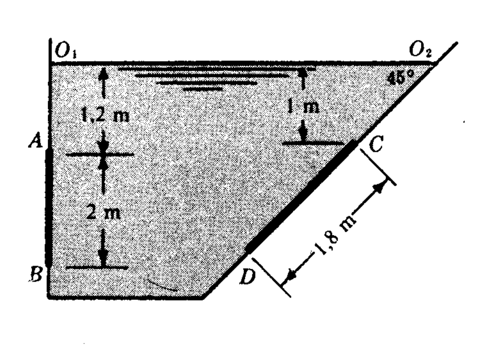


Fig. 2-2

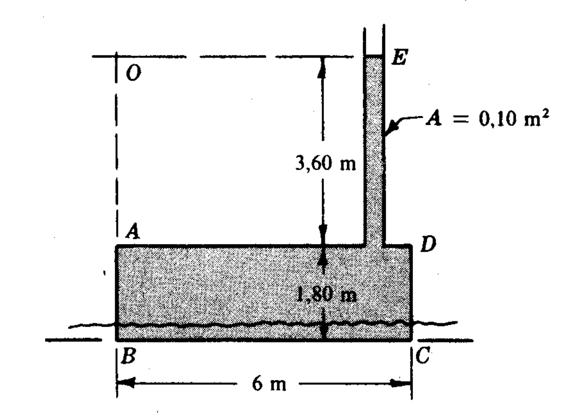


Fig. 2-3

5. El agua alcanza el nivel E en la tubería unida al depósito $ABCD$ que se muestra en la Fig. 2-3. Despreciando el peso del depósito y de la tubería de elevación, (*a*) determinar y situar la fuerza resultante que actúa sobre el área AB de 2,40 m de anchura, (*b*) la fuerza total sobre el fondo del depósito y (*c*) comparar el peso total del agua con la resultante obtenida en (*b*) y explicar la diferencia.

Solución:

(*a*) La profundidad del centro de gravedad del área AB, respecto de la superficie libre del agua en E, es de 4,50 m. Por tanto,

$$P = whA = 1000(3{,}60 + 0{,}90)(1{,}80 \times 2{,}40) = 19.440 \text{ kg, que actúa a la distancia}$$

$$y_{cp} = \frac{2{,}4(1{,}8^3)/12}{4{,}5(1{,}8 \times 2{,}4)} + 4{,}5 = 4{,}56 \text{ m de } O$$

(*b*) La presión en el fondo BC es uniforme; por consiguiente, la fuerza

$$P = pA = (wh)A = 1000(5{,}40)(6 \times 2{,}40) = 77.760 \text{ kg}$$

(*c*) El peso total del agua es $W = 1000(6 \times 1{,}8 \times 2{,}4 + 3{,}6 \times 0{,}10) = 26.280$ kg.

El cuerpo libre constituido por la parte inferior del depósito (cortado por un plano horizontal justamente encima del nivel BC) pondrá de manifiesto una fuerza, dirigida hacia abajo, sobre el área BC de 77.760 kg, fuerza vertical de tracción sobre las paredes del depósito y fuerza de reacción sobre el plano soporte. La reacción ha de ser igual al peso total del agua, es decir, 26.280 kg. La tracción en las paredes del depósito es producida por la fuerza vertical, dirigida hacia arriba, que actúa sobre la parte superior AD del depósito, que es igual

$$P_{AD} = (wh)A = 1000(3{,}6)(14{,}4 - 0{,}1) = 51.480 \text{ kg hacia arriba}$$

Se ha aclarado así una aparente paradoja, pues para el cuerpo libre considerado, la suma de las fuerzas verticales es igual a cero, es decir,

$$77.760 - 26.280 - 51.480 = 0$$

con lo que se satisface la condición de equilibrio.

6. La compuerta AB de la Fig. 2-4(a) tiene 1,20 m de anchura y está articulada en A. La lectura manométrica en G es $-0{,}15$ kg/cm^2 y el aceite que ocupa el depósito de la derecha tiene una densidad relativa de 0,750. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicarse en B para que la compuerta AB se mantenga en equilibrio?

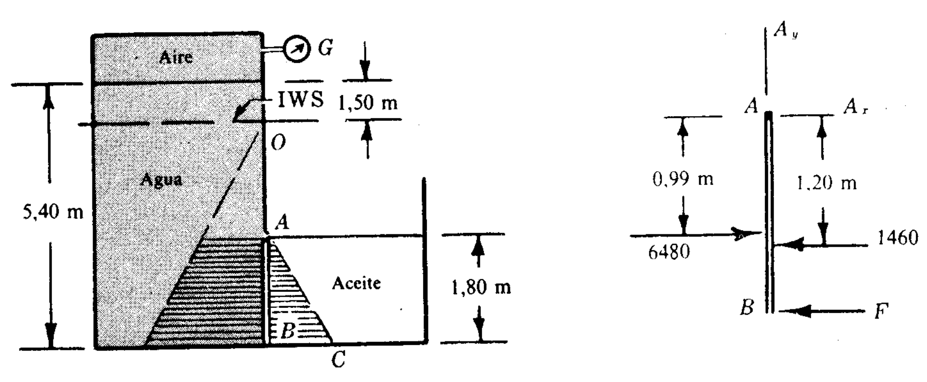


Fig. 2-4(a) Fig. 2-4(b)

Solución:

Deben calcularse el valor de las fuerzas debidas a la acción de los líquidos y su posición. Para el lado derecho,

$$P_{ac} = wh_{cg}A = (0{,}750 \times 1000)(0{,}9)(1{,}8 \times 1{,}2) = 1460 \text{ kg hacia la izquierda}$$

y actúa en
$$y_{cp} = \frac{1{,}2(1{,}8^3)/12}{0{,}9(1{,}2 \times 1{,}8)} + 0{,}9 = 1{,}20 \text{ m de } A$$

Se observa que la presión que actúa sobre la parte derecha de la compuerta AB rectangular varía linealmente desde una presión manométrica nula hasta el valor que corresponde a los 1,80 m de aceite ($p = wh$ es una ecuación lineal). El diagrama de cargas ABC pone de manifiesto este hecho. Solo para el caso de áreas rectangulares, el centro de gravedad de este diagrama de cargas coincide con el centro de presión. El centro de gravedad está localizado a $(2/3)(1{,}8) = 1{,}2$ m de A, como ya se ha obtenido.

Para el lado izquierdo, es necesario convertir la presión negativa, debida al aire, en su equivalente en metros de agua.

$$h = -\frac{p}{w} = -\frac{0{,}15 \times 10^4 \text{ kg/m}^2}{1000 \text{ kg/m}^3} = -1{,}50 \text{ m}$$

Esta altura de presión negativa es equivalente a un descenso del nivel del agua de 1,50 m. Es útil y conveniente el empleo de una superficie de agua imaginaria (IWS: Imaginary Water Surface) 1,50 m por debajo de la superficie real y resolver el problema por aplicación directa de las ecuaciones fundamentales. Así,

$$P_{ag} = 1000(2{,}1 + 0{,}9)(1{,}8 \times 1{,}2) = 6480 \text{ kg, que actúa hacia la derecha sobre el centro de presión}$$

Para el área rectangular sumergida, $y_{cp} = \dfrac{1{,}2(1{,}8^3)/12}{3(1{,}8 \times 1{,}2)} + 3 = 3{,}09$ m de O o bien el centro de presión está a $(3{,}09 - 2{,}10) = 0{,}99$ m de A.

En la Fig. 2-4(b) se muestra el diagrama del cuerpo libre de la compuerta AB con las fuerzas actuantes. La suma de momentos respecto de A debe ser igual a cero. Tomando como positivo el giro de las agujas del reloj,

$$+1460 \times 1{,}2 + 1{,}8F - 6480 \times 0{,}99 = 0 \quad \text{y} \quad F = 2590 \text{ kg hacia la izquierda}$$

El depósito de la Fig. 2-5 contiene aceite y agua. Encontrar la fuerza resultante sobre la pared ABC que tiene 1,20 m de anchura.

Solución:

La fuerza total sobre ABC es igual a $(P_{AB} + P_{BC})$. Hay que encontrar cada una de las fuerzas, situar su posición y, aplicando el principio de los momentos, hallar la posición de la fuerza total resultante sobre la pared ABC.

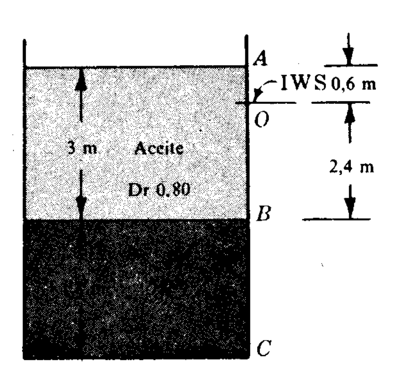


Fig. 2-5

(*a*) $P_{AB} = (0,800 \times 1000)(1,5)(3 \times 1,2) = 4320$ kg, que actúa en el punto (2/3)(3) m de A, o sea, 2 m por debajo. Puede obtenerse este mismo aplicando la fórmula conocida, como sigue:

$$y_{cp} = \frac{1,2(3^3)/12}{1,5(1,2 \times 3)} + 1,5 = 0,5 + 1,5 = 2,00 \text{ m de } A$$

(*b*) El agua actúa sobre la cara BC y la acción del líquido superior puede tenerse en cuenta por la altura o profundidad de agua equivalente. Se emplea en este segundo cálculo la superficie de agua imaginaria (IWS), situando la IWS por cambio de los 3 m de aceite en los $0,800 \times 3 = 2,40$ m de agua. Por tanto,

$P_{BC} = 1000(2,4 + 0,9)(1,8 \times 1,2) = 7128$ kg, que actúa en el centro de presión

$$y_{cp} = \frac{1,2(1,8^3)/12}{3,3(1,2 \times 1,8)} + 3,3 = 3,38 \text{ m de } O \quad \text{o bien} \quad 0,6 + 3,38 = 3,98 \text{ m de } A$$

La fuerza resultante total = 4320 + 7128 = 11.448 kg, que actúa en el centro de presión que corresponde al área total. El momento de esta resultante = la suma de los momentos de las dos fuerzas parciales anteriores. Tomando momentos respecto de A,

$$11.448\ Y_{cp} = 4320 \times 2 + 7128 \times 3,98 \quad \text{e} \quad Y_{cp} = 3,23 \text{ m de } A$$

Pueden emplearse para estos cálculos otros métodos, pero el presentado aquí reduce los errores tanto en el planteamiento como en los cálculos.

En la Fig. 2-6 la compuerta ABC está articulada en B y tiene 1,2 m de longitud. Despreciando el peso de la compuerta, determinar el momento no equilibrado debido a la acción del agua sobre la compuerta.

Solución:

$P_{AB} = 1000(1,25)(2,88 \times 1,2) = 4325$ kg, que actúa a $\frac{2}{3}(2,88) = 1,92$ m de A.

$P_{BC} = 1000(2,5)(1 \times 1,2) = 3000$ kg, que actúa sobre el centro de gravedad de BC, ya que la presión es uniforme sobre BC. Tomande momentos respecto de B (positivo el sentido de giro de las agujas de un reloj),

Momento no equilibrado $= +4325 \times 0,96 - 3000 \times 0,50$
$= +2650$ m kg (sentido de las agujas del reloj)

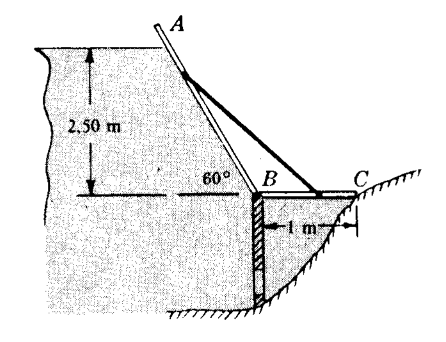


Fig. 2-6

Determinar la fuerza resultante debida a la acción del agua sobre la superficie vertical mostrada en la Fig. 2-7(*a*) y situar el centro de presión en las direcciones x e y.

Solución:

Se considera la superficie dividida en un triángulo y un rectángulo. La fuerza total que actúa es igual a la suma de la fuerza P_1 que actúa sobre el rectángulo más la P_2 que actúa sobre el triángulo.

(*a*) $P_1 = 1000(1,2)(2,4 \times 1,2) = 3456$ kg, que actúa a $\frac{2}{3}(2,4) = 1,60$ m por debajo de la superficie XX.

$P_2 = 1000(3)(\frac{1}{2} \times 1,8 \times 1,2) = 3240$ kg, que actúa a $y_{cp} = \dfrac{1,2(1,8^3)/36}{3(\frac{1}{2} \times 1,2 \times 1,8)} + 3 = 3,06$ m por debajo de XX.

La fuerza resultante $P = 3456 + 3240 = 6696$ kg. Tomando momentos respecto de XX,

$$6696\ Y_{cp} = 3456(1,6) + 3240(3,06) \quad \text{e} \quad Y_{cp} = 2,31 \text{ m por debajo de } XX$$

(*b*) Para localizar el centro de presión en la dirección X (cosa necesaria raras veces) se utiliza el principio de los momentos, después de conocer x_1 y x_2 para el rectángulo y el triángulo, respectivamente. Para el rectángulo, el centro de presión de cada banda elemental horizontal de área dA está a 0,6 m del eje YY; por tanto, el centro de presión del área total del rectángulo está también a 0,6 m de dicho eje. Para el triángulo, cada área elemental dA tiene su propio centro de presión en el centro de la banda; por consiguiente, la mediana contiene a todos estos centros de presión, y el centro de presión del triángulo completo puede calcularse ahora. Con referencia a la Fig. 2-7(*b*), por triángulos semejantes, $x_2/0{,}6 = 1{,}14/1{,}8$, de la cual $x_2 = 0{,}38$ m de YY. Tomando momentos,

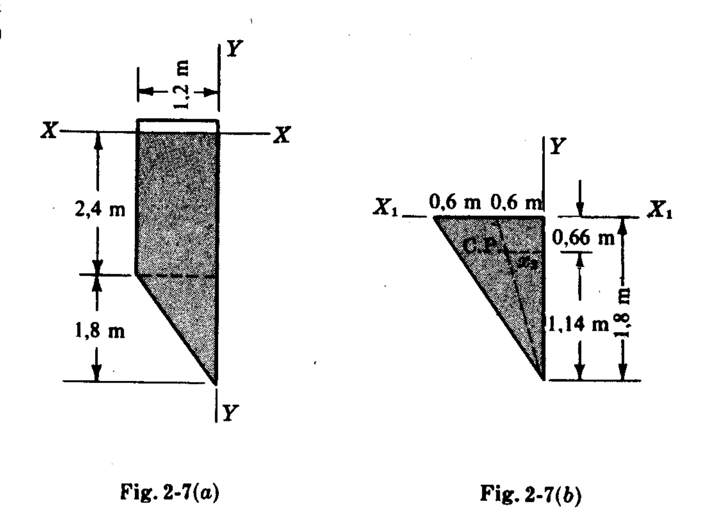


Fig. 2-7(*a*) Fig. 2-7(*b*)

$$6696\, X_{cp} = 3456(0{,}6) + 3240(0{,}38) \qquad \text{y} \qquad X_{cp} = 0{,}494 \text{ m del eje } YY$$

Puede utilizarse otro método para situar el centro de presión. En lugar de dividir el área en dos partes, se calcula la posición del centro de gravedad del área *total*. Mediante el teorema de Steiner, se determina el momento de inercia y el producto de inercia del área total respecto de los ejes paralelos por el centro de gravedad. Entonces se calculan los valores de y_{cp} y x_{cp} mediante las fórmulas (*2*) y (*4*), Problemas 1 y 2. Generalmente, este otro método no tiene ninguna ventaja en particular y entraña más operaciones.

10. La compuerta AB de 1,80 m de diámetro de la Fig. 2-8 puede girar alrededor del eje horizontal C, situado 10 cm por debajo del centro de gravedad. ¿Hasta qué altura h puede ascender el agua sin que se produzca un momento no equilibrado respecto de C, del sentido de las agujas de un reloj?

Solución:

Cuando el centro de presión coincida con el eje C no actuará sobre la compuerta ningún momento no equilibrado. Calculando la distancia del centro de presión,

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg}A} + y_{cg} = \frac{\pi d^4/64}{y_{cg}(\pi d^2/4)} + y_{cg}$$

De aquí, $$y_{cp} - y_{cg} = \frac{\pi 1{,}8^4/64}{(h + 0{,}9)(\pi 1{,}8^2/4)} = 0{,}10 \text{ m (dado)}$$

de donde $h = 1{,}125$ m por encima de A.

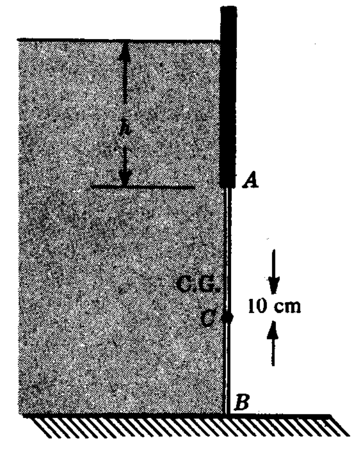
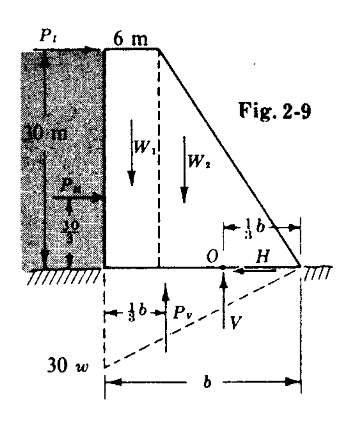


Fig. 2-8

11. Con referencia a la Fig. 2-9, ¿cuál es la anchura mínima b de la base de la presa de gravedad de una altura de 30 m al suponer que la presión hidrostática ascensional en la base de la presa varía uniformemente desde la altura de presión total en el borde de aguas arriba hasta el valor cero en el borde de aguas abajo, y suponiendo además un empuje P_I debido a una capa de hielo de 18.600 kg por metro lineal de presa y que actúa en la parte superior? Para este estudio se supone que las fuerzas resultantes de la reacción cortan a la base a un tercio de la base del borde de aguas abajo (en O) y que el peso específico del material de la presa es $2{,}50w$ (w es el peso específico del agua).

Solución:

En la figura aparecen las componentes H y V de la reacción de la cimentación sobre la presa, que pasan a través de O. Se considera una longitud de un metro de presa y se calculan todas las fuerzas en función de w y b, como sigue:



$P_H = w(15)(30 \times 1) = 450w$ kg

P_V = área del diagrama de carga
$= \frac{1}{2}(30w)(b \times 1) = 15wb$ kg

$W_1 = 2{,}50w(6 \times 30 \times 1) = 450w$ kg

$W_2 = 2{,}50w[\frac{1}{2} \times 30(b - 6)] \times 1$
$= 37{,}5w(b - 6)$ kg $= (37{,}5wb - 225w)$ kg

$P_I = 18.600$ kg, supuestos para el empuje del hielo

Para determinar el valor de b, en el equilibrio, se toman momentos respecto del eje O de estas fuerzas. Considerando como positivos los momentos que producen giros en el sentido de las agujas de un reloj,

$$450w(\frac{30}{3}) + 15wb(\frac{b}{3}) - 450w(\frac{2}{3}b - 3) - (37{,}5wb - 225w)[\frac{2}{3}(b - 6) - \frac{b}{3}] + 18.600(30) = 0$$

Simplificando y haciendo operaciones, $b^2 + 10b - 734{,}4 = 0$ y $b = 22{,}5$ m de anchura.

Determinar y situar las componentes de la fuerza debida a la acción del agua sobre la compuerta de sector AB de la Fig. 2-10 por metro de longitud de compuerta.

Solución:

P_H = fuerza sobre la proyección vertical de $CB = w\, h_{cg} A_{CB}$
$= 1000(1)(2 \times 1) = 2000$ kg, que actúa a $(2/3)(2) = 1{,}33$ m de C
P_V = peso del agua sobre el área $AB = 1000(\pi 2^2/4 \times 1) = 3140$ kg

que pasa por el centro de gravedad del volumen de líquido. El centro de gravedad del cuadrante de un círculo está situado a una distancia de $4/3 \times r/\pi$ de cada uno de los radios perpendiculares que lo limitan. Por tanto,

$$x_{cp} = 4/3 \times 2/\pi = 0{,}85 \text{ m a la izquierda del radio } BC$$

Nota: Cada una de las fuerzas elementales dP actúa normal a la curva AB y, por tanto, su línea de acción pasa por el eje C. La fuerza resultante también pasará por C. Para confirmar esta proposición, se toman momentos respecto de C, como sigue,

$$\Sigma M_C = -2000 \times 1{,}33 + 3140 \times 0{,}85 = 0 \quad \text{(luego se satisface)}$$

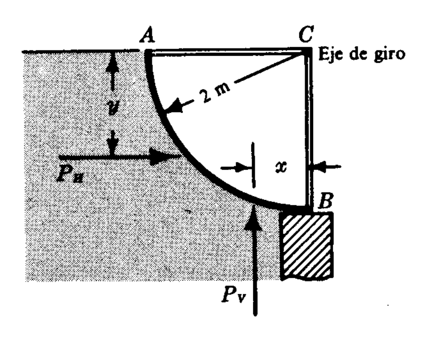


Fig. 2-10

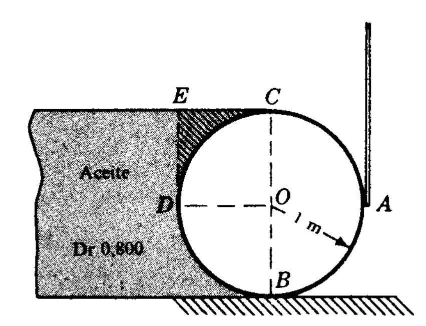


Fig. 2-11

El cilindro de la Fig. 2-11, de 2 m de diámetro, pesa 2500 kg y tiene una longitud de 1,50 m. Determinar las reacciones en A y B despreciando el rozamiento.

Solución:

(*a*) La reacción en A es debida a la componente horizontal de la fuerza que el líquido ejerce sobre el cilindro o bien

$$P_H = (0{,}800 \times 1000)(1)(2 \times 1{,}5) = 2400 \text{ kg}$$

dirigida hacia la derecha. Por tanto, la reacción en A es igual a 2400 kg dirigida hacia la izquierda.

(*b*) La reacción en B es igual a la suma algebraica del peso del cilindro y la componente vertical neta de la fuerza debida a la acción del líquido. La acción del líquido sobre la superficie curvada CDB se compone de la fuerza sobre la parte CD, dirigida hacia abajo, y la fuerza sobre DB, dirigida hacia arriba. La componente vertical neta es la suma algebraica de estas dos fuerzas.

Hacia arriba P_V = peso de líquido (real o imaginario) sobre DB
= 0,800 × 1000 × 1,5(área del sector DOB + área del cuadrado $DOCE$)

Hacia abajo P_V = 0,800 × 1000 × 1,5(área rayada DEC)

Se observa que el cuadrado $DOCE$ menos el área DEC es igual al cuadrante del círculo DOC, y la componente vertical neta será

$$\text{(neta) } P_V = 0{,}800 \times 1000 \times 1{,}5(\text{sectores } DOB + DOC) \text{ hacia arriba}$$
$$= 0{,}800 \times 1000 \times 1{,}5(\tfrac{1}{2}\pi 1^2) = 1894 \text{ kg hacia arriba}$$

Finalmente, $\Sigma Y = 0$, $2500 - 1894 - B = 0$ y $B = 606$ kg hacia arriba

En este problema particular la componente hacia arriba (empuje) es igual al peso del líquido desplazado a la izquierda del plano vertical COB.

14. Con referencia a la Fig. 2-12, determinar las fuerzas horizontal y vertical, debidas a la acción del agua sobre el cilindro de 1,8 m de diámetro, por metro de longitud del mismo.

Solución:

(*a*) (Neta) P_H = fuerza sobre CDA − fuerza sobre AB.

Mediante las proyecciones verticales de CDA y de AB,

$$P_H\,(CDA) = 1000(1{,}2 + 0{,}768)(1{,}536 \times 1)$$
$$= 3023 \text{ kg hacia la uerecha}$$

$$P_H\,(AB) = 1000(1{,}2 + 1{,}404)(0{,}264 \times 1)$$
$$= 687 \text{ kg hacia la izquierda}$$

(Neta) P_H = 3023 − 687 = 2336 hacia la derecha.

(*b*) (Neta) P_V = fuerza hacia arriba sobre DAB
− fuerza hacia abajo sobre DC
= peso del (volumen $DABFED$
− volumen $DCGED$).

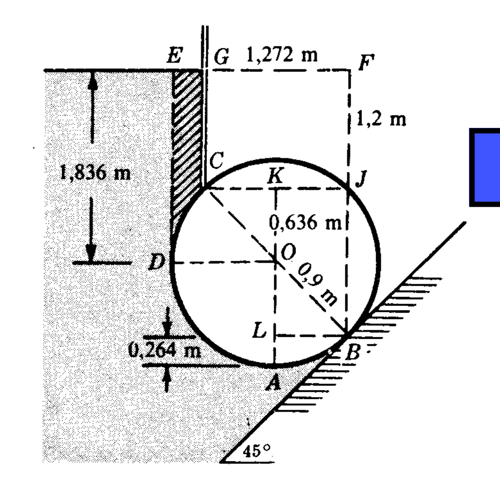


Fig. 2-12

El área rayada (volumen) está contenida en cada uno de los volúmenes anteriores, estando las fuerzas dirigidas en sentidos contrarios. Por tanto, se equilibran y

$$\text{(neta) } P_V = \text{peso del volumen } DABFGCD$$

Dividiendo este volumen en formas geométricas convenientes,

$$\text{(neta) } P_V = \text{peso de (rectángulo } GFJC + \text{triángulo } CJB + \text{semicírculo } CDAB)$$

$$= 1000(1{,}2 \times 1{,}272 + \tfrac{1}{2} \times 1{,}272 \times 1{,}272 + \tfrac{1}{2}\pi 0{,}9^2)(1)$$
$$= 1000(1{,}5264 + 0{,}809 + 1{,}2717) = 3600 \text{ kg hacia arriba}$$

Si se deseara situar esta componente vertical de la resultante, debería aplicarse el principio de los momentos. Cada una de las partes de la resultante de 3600 kg actúa a través del centro de gravedad del volumen que la origina. Por estática se determinan los centros de gravedad y puede escribirse la ecuación de momentos (véanse los Problemas 7 y 9 anteriores)

5. En la Fig. 2-13, un cilindro de 2,4 m de diámetro cierra un agujero rectangular en un depósito de 0,9 m. ¿Con qué fuerza queda presionado el cilindro contra el fondo del depósito por la acción de los 2,7 m de profundidad de agua?

Solución:

$$\text{(Neta) } P_V = \text{fuerza hacia abajo sobre } CDE - \text{fuerza hacia arriba sobre } CA \text{ y } BE$$
$$= 1000 \times 0{,}9[(2{,}1 \times 2{,}4 - \tfrac{1}{2}\pi 1{,}2^2) - 2(2{,}1 \times 0{,}162 + \tfrac{1}{12}\pi 1{,}2^2 - \tfrac{1}{2} \times 0{,}6 \times 1{,}038)]$$
$$= 2500 - 810 = 1690 \text{ kg hacia abajo}$$

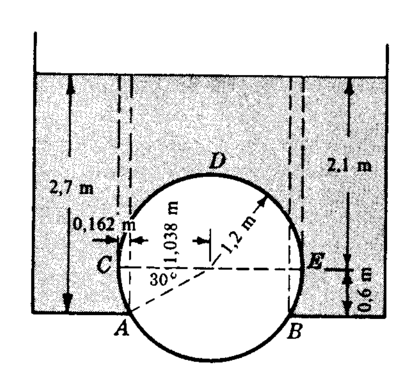


Fig. 2-13

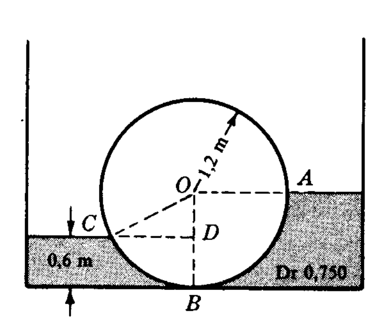


Fig. 2-14

En la Fig. 2-14, el cilindro de 2,4 m de diámetro pesa 250 kg y reposa sobre el fondo de un depósito de 1 m de longitud. Se vierten agua y aceite en la parte izquierda y derecha del depósito hasta unas profundidades de 0,6 y 1,2 m, respectivamente. Hallar los módulos de las componentes horizontal y vertical de la fuerza que mantiene al cilindro justamente en contacto con el depósito en *B*.

Solución:

$$\text{(Neta) } P_H = \text{componente sobre } AB \text{ hacia la izquierda} - \text{componente sobre } CB \text{ hacia la derecha}$$
$$= 0{,}750 \times 1000 \times 0{,}6(1{,}2 \times 1) - 1000 \times 0{,}3(0{,}6 \times 1) = 360 \text{ kg hacia la izquierda}$$

$$\text{(Neta) } P_V = \text{componente hacia arriba sobre } AB + \text{componente hacia arriba sobre } CB$$
$$= \text{peso del cuadrante de aceite} + \text{peso de (sector} - \text{triángulo) de agua}$$
$$= 0{,}750 \times 1000 \times 1 \times \tfrac{1}{4}\pi 1{,}2^2 + 1000 \times 1(\tfrac{1}{6}\pi 1{,}2^2 - \tfrac{1}{2} \times 0{,}6\sqrt{1{,}08}) = 1290 \text{ kg hacia arriba}$$

Las componentes para mantener el cilindro en su sitio serán 360 kg hacia la derecha y 1040 kg hacia abajo

El estribo semicónico *ABE*, que se muestra en la Fig. 2-15, se utiliza para soportar la torre semicilíndrica *ABCD*. Calcular las componentes horizontal y vertical debidas a la fuerza que produce la acción del agua sobre el estribo *ABE*.

Solución:

$$P_H = \text{fuerza sobre la proyección vertical del semicono}$$
$$= 1000(1{,}5 + 1)(\tfrac{1}{2} \times 3 \times 2)$$
$$= 7500 \text{ kg hacia la derecha}$$

$$P_V = \text{peso del volumen de agua sobre la superficie curvada (imaginaria)}$$
$$= 1000(\text{volumen del semicono} + \text{volumen del semicilindro})$$
$$= 1000(\tfrac{1}{2} \times 3\pi 1^2/3 + \tfrac{1}{2}\pi 1^2 \times 1{,}5)$$
$$= 3925 \text{ kg hacia arriba}$$

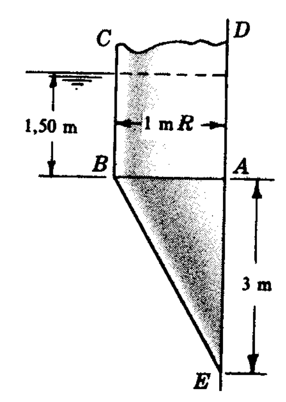


Fig. 2-15

18. Una tubería de acero de 120 cm de diámetro y 6 mm de espesor transporta aceite de densidad relativa 0,822 bajo una carga de 120 m de aceite. Calcular (*a*) la tensión en el acero y (*b*) el espesor del acero que se necesita para transportar el aceite bajo una presión de 18 kg/cm² si la tensión de trabajo admisible en el acero es de 13 kg/mm².

Solución:

(*a*)
$$\sigma \text{ (tensión en kg/cm}^2) = \frac{p' \text{ (presión en kg/cm}^2) \times r \text{ (radio en cm)}}{t \text{ (espesor en cm)}}$$
$$= \frac{(0{,}822 \times 1000 \times 120)/10^4 \times 60}{0{,}6} = 986 \text{ kg/cm}^2$$

(*b*) $\sigma = p'r/t, \quad 1300 = 18 \times 60/t, \quad t = 0{,}83$ cm.

19. Una gran tina de almacenamiento, de madera, tiene 6 m de diámetro exterior y está llena con 7,20 m de salmuera, de densidad relativa 1,06. Las duelas de madera están zunchadas con bandas planas de acero de 5 cm de anchura por 6 mm de espesor, y la tensión de trabajo admisible es de 11 kg/mm². ¿Cuál debe ser el espaciado entre las bandas cercanas al fondo de la tina si se desprecian las tensiones iniciales? Referirse a la Figura 2-16.

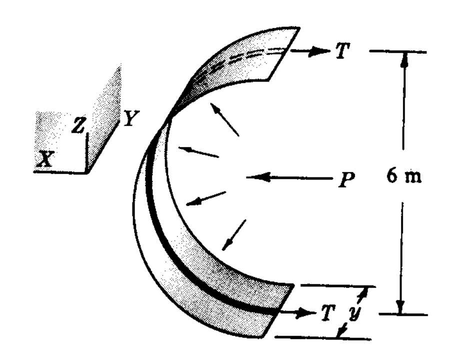


Fig. 2-16

Solución:

La fuerza P representa la suma de las componentes horizontales de las fuerzas elementales dP sobre la longitud y de la tina y las fuerzas T representan la fuerza de tracción total soportadas por la banda centrada sobre la misma longitud y. Como la suma de fuerzas en la dirección X debe ser igual a cero, $2T$ (kg) $- P$ (kg) $= 0$ o bien

$$2(\text{área del acero} \times \text{tensión en el acero}) = p' \times \text{proyección sobre } ZY \text{ del semicilindro}$$

De aquí, $2(5 \times 0{,}6)1100 = (1{,}06 \times 1000 \times 7{,}2/10^4)(600 \times y)$

e $y = 14{,}40$ cm de espaciado entre bandas

Problemas propuestos

20. Encontrar para la compuerta *AB* (Fig. 2-17) de 2,50 m de longitud la fuerza de compresión sobre el jabalcón *CD* ejercida por la presión del agua (*B*, *C* y *D* son puntos articulados).
Sol. 7160 kg

21. Una compuerta vertical rectangular *AB* de 3,6 m de altura y 1,5 m de anchura puede girar alrededor de un eje situado 15 cm por debajo del centro de gravedad de la compuerta. La profundidad total del agua es de 6 m. ¿Qué fuerza horizontal *F* ha de aplicarse en el fondo de la compuerta para mantener el equilibrio?
Sol. 1490 kg

22. Determinar el valor de *z* (Fig. 2-18) de forma que la fuerza total sobre la barra *BD* no sobrepase los 8000 kg al suponer que la longitud en dirección perpendicular al dibujo es de 1,20 m y que la barra *BD* está articulada en ambos extremos.
Sol. 1,84 m

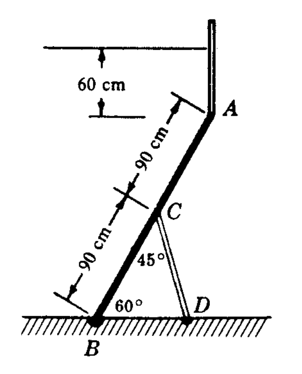


Fig. 2-17

23. Un aceite de densidad relativa 0,800 actúa sobre un área triangular vertical cuyo vértice está en la superficie libre del aceite. El triángulo tiene una altura de 2,70 m y una base de 3,60 m. Una superficie rectangular vertical de 2,40 m de altura está unida a la base de 3,60 m del triángulo y sobre ella actúa agua. Encontrar el módulo y posición de la fuerza resultante sobre la superficie total.
Sol. 36.029 kg a 3,57 m de profundidad

24. En la Fig. 2-19 la compuerta AB tiene su eje de giro en B y su anchura es de 1,20 m. ¿Qué fuerza vertical, aplicada en su centro de gravedad, será necesaria para mantener la compuerta en equilibrio, si pesa 2000 kg?
Sol. 5200 kg

25. Un depósito tiene 6 m de longitud y la sección recta mostrada en la Fig. 2-20. El agua llega al nivel AE. Determinar (*a*) la fuerza total que actúa sobre el lado BC y (*b*) el módulo y la posición de la fuerza total sobre el extremo $ABCDE$.
Sol. 86.400 kg, 42.336 kg a 3,33 m de profundidad

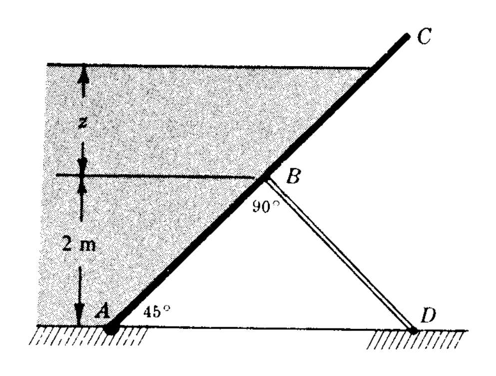


Fig. 2-18

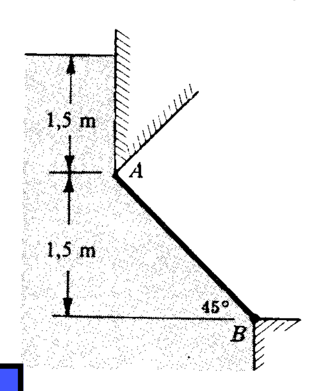


Fig. 2-19

Fig. 2-20

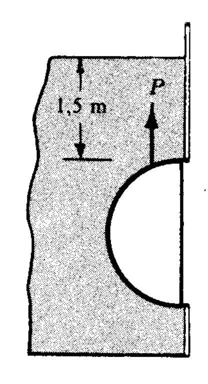


Fig. 2-21

26. En la Fig. 2-21 la compuerta semicilíndrica de 1,2 m de diámetro tiene una longitud de 1 m. Si el coeficiente de rozamiento entre la compuerta y sus guías es 0,100, determinar la fuerza P requerida para elevar la compuerta si su peso es de 500 kg. *Sol.* 187 kg

27. Un depósito de paredes laterales verticales contiene 1 m de mercurio y 5,5 m de agua. Encontrar la fuerza que actúa sobre una porción cuadrada de una de las paredes laterales, de 50 cm por 50 cm de área, la mitad de la cual está bajo la superficie de mercurio. Los lados del cuadrado están situados verticales y horizontales respectivamente. *Sol.* 1572 kg a 5,52 m de profundidad

28. Un triángulo isósceles, de base 6 m y altura 8 m, está sumergido verticalmente en un aceite de densidad relativa 0,800, con su eje de simetría horizontal. Si la altura de aceite sobre el eje horizontal es de 4,3 m, determinar la fuerza total sobre una de las caras del triángulo y localizar verticalmente el centro de presión. *Sol.* 82.560 kg, 4,65 m

29. ¿A qué profundidad se debe sumergir verticalmente en agua un cuadrado, de 4 m de lado, con dos lados horizontales, para que el centro de presión esté situado 25 cm por debajo del centro de gravedad? ¿Qué valor tendrá la fuerza total sobre una cara del cuadrado?
Sol. 3,33 m (lado superior), 85.330 kg

30. En la Fig. 2-22 el cilindro de 2 m de diámetro y 2 m de longitud está sometido a la acción del agua por su lado izquierdo y de un aceite de densidad relativa 0,800 por su lado derecho. Determinar (*a*) la fuerza normal en B si el cilindro pesa 6000 kg y (*b*) la fuerza horizontal debida al aceite y al agua si el nivel de aceite desciende 0,50 m.
Sol. 350 kg, 6200 kg hacia la derecha

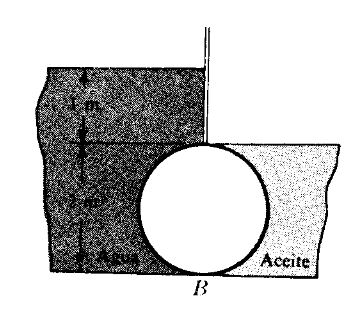


Fig. 2-22

31. En la Fig. 2-23, para una longitud de 4 m de la compuerta, determinar el momento no compensado respecto eje de giro *O*, debido al agua, cuando ésta alcanza el nivel *A*.
Sol. 18.000 mkg en el sentido de las agujas de un reloj

32. El depósito, cuya sección recta se muestra en la Fig. 2-24, tiene 2 m de longitud y está lleno de agua a presió Determinar las componentes de la fuerza requerida para mantener el cilindro en su posición, despreciando peso del mismo. *Sol.* 4690 kg hacia abajo, 6750 kg hacia la izquierda

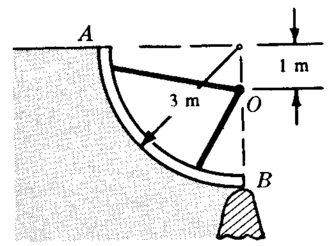
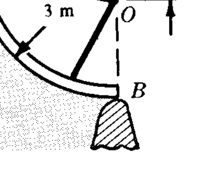



Fig. 2-23

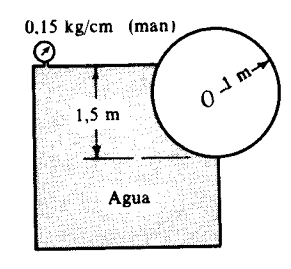


Fig. 2-24

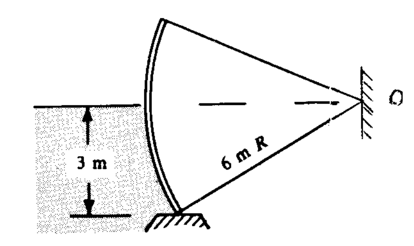


Fig. 2-25

33. Determinar las componentes horizontal y vertical, por metro de longitud, de la fuerza debida a la presión (agua sobre la compuerta del tipo Tainter mostrada en la Figura 2-25. *Sol.* 4500 kg y 1630 kg

34. Determinar la fuerza vertical que actúa sobre la bóveda semicilíndrica mostrada en la Fig. 2-26 cuando la pı sión manométrica leída en *A* es de 0,60 kg/cm². La bóveda tiene 2 m de longitud. *Sol.* 12.600 kg

35. Si la bóveda del Problema 34 es ahora hemisférica y del mismo diámetro, ¿cuál es el valor de la fuerza vertic sobre la misma? *Sol.* 6050 kg

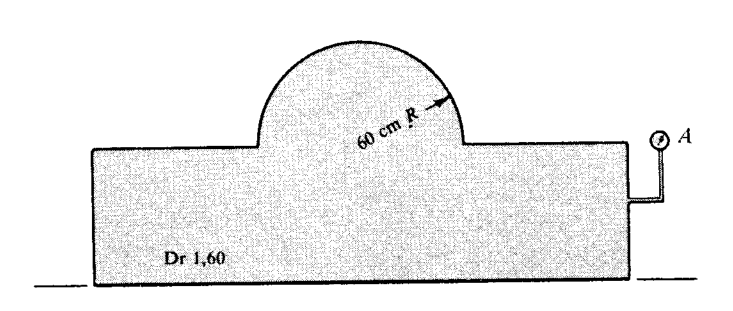


Fig. 2-26

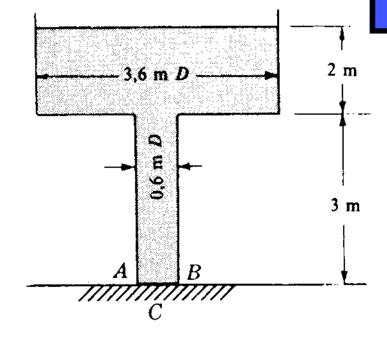


Fig. 2-27

36. Con referencia a la Fig. 2-27, determinar (*a*) la fuerza ejercida por el agua sobre la placa del fondo *AB* de la tubería de 60 cm de diámetro y (*b*) la fuerza total sobre el plano *C*.
Sol. 1410 kg, 21.200 kg

37. El cilindro mostrado en la Fig. 2-28 tiene 3 m de longitud. Si se supone que en *A* el ajuste no deja pasar el agua y que el cilindro no puede girar, ¿qué peso debe de tener el cilindro para impedir su movimiento hacia arriba?
Sol. 5490 kg

38. Una tubería de duelas de madera, de 1 m de diámetro interior, está zunchada con aros planos constituidos por bandas de acero de 10 cm de anchura y 18 mm de espesor. Para una tensión de trabajo admisible en el acero de 12 kg/mm² y una presión en el interior de la tubería de 12 kg/cm², determinar el espaciado entre aros.
Sol. 36 cm

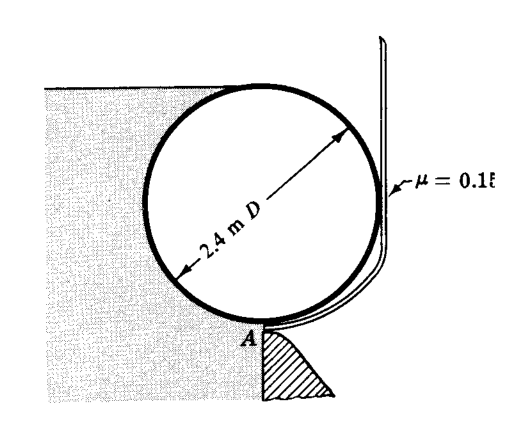


Fig. 2-28

39. En el muro de retención del agua del mar mostrado en la Fig. 2-29, ¿qué momento respecto de A, por metro de longitud del muro, se origina por la exclusiva acción de los 3 m de profundidad del agua ($w = 1025$ kg/m^3)?
Sol. 16.200 mkg de sentido contrario a las agujas de un reloj

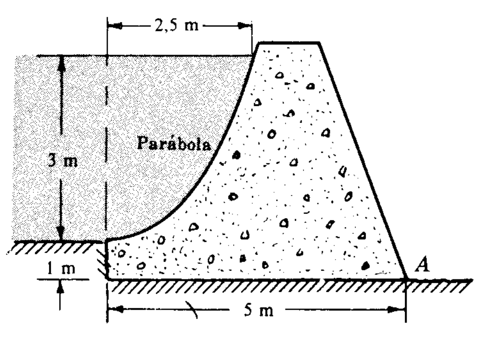


Fig. 2-29

Fig. 2-30

40. El depósito mostrado en la Fig. 2-30 tiene 3 m de longitud, y el fondo inclinado BC tiene 2,5 m de anchura. ¿Qué profundidad de mercurio dará lugar a un momento respecto de C, por la acción de los dos líquidos, igual a 14.000 mkg en el sentido de las agujas de un reloj? *Sol.* 63 cm

41. La compuerta de la Fig. 2-31 tiene 6 m de longitud. ¿Qué valores tienen las reacciones en el eje O debidas a la acción del agua? Comprobar que el par respecto de O es nulo. *Sol.* 12.000 kg, 33.300 kg

42. Con referencia a la Fig. 2-32, una placa plana con un eje de giro en C tiene una forma exterior dada por la ecuación $x^2 + 0{,}5y = 1$. ¿Cuál es la fuerza del aceite sobre la placa y cuál es el momento respecto a C debido a la acción del agua? *Sol.* 3800 kg, 5740 mkg

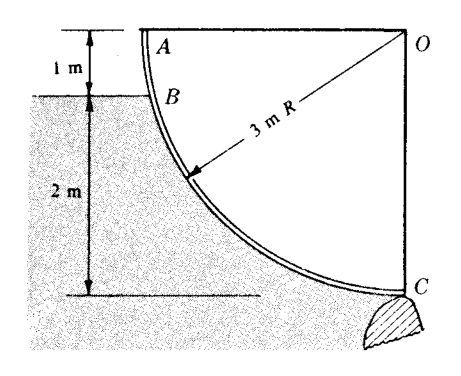


Fig. 2-31

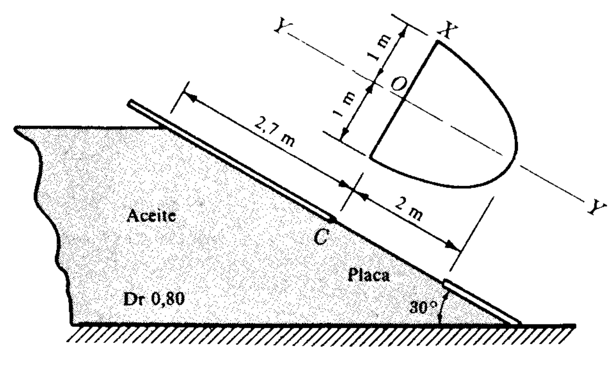
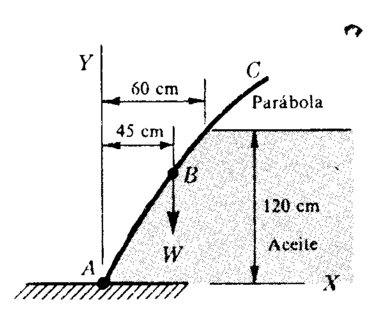
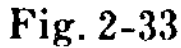


Fig. 2-32

43. En la Fig. 2-33 la compuerta ABC de forma parabólica puede girar alrededor de A y está sometida a la acción de un aceite de peso específico 800 kg/m^3. Si el centro de gravedad de la compuerta está en B, ¿qué peso debe de tener la compuerta, por metro de longitud (perpendicular al dibujo), para que esté en equilibrio? El vértice de la parábola es A. *Sol.* 590 kg/m

44. En la Fig. 2-34 la compuerta automática ABC pesa 3300 kg/m de longitud y su centro de gravedad está situado 180 cm a la derecha del eje de giro A. ¿Se abrirá la compuerta con la profundidad de agua que se muestra en la figura? *Sol.* Sí




Fig. 2-33

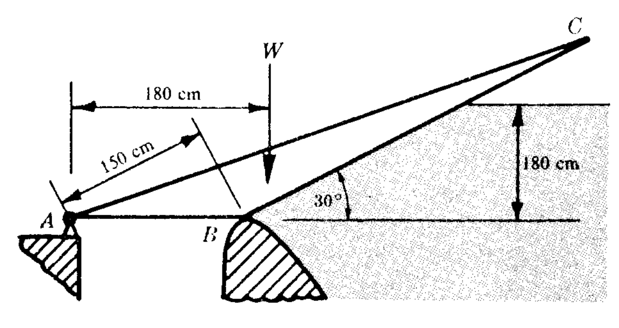


Fig. 2-34

Capítulo 3

Empuje y flotación

PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

El principio de Arquímedes viene siendo utilizado por el hombre desde hace unos 2200 años. E volumen de un sólido irregular puede determinarse midiendo la pérdida aparente de peso cuando se introduce completamente en un líquido de densidad relativa conocida. La densidad relativa de los líquidos puede determinarse por la profundidad de inmersión de un hidrómetro. Otras aplicaciones comprenden la teoría general de la flotación y problemas de ingeniería naval.

Todo cuerpo, sumergido total o parcialmente en un líquido, sufre un *empuje* vertical hacia arriba igual al peso del líquido desplazado. El punto en el que actúa la fuerza se llama centro de empuje. Coincide con el centro de gravedad del líquido desplazado.

ESTABILIDAD DE CUERPOS SUMERGIDOS Y FLOTANTES

Para la estabilidad de un cuerpo sumergido el centro de gravedad debe estar directamente debajo del centro del empuje (centro de gravedad del líquido desplazado). Si los dos puntos coinciden, el cuerpo sumergido está en equilibrio indiferente.

Para la estabilidad de cilindros y esferas flotantes el centro de gravedad del cuerpo debe estar por debajo del centro de empuje.

La estabilidad de otros cuerpos flotantes depende de si se desarrolla un momento adrizante cuando el centro de gravedad y el centro de empuje se desalinean de la vertical debido al desplazamiento del centro de empuje. El centro de empuje se desplaza porque cuando el objeto flotante se inclina, varía la forma del volumen de líquido desplazado y, por tanto, su centro de gravedad pasa a otra posición

Problemas resueltos

1. Una piedra pesa 54 kg en el aire y 24 kg cuando está sumergida en el agua. Calcular el volumen y la densidad relativa de la piedra.

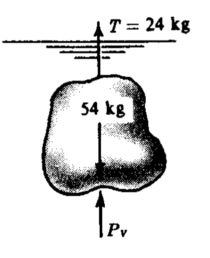


Fig. 3-1

Solución:

Todos los problemas en trabajos de ingeniería se analizan mucho mejor mediante el empleo del diagrama del cuerpo libre. Con referencia a la figura adjunta, se indica en ella el peso total de 54 kg que actúa hacia abajo, la tracción en la cuerda de unión a la balanza de 24 kg dirigida hacia arriba y el empuje P_V que actúa también hacia arriba. De

$$\Sigma Y = 0$$

se tiene $$54 - 24 - P_V = 0 \quad \text{y} \quad P_V = 30 \text{ kg}$$

Como el empuje = al peso del líquido desplazado,

$$24 \text{ kg} = 1000 \text{ kg/m}^3 \times v \qquad \text{y} \qquad v = 0{,}024 \text{ m}^3$$

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{peso de la piedra}}{\text{peso de un volumen igual de agua}} = \frac{54}{24} = 2{,}25.$$

2. Un objeto prismático de 20 cm de espesor por 20 cm de anchura y 40 cm de longitud se pesa en el agua a una profundidad de 50 cm, dando la medida 5,0 kg. ¿Cuánto pesa en el aire y cuál es su densidad relativa?

Solución:

Con referencia al diagrama del cuerpo libre de la Fig. 3-2, $\Sigma\, Y = 0$; de aquí

$$W - P_V - 5{,}0 = 0 \quad \text{o} \quad (1) \quad W = 5{,}0 + P_V$$

Empuje P_V = peso del líquido desplazado

$$= 1000(0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}4) = 16{,}0 \text{ kg.}$$

Por tanto, de (*1*), $W = 5 + 16 = 21$ kg y Dr $= 21/16 = 1{,}31$

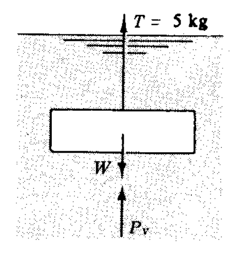


Fig. 3-2

3. Un hidrómetro pesa 2,20 g y su extremo superior es un vástago cilíndrico de 0,2800 cm de diámetro. ¿Cuál será la diferencia entre las longitudes de emergencia del vástago cuando flota en aceite de densidad relativa 0,780 y en alcohol de densidad relativa 0,821?

Solución:

Para la posición 1 de la Fig. 3-3 en el alcohol,

peso del hidrómetro = peso del líquido desplazado

$$0{,}0022 = 0821 \times 1000 \times v_1$$

de donde $v_1 = 0{,}00000268 \text{ m}^3$ (en alcohol).

Para la posición 2,

$$0{,}0022 = 0{,}780 \times 1000(v_1 + Ah)$$

$$= 0{,}780 \times 1000[0{,}00000268 + \tfrac{1}{4}\pi(0{,}28/100)^2 h]$$

de donde $h = 0{,}0228$ m $= 2{,}28$ cm.

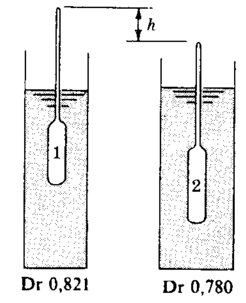


Fig. 3-3

4. Una pieza de madera de densidad relativa 0,651 es de sección cuadrada 7,50 cm de lado y 1,50 m de longitud. ¿Cuántos kilogramos de plomo de peso específico 11.200 kg/m³ deben unirse a uno de los extremos del listón de madera para que flote verticalmente con 30 cm fuera del agua?

Solución:

Peso total de madera y plomo = peso del agua desplazada

$$[0{,}651 \times 1000 \times 1{,}5(0{,}075)^2 + 11.200v] = 1000[(0{,}075)^2 \times 1{,}2 + v]$$

de donde $v = 0{,}0001232 \text{ m}^3$ y peso del plomo $= 11.200v = 11.200 \times 0{,}0001232 = 1{,}38$ kg.

5. ¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa 7,25 flotará sobre la superficie del mercurio, de densidad relativa 13,57, contenido en un recipiente?

Solución:

El diagrama del cuerpo libre indica que de $\Sigma\, Y = 0$, $W - P_V = 0$ o

peso del cuerpo = empuje (peso del mercurio desplazado)

$$7{,}25 \times 1000v = 13{,}57 \times 1000v'$$

y, por tanto, la relación de los volúmenes $v'/v = 7{,}25/13{,}57 = 0{,}535$.

De aquí la fracción del volumen sobre el mercurio $= 1 - 0{,}535 = 0{,}465$.

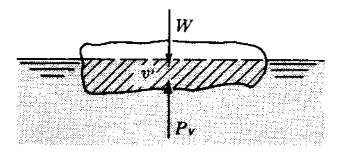


Fig. 3-4

6. Una gabarra rectangular, de 10 m por 4 m de base y 5 m de profundidad, pesa 54 toneladas y flota sobre agua dulce. (*a*) ¿Qué profundidad se sumerge? (*b*) Si el agua tiene una profundidad de 5 m, ¿qué peso de piedras debe cargarse en la gabarra para que ésta repose sobre el fondo?

Solución:

(*a*) Peso de la gabarra = peso del agua desplazada

$$54 \times 1000 = 1000(10 \times 4 \times Y) \qquad Y = 1{,}35 \text{ m sumergida}$$

(*b*) Peso de la gabarra más las piedras = peso del agua desplazada

$$54 \times 1000 + W_S = 1000(10 \times 4 \times 5) \qquad W_S = 146.000 \text{ kg de piedras}$$

7. Un bloque de madera flota en el agua sobresaliendo de la superficie 5 cm. Cuando se pone en glicerina, de densidad relativa 1,35, sobresalen 7,5 cm de la superficie del líquido. Determinar la densidad relativa de la madera.

Solución:

El peso total de la pieza es (*a*) $W = \text{Dr} \times 1000(A \times h)$, y los pesos del agua y la glicerina desplazados son, respectivamente, (*b*) $W_W = 1000(h - 0{,}05)$ y (*c*) $W_G = 1{,}35 \times 1000(h - 0{,}075)$.

Como cada uno de los pesos de líquidos desplazados es igual al peso del bloque, (*b*) = (*c*), o bien,

$$1000A(h - 0{,}05) = 1{,}35 \times 1000A(h - 0{,}075) \qquad h = 0{,}1464 \text{ m}$$

Como (*a*) = (*b*), $\qquad \text{Dr} \times 1000A \times 0{,}1464 = 1000 \times A(0{,}1464 - 0{,}05) \qquad \text{Dr} = 0{,}660$

8. ¿A qué profundidad se hundirá un tronco de 2,40 m de diámetro y 4,50 m de longitud, en agua dulce, si la densidad relativa de la madera es de 0,425?

Solución:

En la Fig. 3-5 se dibuja con el centro *O* del tronco sobre la superficie libre del agua, ya que su densidad relativa es menor de 0,500. Si la densidad relativa fuera 0,500 estaría sumergida la mitad del tronco.

Peso total del tronco = peso del líquido desplazado

sector − 2 triángulos

$$0{,}425 \times 1000 \times \pi 1{,}2^2 \times 4{,}5 = 1000 \times 4{,}5\left(\frac{2\theta}{360} 1{,}44\pi - 2 \times \tfrac{1}{2} \times 1{,}2 \text{ sen } \theta \times 1{,}2 \cos \theta\right)$$

Simplificando y sustituyendo $\frac{1}{2}$ sen 2θ por sen θ cos θ,

$$0{,}425\pi = \theta\pi/180 - \tfrac{1}{2} \text{ sen } 2\theta$$

Resolviendo por aproximaciones sucesivas:

Para $\theta = 85°$: $\quad 1{,}335 \overset{?}{=} 85\pi/180 - \frac{1}{2}(0{,}1737)$

$1{,}335 \neq 1{,}397$

Para $\theta = 83°$: $\quad 1{,}335 \overset{?}{=} 1{,}449 - \frac{1}{2}(0{,}242)$

$1{,}335 \neq 1{,}328$

El valor buscado está entre los dos ensayados.

Para $\theta = 83°10'$: $\quad 1{,}335 \overset{?}{=} 1{,}451 - \frac{1}{2}(0{,}236)$

$= 1{,}333$ (suficiente aproximado).

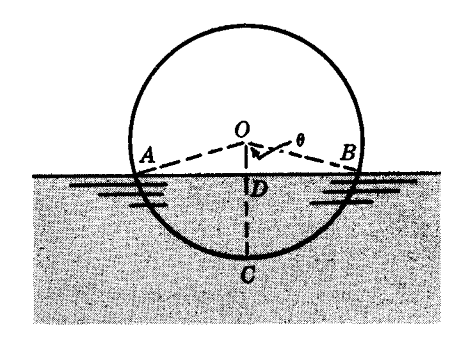


Fig. 3-5

La profundidad con que flota $DC = r - OD = 1{,}2 - 1{,}2 \cos 83°10'$

$= 1{,}2(1 - 0{,}119) = 1{,}057$ m.

9. (*a*) Despreciando el espesor de las paredes del depósito en la Fig. 3-6(*a*), si el depósito flota en la posición indicada, ¿cuál es su peso? (*b*) Si el depósito se mantiene de forma que su parte superior está 3 m por debajo de la superficie libre, ¿cuál es la fuerza que actúa sobre la parte interior de la base del depósito?

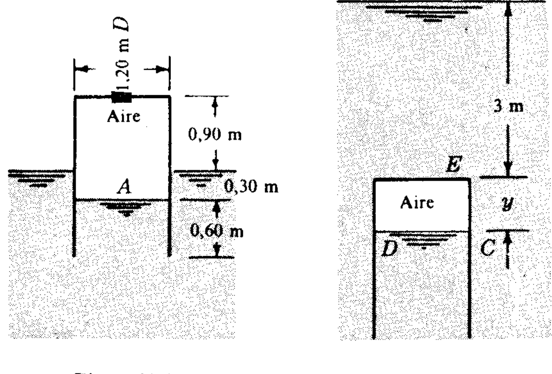


Fig. 3-6(*a*)　　Fig. 3-6(*b*)

Solución:

(*a*) Peso del depósito = peso del líquido desplazado
$= 1000\pi 0{,}6^2(0{,}30) = 339$ kg

(*b*) El espacio ocupado por el aire será menor en la nueva profundidad, según se muestra en la Figura 3-6(*b*). Suponiendo que la temperatura del aire es constante, se verificará para las posiciones (*a*) y (*b*),

$$p_A v_A = p_D v_D \text{ (hay que utilizar presiones absolutas)}$$
$$w(10{,}33 + 0{,}3)(1{,}2 \times \text{área}) = w(10{,}33 + 3 + y)(y \times \text{área})$$

de la que se deduce $y^2 + 13{,}33y - 12{,}75 = 0$ y como la raíz ha de ser positiva $y = 0{,}90$ m.

La presión en D = 3,90 m de agua (man) = presión en E. De aquí, la fuerza sobre el interior del extremo superior del cilindro es $w\,hA = 1000(3{,}9)(\pi 0{,}6^2) = 4410$ kg.

10. Un barco, con los costados verticales a la altura de la línea de flotación, pesa 4000 toneladas y en agua salada ($w = 1025$ kg/m^3) tiene un calado de 6,60 m. Al descargar 200 toneladas la profundidad de inmersión disminuye a 6,30 m. ¿Cuál será el calado d del barco en agua dulce?

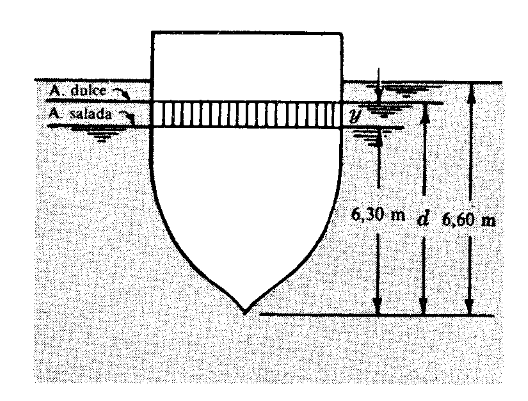


Fig. 3-7

Solución:

Como se desconoce la forma de la parte del barco sumergida en el agua, es preferible resolver el problema a partir de los volúmenes desplazados.

En 0,30 m disminuye el calado cuando se reduce el peso en 200 toneladas o bien

$$200 \times 1000 = wv = 1025(A \times 0{,}3)$$

donde v representa el volumen entre los calados 6,6 y 6,3 m y ($A \times 0{,}3$) representa el área de la sección recta a la altura de la línea de agua por 0,3, es decir, el mismo volumen v. Por tanto,

$$v = A \times 0{,}3 = 200(1000)/1025 = 195 \text{ m}^3/0{,}3 \text{ m de prof.} = 650 \text{ m}^3/\text{m de prof.}$$

Empuje $B = w \times$ volumen del líquido desplazado. Por tanto, B/w = volumen del líquido desplazado.

En la figura, el volumen con rayado vertical representa la diferencia entre los volúmenes desplazados en agua dulce y en agua salada. Esta diferencia puede expresarse en la forma $\left(\frac{3800 \times 1000}{1000} - \frac{3800 \times 1000}{1025}\right)$ y, por otra parte, es también igual a $650y$. Igualando estos valores, $y = 0{,}154$ m.

El calado $d = 6{,}3 + 0{,}154 = 6{,}454$ o bien 6,50 m.

11. Un barril que contiene agua pesa 128,5 kg. ¿Cuál será la lectura en una balanza si se mantiene sumergido verticalmente en el agua a una profundidad de 60 cm un listón de madera de 5 cm por 5 cm?

Solución:

A toda fuerza se opone otra fuerza de reacción igual y opuesta. El empuje vertical hacia arriba ejercido por

el agua sobre la cara inferior del listón de madera da lugar a la acción ejercida por dicha área de 5 cm por 5 cm sobre el agua hacia abajo y de igual módulo. Esta fuerza dará lugar a un aumento de la lectura en la balanza.

$P_V = 1000 \times 0{,}05 \times 0{,}05 \times 0{,}60 = 1{,}50$ kg. La lectura en la balanza $= 128{,}5 + 1{,}5 = 130{,}0$ kg.

12. Un bloque de madera de 1,80 m por 2,40 m por 3,00 m flota en un aceite de densidad relativa 0,751. Un par del sentido de las agujas de un reloj mantiene el bloque en la posición mostrada en la Figura 3-8. Determinar (*a*) el empuje que actúa sobre el bloque en esa posición, (*b*) el valor del par que actúa sobre el bloque y (*c*) la situación del metacentro en la posición indicada.

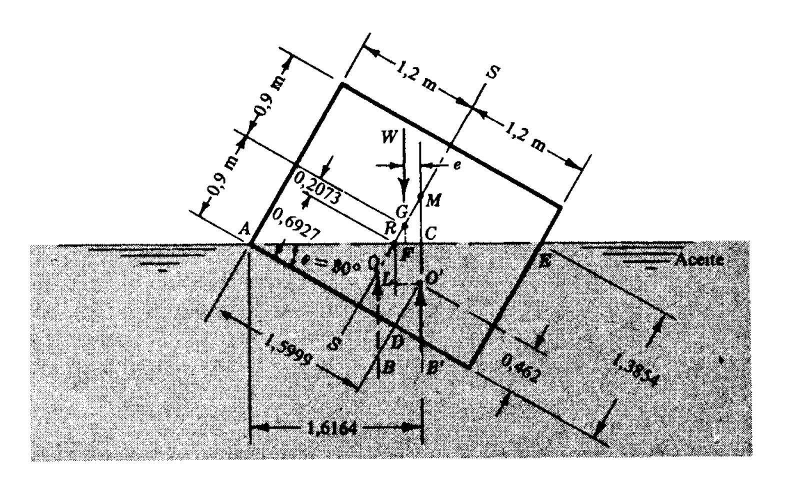


Fig. 3-8

Solución:

(*a*) Peso del bloque = peso del prisma triangular de aceite (o empuje)

$$W = B' = (0{,}751 \times 1000)(\tfrac{1}{2} \times 2{,}40 \times 1{,}3854 \times 3) = 3746 \text{ kg}$$

Por tanto, $B' = 3746$ kg que actúa hacia arriba a través del centro de gravedad O' del aceite desplazado. El centro de gravedad está situado a 1,5999 m de A y 0,4620 m de D, como se muestra en la figura.

$$AC = AR + RC = AR + LO' = 1{,}5999 \cos 30^\circ + 0{,}4620 \text{ sen } 30^\circ = 1{,}6164 \text{ m}$$

El empuje de 3746 kg actúa hacia arriba a través del centro de gravedad del aceite desplazado, que está situado a 1,62 m a la derecha de A.

(*b*) Un procedimiento para obtener el valor del par adrizante (que debe ser igual al valor del par exterior que lo mantiene en equilibrio) es el de encontrar la excentricidad e. Esta viene definida por la distancia entre las dos fuerzas W y B', iguales y paralelas, que dan lugar al par adrizante o restaurador.

$$e = FC = AC - AF = 1{,}6164 - AF = 1{,}6164 - 1{,}4889 = 0{,}1275 \text{ m}$$

ya que $\quad AF = AR + RF = AR + GR \text{ sen } 30^\circ = 1{,}3854 + 0{,}2073(\tfrac{1}{2}) = 1{,}4889$ m

El par We o $B'e = 3746 \times 0{,}1275 = 478$ mkg. Así, el momento o par para mantener el bloque en la posición mostrada es de 478 mkg del sentido de las agujas de un reloj.

(*c*) El punto de intersección de la recta de acción del empuje con el eje de simetría S-S se llama metacentro (punto M de la figura). Si el metacentro está situado sobre el centro de gravedad del objeto flotante, el peso del objeto y el empuje dan lugar a un par restaurador o adrizante para posiciones inclinadas.

La distancia metacéntrica $MG = MR - GR = \dfrac{RC}{\text{sen } 30^\circ} - GR = \dfrac{0{,}231}{0{,}5} - 0{,}2073 = 0{,}255$ m.

Se observará que la distancia MG multiplicada por el seno del ángulo θ es igual a la excentricidad e (calculada anteriormente por otro procedimiento).

En ingeniería naval, un ángulo máximo de 10° es el que se toma como límite de escora para el que la distancia metacéntrica MG tiene que mantenerse constante. Existen fórmulas para situar exactamente la posición del metacentro, pero éstas caen fuera del objeto de una introducción a la mecánica de los fluidos.

Problemas propuestos

13. Un objeto pesa 30 kg en el aire y 19 kg en el agua. Determinar su volumen y su densidad relativa. *Sol.* $1{,}1 \times 10^{-2}$ m^3, 2,73

14. Un cuerpo pesa 30 kg en el aire y 19 kg sumergido en un aceite de densidad relativa 0,750. Determinar su volumen y su densidad relativa. *Sol.* $1{,}47 \times 10^{-2}$ m^3, 2,04

15. Si el peso específico del aluminio es 2700 kg/m^3, ¿cuánto pesará una esfera de 30 cm de diámetro sumergida en agua? ¿Cuánto si está sumergida en un aceite de densidad relativa 0,750? *Sol.* 24,0 kg, 27,5 kg

16. Un cubo de aluminio de 15 cm de arista pesa 5,5 kg sumergido en el agua. ¿Qué peso aparente tendrá al sumergirlo en un líquido de densidad relativa 1,25? *Sol.* 4,66 kg

17. Un bloque de piedra pesa 60 kg y al introducirlo en un depósito cuadrado de 60 cm de lado, lleno de agua, el bloque pesa 33 kg. ¿Qué altura se elevará el agua en el depósito? *Sol.* 7,5 cm

18. Un cilindro hueco de 1 m de diámetro y 1,5 m de altura pesa 400 kg. (*a*) ¿Cuántos kilogramos de plomo, de peso específico 11.200 kg/m^3, deben unirse al fondo por su parte exterior para que el cilindro flote verticalmente con 1 m del mismo sumergido? (*b*) ¿Cuántos kilogramos se necesitarán si se colocan en el interior del cilindro? *Sol.* 423,2 kg, 385,4 kg

19. Un hidrómetro pesa 11 g y el área de la sección recta de su vástago es 0,16 cm^2. ¿Cuál es la diferencia de alturas sumergidas en dos líquidos de densidades relativas 1,25 y 0,90, respectivamente? *Sol.* 21,4 cm

20. ¿Qué longitud debe de tener un tablón de madera de 7,5 cm por 30 cm de sección y densidad relativa 0,50 en agua salada para soportar encima a un niño que pesa 45 kg? *Sol.* 3,81 m

21. Un cuerpo que tiene un volumen de 170 dm^3 requiere una fuerza de 27 kg para mantenerlo sumergido en el agua. Si para mantenerlo sumergido en otro líquido se necesita una fuerza de 16 kg, ¿cuál es la densidad relativa de este último líquido? *Sol.* 0,935

22. Una gabarra de 3 m de profundidad tiene una sección recta trapezoidal de bases superior e inferior 9 m y 6 m, respectivamente. La gabarra tiene 15 m de longitud y las caras de popa y proa son verticales. Determinar (*a*) su peso si la altura sumergida en agua es de 1,8 m y (*b*) la profundidad de calado si la gabarra transporta 86 toneladas de piedra. *Sol.* 186.300 kg, 2,50 m

23. Una esfera de 120 cm de diámetro flota en agua salada (w = 1025 kg/m^3), la mitad de ella sumergida. ¿Qué peso mínimo de cemento (w = 2400 kg/m^3), utilizado como anclaje, será necesario para sumergir completamente la esfera? *Sol.* 810 kg

24. Un iceberg de peso específico 912 kg/m^3 flota en el océano (1025 kg/m^3), emergiendo del agua un volumen de 600 m^3. ¿Cuál es el volumen total del iceberg? *Sol.* 5440 m^3

25. Un globo vacío y su equipo pesan 50 kg. Al inflarlo con un gas de peso específico 0,553 kg/m^3 el globo adopta forma esférica de 6 m de diámetro. ¿Cuál es la máxima carga que puede elevar el globo, suponiendo un peso específico del aire igual a 1,230 kg/m^3? *Sol.* 26,5 kg.

26. Un flotador cúbico de 120 cm de lado pesa 180 kg y se ancla mediante un bloque de cemento que pesa 680 kg en el aire. La boya está sumergida 23 cm cuando la cadena que la une al bloque de cemento está tensa. ¿Qué subida del nivel de agua hará separarse del fondo al bloque de cemento? El peso específico del cemento es de 2400 kg/m^3. *Sol.* 17,10 cm

27. Una gabarra, de forma paralelepipédica rectangular de dimensiones 6 m de anchura, 18 m de longitud y 3 m de altura, pesa 160.000 kg. Flota en agua salada (w = 1025 kg/m^3) y el centro de gravedad cargado está 1,35 m por debajo de la parte superior de la gabarra. (*a*) Situar el centro de empuje cuando flota horizontalmente en agua tranquila, (*b*) cuando ha girado 10° alrededor del eje longitudinal y (*c*) determinar el metacentro para la inclinación de 10°. *Sol.* 0,722 m del fondo y sobre el eje, 0,362 m del eje, 1,152 m sobre el *CG*

28. Un cubo de aluminio de 15 cm de lado está suspendido de un resorte. La mitad del cubo está sumergido en aceite de densidad relativa 0,80 y la otra mitad en agua. Determinar la fuerza de tracción en el resorte si el peso específico del aluminio es de 2640 kg/m^3. *Sol.* 5,87 kg

29. Si el cubo del problema anterior estuviera sumergido la mitad en aceite y la otra mitad en el aire, ¿qué valor tendría la fuerza de tracción sobre el resorte? *Sol.* 7,56 kg

Capítulo 4

Traslación y rotación de masas líquidas

INTRODUCCION

Un fluido puede estar animado de un movimiento de traslación o rotación, sometido a una aceleración constante, sin movimiento relativo entre sus partículas. Esta es una de las condiciones de equilibrio relativo y el fluido está libre de tensiones cortantes. En general no existirá movimiento entre el fluido y el recipiente que lo contiene. Son aplicables aún los principios de la estática, modificado para tener en cuenta los efectos de la aceleración.

MOVIMIENTO HORIZONTAL

En el caso de un movimiento horizontal la superficie libre del líquido adopta una posición inclinada y plana. La pendiente del plano se determina mediante

$$\operatorname{tg}\,\theta = \frac{a \text{ (aceleración lineal del recipiente, m/seg}^2\text{)}}{g \text{ (aceleración de la gravedad, m/seg}^2\text{)}}$$

La deducción de la ecuación general para la traslación se da en el Problema 4.

MOVIMIENTO VERTICAL

Para el movimiento vertical la presión (kg/m^2) en un punto cualquiera del líquido viene dada por

$$p = wh\left(1 \pm \frac{a}{g}\right)$$

en la que el signo positivo se aplica cuando la aceleración es hacia arriba y el negativo cuando la aceleración constante es hacia abajo.

ROTACION DE MASAS FLUIDAS. RECIPIENTES ABIERTOS

La forma de la superficie libre de un líquido que gira con el recipiente que lo contiene es un paraboloide de revolución. Cualquier plano vertical que pasa por el eje de revolución corta a la superficie libre según una parábola. La ecuación de esta parábola es

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$$

donde x e y son las coordenadas, en metros, de un punto genérico de la superficie, medidas con el origen en el vértice situado en el eje de revolución, y ω la velocidad angular constante, medida en radianes por segundo. La demostración de esta fórmula se da en el Problema 7.

ROTACION DE MASAS FLUIDAS. RECIPIENTES CERRADOS

En los recipientes cerrados aumenta la presión al girar los recipientes. (Véase también Capítu-

lo 12.) El aumento de presión entre un punto situado en el eje y otro a una distancia de x metros del eje, en el mismo plano horizontal, es

$$p\ (\text{kg/m}^2) = w\frac{\omega^2}{2g}x^2$$

y el aumento de la altura de presión (m) será

$$\frac{p}{w} = y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$$

que es una ecuación análoga a la aplicable a recipientes abiertos en rotación. Como la velocidad lineal $V = x\omega$, el término $x^2\omega^2/2g = V^2/2g$ da la altura de velocidad, en m, como se verá más adelante.

Problemas resueltos

1. Un depósito rectangular de 8 m de longitud, 3 m de profundidad y 2 m de anchura contiene 1,5 m de agua. Si está sometido a una aceleración horizontal en la dirección de su longitud de 2,45 m/seg², (*a*) calcular la fuerza total sobre cada uno de los extremos del depósito debido a la acción del agua y (*b*) demostrar que la diferencia entre estas fuerzas es igual a la fuerza no equilibrada, necesaria para acelerar la masa líquida. Referirse a la Figura 4-1.

Solución:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{aceleración lineal}}{\text{aceleración de la gravedad}} = \frac{2{,}45}{9{,}80} = 0{,}250 \quad \text{y} \quad \theta = 14°2'$$

A partir de la figura, la profundidad d en el extremo de menor profundidad es $d = 1{,}5 - y = 1{,}5 - 4\ \text{tg}\ 14°2' = 0{,}500$ m, y en el extremo más profundo será 2,50 m. Por tanto,

$$P_{AB} = wh_{cg}A = 1000(2{,}50/2)(2{,}50 \times 2) = 6250\ \text{kg}$$
$$P_{CD} = wh_{cg}A = 1000(0{,}500/2)(0{,}500 \times 2) = 250\ \text{kg}$$

(*b*) Fuerza necesaria = masa del agua × aceleración lineal $= \dfrac{8 \times 2 \times 1{,}5 \times 1000}{9{,}80} \times 2{,}45 = 6000$ kg,

y $P_{AB} - P_{CD} = 6250 - 250 = 6000$ kg, que coincide con el valor anterior.

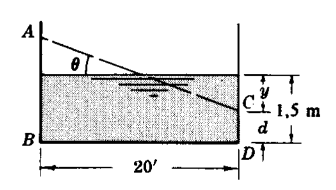


Fig. 4-1

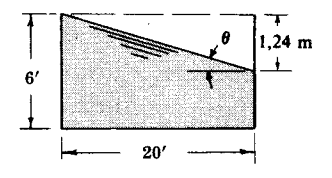


Fig. 4-2

2. Si el depósito del Problema 1 se llena de agua y se acelera en la dirección de su longitud a 1,52 m/seg², ¿cuántos litros de agua se verterán del depósito? Referirse a la Figura 4-2.

Solución:

Pendiente de la superficie = tg $\theta = 1{,}52/9{,}8 = 0{,}155$, y la diferencia de niveles entre los extremos de la superficie = 8 tg $\theta = 1{,}24$ m.

Volumen derramado = 2 × sección recta triangular mostrada en la Figura 4-2
$= 2(\frac{1}{2} \times 8 \times 1{,}24) = 9{,}92\ \text{m}^3 = 9920$ l.

3. Un depósito de base cuadrada de 1,50 m de lado contiene 1 m de agua. ¿Qué altura deben de tener sus lados para que no se derrame agua al someterlo a una aceleración de 3,66 m/seg^2 en dirección paralela a un par de lados?

Solución:

Pendiente de la superficie = tg θ = 3,66/9,8 = 0,373.
Elevación (o descenso) de la superficie = 0,75 tg θ = 0,75 × 0,373 = 0,28 m.
El depósito debe tener al menos 1 + 0,28 = 1,28 m de profundidad.

4. Un recipiente que contiene agua se acelera paralelamente y hacia arriba de un plano inclinado 30°, con el horizontal a 3,66 m/seg^2. ¿Qué ángulo formará la superficie libre con la horizontal?

Solución:

Con referencia a la figura, las fuerzas que actúan sobre cada partícula dM son su peso W, vertical y dirigido hacia abajo, y la fuerza P ejercida por el resto de partículas que la rodean. Esta fuerza P es normal a la superficie, ya que no actúan fuerzas cortantes. La fuerza resultante F_x (debida a W y P) sobre cada partícula de líquido debe ser paralela al plano XX, que forma un ángulo de α = 30° con el horizontal, y estar dirigida hacia arriba, de forma que dé lugar a la aceleración común a_x. La Fig. 4-3(b) muestra el diagrama vectorial correspondiente. Ahora pueden establecerse las relaciones siguientes:

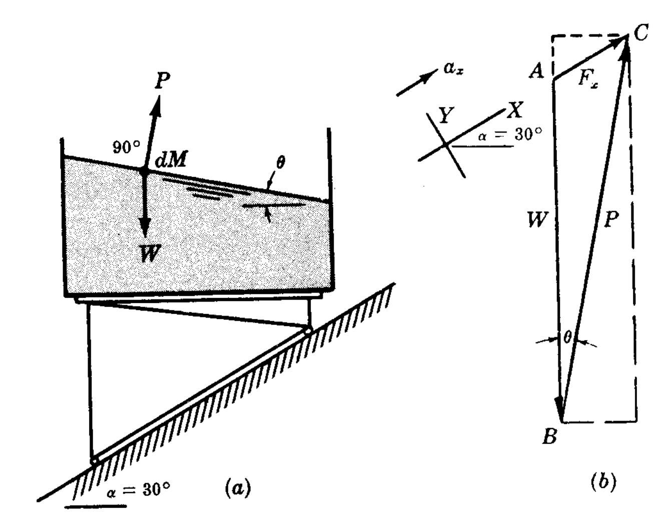


Fig. 4-3

$$(1)\quad F_x = \frac{W}{g}a_x \quad \text{o} \quad \frac{F_x}{W} = \frac{a_x}{g}$$

$$(2)\quad F_x \operatorname{sen} \alpha = P \cos \theta - W$$

$$(3)\quad F_x \cos \alpha = P \operatorname{sen} \theta \qquad \text{del diagrama vectorial}$$

Multiplicando (2) por sen θ y (3) por cos θ y operando, se llega a

$$F_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta + W \operatorname{sen} \theta - F_x \cos \alpha \cos \theta = 0 \quad \text{y} \quad \frac{F_x}{W} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \alpha \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta}$$

Sustituyendo en (1) y simplificando,

$$(4)\quad \frac{a_x}{g} = \frac{1}{\cos \alpha \operatorname{ctg} \theta - \operatorname{sen} \alpha} \quad \text{de la que por ser } \alpha = 30°$$

$$(A)\quad \operatorname{ctg} \theta = \operatorname{tg} 30° + \frac{g}{a_x \cos 30°} = 0{,}577 + \frac{9{,}80}{3{,}66 \times 0{,}866} = 3{,}68 \quad \text{y} \quad \theta = 15°12'$$

Nota: Para un plano horizontal, el ángulo α es igual a 0° y la ecuación (4) se transforma en a/g = tg θ, que es la ecuación dada para el movimiento con aceleración horizontal. Para una aceleración paralela al plano, pero dirigida hacia abajo, la tg 30° de la ecuación (A) lleva un signo menos delante.

5. Un depósito cúbico está lleno con 1,50 m de aceite de Dr 0,752. Determinar la fuerza que actúa sobre uno de los lados del depósito (a) cuando se somete a una aceleración vertical y dirigida hacia arriba de 4,90 m/seg^2 y (b) cuando la aceleración de 4,90 m/seg^2 es vertical y dirigida hacia abajo.

Solución:

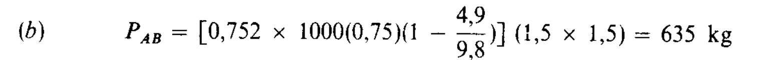
(a) La Fig. 4-4 muestra la distribución de presiones sobre el lado vertical AB. En B el valor de la presión en kg/m^2 es

$$p_B = wh(1 + \frac{a}{g}) = 0{,}752 \times 1000(1{,}5)(1 + \frac{4{,}9}{9{,}8}) = 1692 \text{ kg/m}^2$$

Fuerza P_{AB} = área del diagrama de carga × 1,5 m de longitud
$= (\frac{1}{2} \times 1692 \times 1{,}5)(1{,}5) = 1900$ kg

Otra forma de hallarla sería

$$P_{AB} = wh_{cg}A = p_{cg}A = [0{,}752 \times 1000(0{,}75)(1 + \frac{4{,}9}{9{,}8})]\ (1{,}5 \times 1{,}5) = 1900 \text{ kg}$$



(*b*) $$P_{AB} = [0{,}752 \times 1000(0{,}75)(1 - \frac{4{,}9}{9{,}8})]\ (1{,}5 \times 1{,}5) = 635 \text{ kg}$$

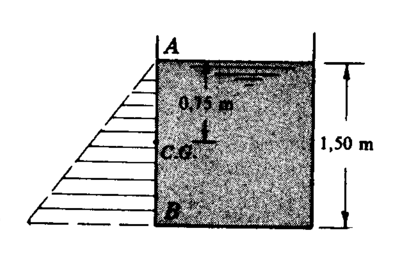


Fig. 4-4

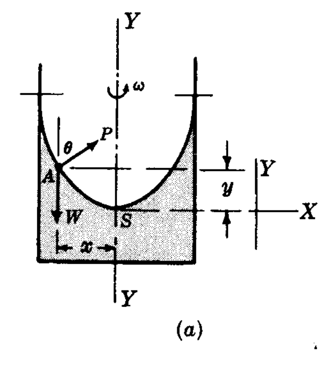
6. Determinar la presión en el fondo del depósito del Problema 5 cuando está sometido a una aceleración vertical hacia abajo de 9,80 m/seg².

Solución:

$$p_B = 0{,}752 \times 1000(1{,}5)(1 - 9{,}8/9{,}8) = 0 \text{ kg/m}^2$$

De aquí, para una masa líquida en caída libre, la presión en el interior de su masa, en cualquier punto, es nula, es decir, igual a la presión atmosférica de los alrededores. Esta conclusión es importante al considerar corrientes de agua que caen libremente a través de la atmósfera.

7. Un recipiente abierto, parcialmente lleno de un líquido, gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular constante. Determinar la ecuación de la superficie libre del líquido cuando éste haya adquirido la velocidad angular del recipiente.



(*a*)

A F C
W P P cos θ
θ
B P sen θ

(*b*)

Fig. 4-5

Solución:

En la Fig. 4-5(*a*) se representa una sección del recipiente sometido a rotación y una partícula genérica *A* situada a una distancia x del eje de rotación. Las fuerzas que actúan sobre la masa *A* son su peso *W*, vertical y dirigido hacia abajo, y *P* que es normal a la superficie libre del líquido, ya que no existen tensiones cortantes. La aceleración de la masa *A* es $x\omega^2$, dirigida hacia el eje de rotación. La resultante de las fuerzas *W* y *P* debe actuar en la misma dirección que esta aceleración, como se muestra en la Figura 4-5(*b*).

Del segundo principio de Newton, $F_x = Ma_x$ o (*1*) $P \text{ sen } \theta = \frac{W}{g} x\omega^2$

De $\Sigma Y = 0$ (*2*) $P \cos \theta = W$

Dividiendo (*1*) por (*2*), (*3*) $\text{tg } \theta = \frac{x\omega^2}{g}$

Ahora bien, θ es también el ángulo entre el eje X y la tangente en A a la curva, Fig. 4-5*a*. La pendiente de esta tangente es tg θ o bien dy/dx. Sustituyendo este valor en (*3*)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\omega^2}{g} \quad \text{de la cual, por integración,} \quad y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C_1$$

Para calcular la constante de integración C_1: Cuando $x = 0$, $y = 0$ debe ser $C_1 = 0$.

8. Un depósito cilíndrico abierto, de 2 m de altura y 1 m de diámetro, contiene 1,5 m de agua. Si el cilindro gira alrededor de su eje geométrico, (*a*) ¿qué velocidad angular se puede alcanzar sin que se derrame nada de agua? (*b*) ¿Cuál es la presión en el fondo del depósito en *C* y *D* cuando $\omega = 6{,}00$ rad/seg?

Solución:

(*a*) Volumen del paraboloide de revolución = $\frac{1}{2}$(volumen del cilindro circunscrito) = $\frac{1}{2}[\frac{1}{4}\pi 1^2(0{,}5 + y_1)]$

Si no se derrama líquido, este volumen ha de ser igual al volumen sobre el nivel original del agua *A-A*, es decir,

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}\pi 1^2(0{,}5 + y_1)] = \tfrac{1}{4}\pi 1^2(0{,}5)$$

e $y_1 = 0{,}5$ m.

Para generalizar, el punto de la superficie libre en el eje de rotación desciende una altura igual a la elevación que sufren los puntos del líquido en contacto con las paredes del recipiente.

A partir de esta información, las coordenadas *x* e *y* de los puntos *B* son, respectivamente, 0,50 y 1,00 m, tomando el origen en *S*. Por tanto,

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$$

$$1{,}00 = \frac{\omega^2}{2 \times 9{,}8}(0{,}50)^2$$

de donde, $\omega = 8{,}86$ rad/seg.

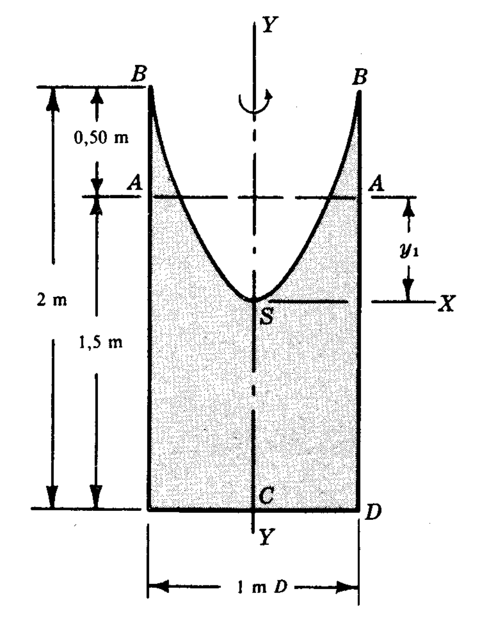


Fig. 4-6

(*b*) Para $\omega = 6{,}00$ rad/seg,

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 = \frac{(6)^2}{2(9{,}8)}(0{,}5)^2 = 0{,}458 \text{ m de } S$$

El origen *S* cae $\frac{1}{2}y = 0{,}229$ m y *S*, por tanto, está a $1{,}50 - 0{,}229 = 1{,}271$ m del fondo del depósito. En las paredes del depósito la profundidad $= 1{,}271 + 0{,}458 = 1{,}729$ m (o bien $1{,}50 + 0{,}229 = 1{,}729$ m).

En *C*, $p_C = wh = 1000 \times 1{,}271 = 1271$ kg/m²

En *D*, $p_D = wh = 1000 \times 1{,}729 = 1729$ kg/m²

9. Considérese el depósito del Problema 8 cerrado y con el aire sobre la superficie libre a una presión de 1,09 kg/cm². Cuando la velocidad angular es de 12,0 rad/seg, ¿cuáles son las presiones, en kg/cm², en los puntos *C* y *D* de la Figura 4-7?

Solución:

Como no hay variación de volumen en el aire interior al recipiente,

volumen sobre el nivel *A-A* = volumen del paraboloide

o bien (*1*) $\frac{1}{4}\pi 1^2 \times 0{,}50 = \frac{1}{2}\pi x_2^2 y_2$

Además (*2*) $y_2 = \dfrac{(12{,}0)^2}{2(9{,}8)}x_2^2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas (*1*) y (*2*), $x_2^4 = 0{,}034$. De donde $x_2 = 0{,}43$ m e $y_2 = 1{,}35$ m.

A partir de la figura, *S* está situada a $2{,}00 - 1{,}35 = 0{,}65$ m sobre *C*. Por tanto,

$$p_C' = 1{,}09 + wh/10^4 = 1{,}09 + 1000(0{,}65)/10^4 = 1{,}155 \text{ kg/cm}^2$$

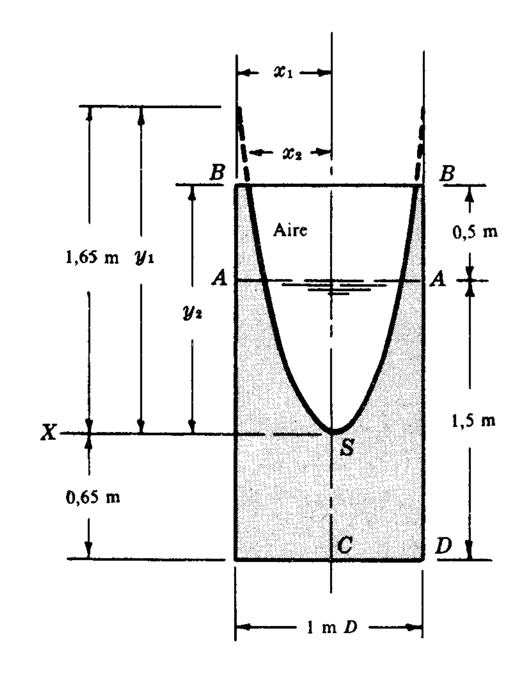


Fig. 4-7

Para calcular la presión en D, la altura de presión es $y_1 = \frac{(12,0)^2}{2 \times 9,8}(0,5)^2 = 1,65$ m sobre S y

$$p_D' = 1000(1,65 + 0,65)/10^4 + 1,09 = 1,320 \text{ kg/cm}^2$$

10. (*a*) ¿A qué velocidad debe girar el depósito del Problema 9 para que el centro del fondo tenga una profundidad de agua igual a cero? (*b*) Si la pared lateral del depósito tiene un espesor de 6 mm, ¿cuál será la tensión que soporta a la altura del fondo?

Solución:

(*a*) El origen S coincidirá ahora con el punto C de la Figura 4-7.

Volumen sobre la superficie del líquido = volumen del paraboloide

o bien (*1*) $\frac{1}{4}\pi 1^2 \times 0,50 = \frac{1}{2}\pi x_2^2(2,00)$

Además (*2*) $y_2 = 2,00 = \frac{\omega^2}{2 \times 9,8} x_2^2$

De (*1*) y (*2*) se obtiene $\omega^2 = 313,6$ y $\omega = 17,7$ rad/seg.

(*b*) $p_D' = 1,09 + \frac{wh}{10^4}$, donde $h = y_1 = \frac{(17,7)^2(0,5)^2}{2 \times 9,8} = 4,0$ m,

$= 1,09 + \frac{1000 \times 4}{10^4} = 1,49$ kg/cm². La tensión en $D = \sigma_D = \frac{p'r}{t} = \frac{1,49 \times 50}{0,6} = 124$ kg/cm².

11. Un depósito cilíndrico cerrado de 2 m de altura y 1 m de diámetro contiene 1,50 m de agua. Cuando gire a una velocidad angular constante de 20,0 rad/seg, ¿qué área del fondo quedará al descubierto?

Solución:

Con el fin de determinar la parábola dibujada en la figura adjunta hay que determinar primero el valor de y_3. Ahora bien,

$$y_3 = \frac{(20)^2}{2 \times 9,8}(0,50)^2 = 5,10 \text{ m}$$

con lo que puede dibujarse la superficie del agua, mostrando que S está por debajo del fondo del depósito. Ahora,

(*1*) $y_1 = \frac{(20)^2}{2 \times 9,8} x_1^2$

(*2*) $y_2 = 2 + y_1 = \frac{(20)^2}{2 \times 9,8} x_2^2$, y como el volumen del aire es constante,

(*3*) $\frac{1}{4}\pi 1^2 \times 0,50 =$ volumen (paraboloide SAB − paraboloide SCD)
$= \frac{1}{2}\pi x_2^2 y_2 - \frac{1}{2}\pi x_1^2 y_1$.

Sustituyendo los valores de (*1*) y (*2*) y despejando,

$$x_1^2 = 0,0136 \quad \text{y} \quad x_1 = 0,1166 \text{ m}.$$

De donde área descubierta $= \pi(0,1166)^2 = 0,0428$ m².

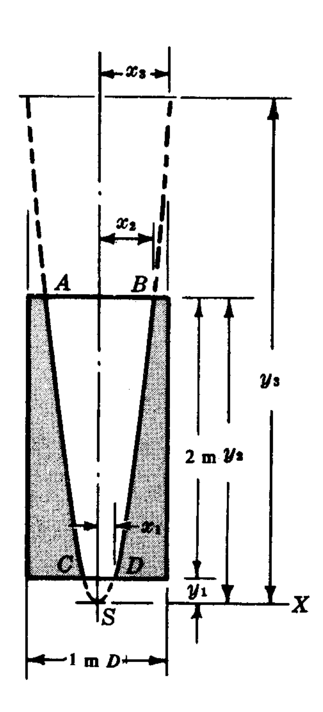


Fig. 4-8

12. Un cilindro cerrado de 1,80 m de diámetro y 2,70 m de altura está completamente lleno de glicerina, Dr = 1,60, bajo una presión en el extremo superior de 2,50 kg/cm². Las chapas de que está formado el cilindro tienen 13 mm de espesor y son de acero con una tensión de trabajo admisible de 850 kg/cm². ¿A qué velocidad máxima, en rpm, puede girar el cilindro?

Solución:

A partir de las especificaciones del cilindro y de la fórmula que da la tensión circunferencial $\sigma = p'r/t$,

$$p'_A = \sigma t/r = 850(1,3)/90 = 12,30 \text{ kg/cm}^2$$

Además, $p'_A = \Sigma$ presiones (2,50 impuesta + debida a los 2,70 m de glicerina + debida a la rotación)

o bien $$12,30 = 2,50 + \frac{1,60 \times 1000 \times 2,70}{10^4} + \frac{\omega^2}{2 \times 9,8} \times 0,9^2 \times \frac{1,60 \times 1000}{10^4} \quad \text{kg/cm}^2$$

Despejando, $\omega = 37,58$ rad/seg o bien 360 rpm.

Las condiciones de presión se representan gráficamente, aunque no a escala, en la Fig. 4-9. La horizontal *RST* indica la altura de presión de 15,6 m de la glicerina, antes de la rotación, en la parte superior del depósito. La curva que da la distribución parabólica de presiones con vértice en *S* es producida por la velocidad angular constante de 37,58 rad/seg. Si el recipiente estuviese lleno, pero sin presión, el vértice *S* estaría situado en la parte superior e interior al recipiente.

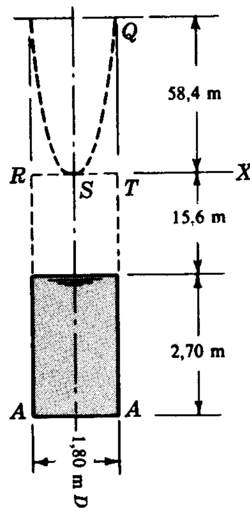


Fig. 4-9

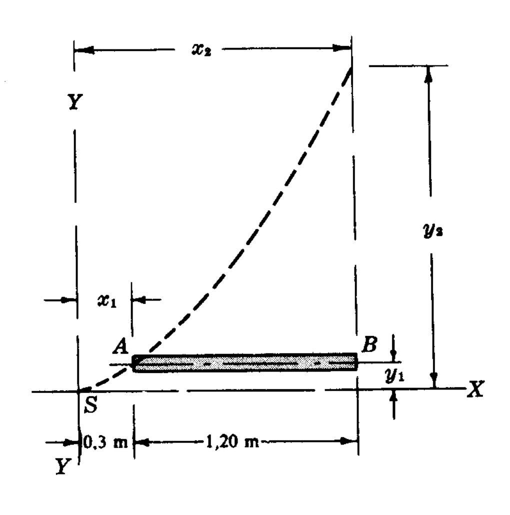


Fig. 4-10

13. Un tubo de 7,50 cm de diámetro y 1,20 m de longitud se llena con un aceite de Dr 0,822 y a continuación se cierra en sus dos extremos. Puesto en posición horizontal, se le hace girar a 27,5 rad/seg alrededor de un eje que dista 30 cm de uno de los extremos. ¿Qué presión se desarrollará en el extremo del tubo más alejado del eje, medida en kg/cm²?

Solución:

Como se hizo notar anteriormente, la presión aumenta a lo largo de la longitud *AB* en la Fig. 4-10 por la rotación. Para algún valor de la velocidad de giro el aumento de la presión tiende a comprimir el elemento de líquido, haciendo disminuir la presión en *A*. Como los líquidos son prácticamente incompresibles, la rotación ni hará aumentar ni disminuir la presión en *A*. Entre *A* y *B* la presión aumentará proporcionalmente al cuadrado de la distancia al eje *YY*.

Para calcular la presión en *B*:

$$(1)\quad y_1 = \frac{(27,5)^2}{2g} \times 0,3^2 = 3,47 \text{ m} \qquad (2)\quad y_2 = \frac{(27,5)^2}{2g} \times 1,5^2 = 86,8 \text{ m}$$

y $$p'_B = 0,822(1000)(86,8 - 3,47)/10^4 = 6,85 \text{ kg/cm}^2$$

S

I

Problemas propuestos

14. Un recipiente parcialmente lleno de agua está sometido horizontalmente a una aceleración constante. La inclinación de la superficie libre es de 30°. ¿A qué aceleración está sometido el recipiente? *Sol.* 5,66 m/seg^2

15. Un depósito abierto de sección cuadrada de 1,80 m de lado pesa 350 kg y contiene 90 cm de agua. Está sometido a la acción de una fuerza no equilibrada de 1060 kg, paralela a uno de los lados. ¿Cuál debe ser la altura de las paredes del depósito para que no se derrame el agua? ¿Qué valor tiene la fuerza que actúa sobre la pared donde la profundidad es mayor? *Sol.* 1,192 m, 1280 kg

16. Un depósito abierto de 9,00 m de longitud, 1,20 m de anchura y 1,20 m de profundidad está lleno con 1,00 m de aceite de Dr = 0,822. Se acelera en la dirección de su longitud uniformemente desde el reposo hasta una velocidad de 14 m/seg. ¿Cuál es el intervalo de tiempo mínimo para acelerar el depósito hasta dicha velocidad sin que se derrame el líquido? *Sol.* 32,1 seg

17. Un depósito rectangular abierto de 1,50 m de anchura, 3,00 m de longitud y 1,80 m de profundidad, que contiene 1,20 m de agua, se acelera horizontalmente, paralelo a su longitud, a 4,90 m/seg^2. ¿Qué volumen de agua se derrama? *Sol.* 0,675 m^3

18. ¿A qué aceleración debe someterse el depósito del problema anterior para que sea nula la profundidad en la arista anterior? *Sol.* 5,88 m/seg^2

19. Un depósito abierto, que contiene agua, está sometido a una aceleración de 4,90 m/seg^2 hacia abajo sobre un plano inclinado 15°. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la superficie libre? *Sol.* 23°9′

20. Un recipiente que contiene aceite de densidad relativa 0,762 se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración de +2 45 m/seg^2. ¿Qué presión existe a una profundidad de 180 cm? *Sol.* 1715 kg/m^2

21. Si en el Problema 20 la aceleración es de −2,45 m/seg^2, ¿cuál es la presión a una profundidad de 180 cm? *Sol.* 1029 kg/m^2

22. Una fuerza vertical no equilibrada y dirigida hacia arriba, de módulo 30 kg, acelera un volumen de 45 l de agua. Si el agua ocupa una profundidad de 90 cm en un depósito cilíndrico, ¿cuál es la fuerza que actúa sobre el fondo del depósito? *Sol.* 75 kg

23. Un depósito abierto cilíndrico de 120 cm de diámetro y 180 cm de profundidad se llena de agua y se le hace girar a 60 rpm. ¿Qué volumen de líquido se derrama y cuál es la profundidad en el eje? *Sol.* 0,410 m^3, 1,074 m

24. ¿A qué velocidad debe girar el depósito del Problema 23 para que en el centro del fondo del depósito la profundidad del agua sea nula? *Sol.* 9,90 rad/seg

25. Un recipiente cerrado, de 60 cm de diámetro, está totalmente lleno de agua. Si el recipiente está girando a 1200 rpm, ¿qué incremento sufrirá la presión en la circunferencia de la parte superior del depósito? *Sol.* 7,25 kg/cm^2

26. Un recipiente abierto de 46 cm de diámetro y lleno de agua está girando alrededor de su eje vertical a tal velocidad que la superficie del agua a 10 cm del eje forma un ángulo de 40° con la horizontal. Calcular la velocidad de rotación. *Sol.* 9,07 rad/seg

27. Un tubo en U con codos en ángulo recto tiene 32 cm de anchura y contiene mercurio que asciende 24 cm en cada rama cuando el tubo está en reposo. ¿A qué velocidad debe girar el tubo alrededor de un eje vertical, que dista 8 cm de uno de los brazos, para que el tubo del brazo más próximo al eje quede sin mercurio? *Sol.* 15,65 rad/seg

28. Un tubo de 2 m de longitud y 5 cm de diámetro tiene sus extremos cerrados y está lleno de agua a una presión de 0,88 kg/cm^2. Situado en posición horizontal se le hace girar alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos a una velocidad de 3 rad/seg. ¿Cuál será la presión en el extremo más alejado del eje de giro? *Sol.* 9412 kg/m^2

29. El impulsor de 1,50 m de diámetro de una bomba centrífuga de agua gira a 1500 rpm. Si el cuerpo de la bomba está totalmente lleno de agua, ¿qué altura de presión se desarrolla por la rotación? *Sol.* 700 m

Capítulo 5

Análisis dimensional y semejanza hidráulica

INTRODUCCION

La teoría matemática y los resultados experimentales han desarrollado soluciones prácticas de mı chos problemas hidráulicos. En la actualidad numerosas estructuras hidráulicas se proyectan y con: truyen solo después de haber efectuado un amplio estudio sobre modelos. La aplicación del anális dimensional y de la semejanza hidráulica permite al ingeniero organizar y simplificar las experiencia: así como el análisis de los resultados obtenidos.

ANALISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional trata de las relaciones matemáticas de las dimensiones de las magnitude físicas y constituye otra herramienta muy útil de la moderna mecánica de los fluidos. En toda ecuació que exprese una relación física entre magnitudes debe verificarse la igualdad al sustituir las magnitude por sus valores numéricos y también por sus dimensiones. En general, todas las relaciones físicas puede reducirse a una relación entre las magnitudes fundamentales, fuerza F, longitud L y tiempo T (o bie la masa M, longitud L y tiempo T). Entre las aplicaciones se incluyen (1) conversión de un sistema d unidades en otro, (2) desarrollo de ecuaciones, (3) reducción del número de variables requeridas en u programa experimental y (4) establecimiento de los principios para el diseño de modelos.

El teorema de Pi de Buckingham se establecerá e ilustrará en los Problemas 13 a 17.

MODELOS HIDRAULICOS

Los modelos hidráulicos, en general, pueden ser o bien modelos verdaderos o modelos distorsio nados. Los modelos verdaderos tienen todas las características significativas del prototipo reprodu cidas a escala (semejanza geométrica) y satisfacen todas las restricciones de diseño (semejanza cinemá tica y dinámica). El estudio comparativo entre modelo y prototipo ha mostrado con evidencia que l: correspondencia de comportamiento es frecuentemente buena, fuera de las limitaciones esperadas como lo atestigua el correcto funcionamiento de muchas estructuras diseñadas a partir de ensayos sobr modelos.

SEMEJANZA GEOMETRICA

Entre el modelo y el prototipo existe semejanza geométrica cuando las relaciones entre todas las d mensiones correspondientes u homólogas en modelo y prototipo son iguales. Tales relaciones puede escribirse

$$\frac{L_{\text{modelo}}}{L_{\text{prototipo}}} = L_{\text{rel.}} \quad \text{o} \quad \frac{L_m}{L_p} = L_r \qquad (1$$

y

$$\frac{A_{\text{modelo}}}{A_{\text{prototipo}}} = \frac{L^2_{\text{modelo}}}{L^2_{\text{prototipo}}} = L^2_{\text{rel.}} = L^2_r \qquad (2$$

SEMEJANZA CINEMATICA

Entre modelo y prototipo existe semejanza cinemática si (1) las trayectorias de las partículas móviles homólogas son geométricamente semejantes y (2) las relaciones entre las velocidades de las partículas homólogas son iguales. A continuación se dan las siguientes relaciones útiles:

$$\text{Velocidad:}\quad \frac{V_m}{V_p} = \frac{L_m/T_m}{L_p/T_p} = \frac{L_m}{L_p} : \frac{T_m}{T_p} = \frac{L_r}{T_r} \tag{3}$$

$$\text{Aceleración:}\quad \frac{a_m}{a_p} = \frac{L_m/T_m^2}{L_p/T_p^2} = \frac{L_m}{L_p} : \frac{T_m^2}{T_p^2} = \frac{L_r}{T_r^2} \tag{4}$$

$$\text{Caudal:}\quad \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3/T_m}{L_p^3/T_p} = \frac{L_m^3}{L_p^3} : \frac{T_m}{T_p} = \frac{L_r^3}{T_r} \tag{5}$$

SEMEJANZA DINAMICA

Entre dos sistemas semejantes geométrica y cinemáticamente existe semejanza dinámica si las relaciones entre las fuerzas homólogas en modelo y prototipo son las mismas.

Las condiciones requeridas para la semejanza completa se obtienen a partir del segundo principio del movimiento de Newton, $\Sigma F_x = M\,a_x$. Las fuerzas que actúan pueden ser cualquiera de las siguientes, o una combinación de las mismas: fuerzas viscosas, fuerzas debidas a la presión, fuerzas gravitatorias, fuerzas debidas a la tensión superficial y fuerzas elásticas. Entre modelo y prototipo se desarrolla la siguiente relación de fuerzas:

$$\frac{\Sigma\ \text{fuerzas (viscosas} \leftrightarrow \text{de presión} \leftrightarrow \text{gravitatorias} \leftrightarrow \text{tensión superf.} \leftrightarrow \text{elásticas})_m}{\Sigma\ \text{fuerzas (viscosas} \leftrightarrow \text{de presión} \leftrightarrow \text{gravitatorias} \leftrightarrow \text{tensión superf.} \leftrightarrow \text{elásticas})_p} = \frac{M_m\,a_m}{M_p\,a_p}$$

LA RELACION ENTRE LAS FUERZAS DE INERCIA se desarrolla en la siguiente forma:

$$F_r = \frac{\text{fuerza}_{\text{modelo}}}{\text{fuerza}_{\text{prototipo}}} = \frac{M_m\,a_m}{M_p\,a_p} = \frac{\rho_m\,L_m^3}{\rho_p\,L_p^3} \times \frac{L_r}{T_r^2} = \rho_r\,L_r^2\left(\frac{L_r}{T_r}\right)^2$$

$$F_r = \rho_r\,L_r^2\,V_r^2 = \rho_r\,A_r\,V_r^2 \tag{6}$$

Esta ecuación expresa la ley general de la semejanza dinámica entre modelo y prototipo y se la conoce con el nombre de ecuación newtoniana.

RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS DE PRESION (*número de Euler*). Viene dada por (utilizando $T = L/V$)

$$\frac{M\,a}{p\,A} = \frac{\rho\,L^3 \times L/T^2}{p\,L^2} = \frac{\rho\,L^4\,(V^2/L^2)}{p\,L^2} = \frac{\rho\,L^2\,V^2}{p\,L^2} = \frac{\rho\,V^2}{p} \tag{7}$$

RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS VISCOSAS (*número de Reynolds*). Se obtiene a partir de

$$\frac{M\,a}{\tau\,A} = \frac{M\,a}{\mu\left(\frac{dV}{dy}\right)A} = \frac{\rho\,L^2\,V^2}{\mu\left(\frac{V}{L}\right)L^2} = \frac{\rho\,V\,L}{\mu} \tag{8}$$

RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS GRAVITATORIAS. Se obtiene de

$$\frac{M\,a}{M\,g} = \frac{\rho\,L^2\,V^2}{\rho\,L^3\,g} = \frac{V^2}{L\,g} \qquad (9)$$

La raíz cuadrada de esta relación, $\dfrac{V}{\sqrt{L\,g}}$, se llama *número de Froude*.

RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS ELASTICAS (*número de Cauchy*). Se obtiene a partir de

$$\frac{M\,a}{E\,A} = \frac{\rho\,L^2\,V^2}{E\,L^2} = \frac{\rho\,V^2}{E} \qquad (10)$$

La raíz cuadrada de esta relación, $\dfrac{V}{\sqrt{E/\rho}}$, se llama *número de Mach*.

RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LA DE LA TENSION SUPERFICIAL (*número de Weber*). Se obtiene de

$$\frac{M\,a}{\sigma\,L} = \frac{\rho\,L^2\,V^2}{\sigma\,L} = \frac{\rho\,L\,V^2}{\sigma} \qquad (11)$$

En general, el ingeniero estudia únicamente los efectos de la fuerza predominante. En la mayoría de los problemas de flujos fluidos son fuerzas predominantes las de la gravedad, viscosidad y/o elasticidad, pero no necesariamente de forma simultánea. En este libro se tratarán únicamente los casos en que una sola fuerza predominante influye sobre la configuración del flujo, mientras que el resto de las fuerzas producen efectos despreciables o que se compensan. Si son varias las fuerzas que simultáneamente influyen en las condiciones del flujo, el problema se complica en exceso, quedando fuera del propósito de este texto. Los Problemas 21 y 34 sugieren posibilidades.

RELACION DE TIEMPOS

Las relaciones de tiempos establecidas para configuraciones del flujo gobernadas esencialmente por la viscosidad, o por la gravedad, o por la tensión superficial, o bien por la elasticidad, son, respectivamente,

$$T_r = \frac{L_r^2}{\nu_r} \qquad \text{(véase Problema 20)} \qquad (12)$$

$$T_r = \sqrt{\frac{L_r}{g_r}} \qquad \text{(véase Problema 18)} \qquad (13)$$

$$T_r = \sqrt{L_r^3 \times \frac{\rho_r}{\sigma_r}} \qquad (14)$$

$$T_r = \frac{L_r}{\sqrt{E_r/\rho_r}} \qquad (15)$$

Problemas resueltos

1. Expresar cada una de las siguientes magnitudes (*a*) en función de la fuerza F, la longitud L y del tiempo T y (*b*) en función de la masa M, la longitud L y el tiempo T.

Solución:

	Magnitud	*Símbolo*	(*a*) *F-L-T*	(*b*) *M-L-T*
(*a*)	Area A en m^2	A	L^2	L^2
(*b*)	Volumen v en m^3	v	L^3	L^3
(*c*)	Velocidad V en m/seg	V	$L\,T^{-1}$	$L\,T^{-1}$
(*d*)	Aceleración a o g en m/seg^2	a, g	$L\,T^{-2}$	$L\,T^{-2}$
(*e*)	Velocidad angular ω en rad/seg	ω	T^{-1}	T^{-1}
(*f*)	Fuerza F en kg	F	F	$M\,L\,T^{-2}$
(*g*)	Masa M en kg seg^2/m	M	$F\,T^2\,L^{-1}$	M
(*h*)	Peso específico w en kg/m^3	w	$F\,L^{-3}$	$M\,L^{-2}\,T^{-2}$
(*i*)	Densidad ρ en kg seg^2/m^4	ρ	$F\,T^2\,L^{-4}$	$M\,L^{-3}$
(*j*)	Presión p en kg/m^2	p	$F\,L^{-2}$	$M\,L^{-1}\,T^{-2}$
(*k*)	Viscosidad absoluta μ en kg seg/m^2	μ	$F\,T\,L^{-2}$	$M\,L^{-1}\,T^{-1}$
(*l*)	Viscosidad cinemática ν en m^2/seg	ν	$L^2\,T^{-1}$	$L^2\,T^{-1}$
(*m*)	Módulo de elasticidad E en kg/m^2	E	$F\,L^{-2}$	$M\,L^{-1}\,T^{-2}$
(*n*)	Potencia P en kgm/seg	P	$F\,L\,T^{-1}$	$M\,L^2\,T^{-3}$
(*o*)	Par T en mkg	T	$F\,L$	$M\,L^2\,T^{-2}$
(*p*)	Caudal Q en m^3/seg	Q	$L^3\,T^{-1}$	$L^3\,T^{-1}$
(*q*)	Tensión cortante τ en kg/m^2	τ	$F\,L^{-2}$	$M\,L^{-1}\,T^{-2}$
(*r*)	Tensión superficial σ en kg/m	σ	$F\,L^{-1}$	$M\,T^{-2}$
(*s*)	Peso W en kg	W	F	$M\,L\,T^{-2}$
(*t*)	Caudal en peso W en kg/seg	W	$F\,T^{-1}$	$M\,L\,T^{-3}$

2. Desarrollar una expresión que dé la distancia recorrida en el tiempo T por un cuerpo que cae libremente, suponiendo que la distancia depende del peso del cuerpo, de la aceleración de la gravedad y del tiempo.

Solución:

$$\text{Distancia } s = f(W, g, T)$$

o

$$s = K\,W^a\,g^b\,T^c$$

donde K es un coeficiente adimensional que se determina por lo general experimentalmente.

Esta ecuación ha de ser dimensionalmente homogénea. Los exponentes de cada una de las magnitudes deben ser iguales en los dos miembros de la ecuación. Se puede escribir

$$F^0\,L^1\,T^0 = (F^a)\,(L^b\,T^{-2b})\,(T^c)$$

Igualando los exponentes de F, L y T, respectivamente, se obtiene $0 = a$, $1 = b$ y $0 = -2b + c$, de donde $a = 0$, $b = 1$ y $c = 2$. Sustituyendo,

$$s = K\,W^0\,g\,T^2 \qquad \text{o} \qquad s = K\,g\,T^2$$

Obsérvese que el exponente del peso W es cero, lo que significa que la distancia recorrida es independiente del peso. El coeficiente K se determina por análisis físico y/o por experimentación.

3. El *número de Reynolds* es una función de la densidad, la viscosidad y la velocidad del fluido, así como de una longitud característica. Establecer la expresión del *número de Reynolds* mediante el análisis dimensional.

Solución:

$$R_E = f(\rho, \mu, V, L)$$

o

$$R_E = K \rho^a \mu^b V^c L^d$$

De aquí, dimensionalmente, $F^0 L^0 T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b T^b L^{-2b})(L^c T^{-c})(L^d)$

Igualando, respectivamente, los exponentes de F, L y T, se obtiene

$$0 = a + b, \quad 0 = -4a - 2b + c + d, \quad 0 = 2a + b - c$$

de la cual $a = -b$, $c = -b$, $d = -b$. Sustituyendo,

$$R_E = K \rho^{-b} \mu^b V^{-b} L^{-b} = K\left(\frac{V L \rho}{\mu}\right)^{-b}$$

Los valores de K y b tienen que determinarse por análisis físico y/o por experimentación. Aquí, $K = 1$ y $b = -1$.

4. Para el caso de un líquido ideal, expresar el caudal Q a través de un orificio en función de la densidad del líquido, el diámetro del orificio y la diferencia de presiones.

Solución:

$$Q = f(\rho, p, d)$$

o

$$Q = K \rho^a p^b d^c$$

De aquí, dimensionalmente, $F^0 L^3 T^{-1} = (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b L^{-2b})(L^c)$

y $0 = a + b, \quad 3 = -4a - 2b + c, \quad -1 = 2a$

S

de donde $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$. Sustituyendo,

I

$$Q = K \rho^{-1/2} p^{1/2} d^2$$

o

$$\text{(ideal) } Q = K d^2 \sqrt{p/\rho}$$

El coeficiente K ha de obtenerse mediante el análisis físico y/o por experimentación.

Para un orificio en la pared lateral de un depósito y bajo una altura de carga h, $p = w h$. Para obtener la conocida fórmula del caudal desaguado por un orificio, que se dará en el Capítulo 9, se pone $K = \sqrt{2}\,(\pi/4)$. Por tanto,

$$\text{(ideal) } Q = \sqrt{2}\,(\pi/4)\, d^2 \sqrt{wh/\rho}$$

Pero $g = w/\rho$; de donde

$$\text{(ideal) } Q = \tfrac{1}{4}\pi\, d^2 \sqrt{2g\,h}$$

5. Determinar la presión dinámica ejercida sobre un cuerpo totalmente sumergido en la corriente de un fluido incompresible al suponer que la presión es función de la densidad y de la velocidad.

Solución:

$$p = f(\rho, V)$$

o

$$p = K \rho^a V^b$$

De aquí, dimensionalmente, $F^1 L^{-2} T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a})(L^b T^{-b})$

y $1 = a$, $-2 = -4a + b$, $0 = 2a - b$, de donde $a = 1$, $b = 2$. Sustituyendo,

$$p = K \rho V^2$$

6. Suponiendo que la potencia comunicada a una bomba es función del peso específico del fluido, del caudal en m^3/seg y de la altura comunicada a la corriente, establecer una ecuación por análisis dimensional.

Solución:

$$P = f(w, Q, H)$$

o $$P = K\, w^a\, Q^b\, H^c$$

De aquí, dimensionalmente, $$F^1 L^1 T^{-1} = (F^a L^{-3a})(L^{3b} T^{-b})(L^c)$$

y $1 = a$, $1 = -3a + 3b + c$, $-1 = -b$, de donde $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Sustituyendo,

$$P = K\, w\, Q\, H$$

7. Se dispara un proyectil con un ángulo θ y una velocidad inicial V. Encontrar el alcance R en el plano horizontal, suponiéndolo función de V, θ y de g.

Solución:

$$R = f(V, g, \theta) = K\, V^a\, g^b\, \theta^c \qquad (A)$$

Dimensionalmente, $$L^1 = (L^a T^{-a})(L^b T^{-2b}) \qquad (B)$$

Como θ es adimensional, no aparece en la ecuación (B).

Despejando a y b, $a = 2$ y $b = -1$. Sustituyendo, $R = K\, V^2/g$. Evidentemente, esta ecuación es incorrecta ya que carece de la variable θ. En el Problema 8 se muestra cómo obtener una solución correcta.

8. Resolver el Problema 7 mediante una descomposición vectorial.

Solución:

En los casos de movimientos bidimensionales pueden introducirse las componentes según X o Y para obtener una solución más completa. Así, la ecuación (A) del Problema 7 puede escribirse

$$R_x = K\, V_x^a\, V_y^b\, g_y^c\, \theta^d$$

Dimensionalmente, $$L_x^1 = (L_x^a T^{-a})(L_y^b T^{-b})(L_y^c T^{-2c}) \qquad (C)$$

que da
$$L_x:\ 1 = a$$
$$T:\ 0 = -a - b - 2c$$
$$L_y:\ 0 = b + c$$

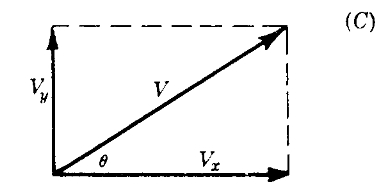


Fig. 5-1

De aquí, $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$. Sustituyendo en (C),

$$R = K\left(\frac{V_x V_y}{g}\right) \qquad (D)$$

A partir del diagrama vectorial, $\cos\theta = V_x/V$, $\text{sen}\,\theta = V_y/V$ y $\cos\theta\ \text{sen}\,\theta = V_x V_y/V^2$. Sustituyendo en (D),

$$R = K\frac{V^2 \cos\theta\ \text{sen}\,\theta}{g} = K\frac{V^2\ \text{sen}\, 2\theta}{2g} \qquad (E)$$

Por mecánica, R toma la forma $\dfrac{V^2\ \text{sen}\ 2\theta}{g}$; de donde $K = 2$ en la ecuación (E).

9. Suponiendo que la fuerza de arrastre ejercida sobre un cuerpo sumergido en una corriente fluida es función de la densidad, la viscosidad y la velocidad del fluido, y de una longitud característica del cuerpo, desarrollar la ecuación general.

Solución:

$$F = f(\rho, \mu, L, V)$$

o $$F = K\, \rho^a\, \mu^b\, L^c\, V^d$$

De aquí, $$F^1 L^0 T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b T^b L^{-2b})(L^c)(L^d T^{-d})$$

y $1 = a + b$, $0 = -4a - 2b + c + d$, $0 = 2a + b - d$.

Se observa que hay más exponentes desconocidos que ecuaciones. Un procedimiento de resolución consiste en expresar tres de las incógnitas en función de la cuarta. Resolviendo en función de b, se obtiene

$$a = 1 - b, \quad d = 2 - b, \quad c = 2 - b$$

Sustituyendo, $$F = K\rho^{1-b}\mu^{b}L^{2-b}V^{2-b}$$

Con el fin de expresar esta ecuación en la forma comúnmente usada, se multiplica por 2/2 y se ordenan términos, obteniendo:

$$F = 2K\rho\left(\frac{VL\rho}{\mu}\right)^{-b}L^2\frac{V^2}{2}$$

Como se ve $\dfrac{VL\rho}{\mu}$ es el *número de Reynolds* y L^2 representa un área, y se puede poner

$$F = [2K R_E^{-b}]\,\rho A\frac{V^2}{2} \qquad \text{o} \qquad F = C_D\,\rho A\frac{V^2}{2}$$

10. Desarrollar una expresión para la tensión cortante en una corriente fluida en una tubería suponiendo que la tensión es función del diámetro y de la rugosidad de la tubería, y de la densidad, la viscosidad y la velocidad del fluido.

Solución:

$$\tau = f(V, d, \rho, \mu, K)$$

o $$\tau = C\,V^a d^b \rho^c \mu^d K^e$$

La rugosidad K se expresa normalmente como la relación entre la altura de las protuberancias superficiales de la tubería y su diámetro, ϵ/d, que es un número adimensional.

Por tanto, $$F^1L^{-2}T^0 = (L^aT^{-a})(L^b)(F^cT^{2c}L^{-4c})(F^dT^dL^{-2d})(L^e/L^e)$$

y $1 = c + d$, $-2 = a + b - 4c - 2d + e - e$, $0 = -a + 2c + d$. Resolviendo en función de d, se obtiene

$$c = 1 - d, \quad a = 2 - d, \quad b = -d$$

Sustituyendo, $$\tau = C\,V^{2-d}d^{-d}\rho^{1-d}\mu^dK^e$$

Reuniendo términos, $$\tau = C\left(\frac{Vd\rho}{\mu}\right)^{-d}K^eV^2\rho$$

o $$\tau = (C'R_E^{-d})\,V^2\rho$$

11. Desarrollar una expresión que dé la pérdida de carga en una tubería horizontal, para un flujo turbulento incompresible.

Solución:

Para un fluido cualquiera la pérdida de carga viene dada por la caída de presión y es una medida de la resistencia presentada al flujo a través de la tubería. La resistencia es una función del diámetro de la tubería, la viscosidad y la densidad del fluido, la longitud de la tubería, la velocidad del fluido y la rugosidad K de la tubería. Se puede escribir

$$(p_1 - p_2) = f(d, \mu, \rho, L, V, K)$$

o $$(p_1 - p_2) = C\,d^a\mu^b\rho^cL^dV^e(\epsilon/d)^f$$

A partir de datos experimentales se ve que el exponente de la longitud L es la unidad. El valor de K se expresa usualmente como la relación entre el tamaño de las protuberancias superficiales ϵ y el diámetro d de la tubería, resultando adimensional. Se puede escribir, por tanto,

$$F^1L^{-2}T^0 = (L^a)(F^bT^bL^{-2b})(F^cT^{2c}L^{-4c})(L^1)(L^eT^{-e})(L^f/L^f)$$

y $1 = b + c$, $-2 = a - 2b - 4c + 1 + e + f - f$, $0 = b + 2c - e$, a partir de las cuales se pueden determinar los valores de a, b y c en función de e o bien

$$c = e - 1, \quad b = 2 - e, \quad a = e - 3$$

Sustituyendo en (1),

$$(p_1 - p_2) = C\, d^{e-3}\, \mu^{2-e}\, \rho^{e-1}\, L^1\, V^e\, (\epsilon/d)^f$$

Dividiendo el primer miembro de la ecuación por w y el segundo por su equivalente ρg,

$$\frac{p_1 - p_2}{w} = \text{pérdida de carga} = \frac{C\,(\epsilon/d)^f\, L\,(d^{e-3}\, V^e\, \rho^{e-1}\, \mu^{2-e})}{\rho\, g}$$

que puede transformarse en (al introducir 2 en el numerador y en el denominador)

$$\text{pérdida de carga} = 2\,C\left(\frac{\epsilon}{d}\right)^f \frac{L}{d}\frac{V^2}{2g}\left[\frac{d^{e-2}\, V^{e-2}\, \rho^{e-2}}{\mu^{e-2}}\right]$$

$$= K'\,(R_E^{e-2})\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right) = f\,\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \quad \text{(fórmula de Darcy)}$$

12. Establecer una expresión para la potencia de entrada en una hélice al suponer que la potencia puede expresarse en función de la densidad del aire, el diámetro, la velocidad de la corriente de aire, la velocidad de rotación, el coeficiente de viscosidad y la velocidad del sonido.

Solución:

$$\text{Potencia} = K\, \rho^a\, d^b\, V^c\, \omega^d\, \mu^e\, c^f$$

y, utilizando como unidades fundamentales la masa, la longitud y el tiempo,

$$M\,L^2\,T^{-3} = (M^a\,L^{-3a})(L^b)(L^c\,T^{-c})(T^{-d})(M^e\,L^{-e}\,T^{-e})(L^f\,T^{-f})$$

De aquí,
$$1 = a + e \qquad\qquad a = 1 - e$$
$$2 = -3a + b + c - e + f \qquad \text{de donde} \qquad b = 5 - 2e - c - f$$
$$-3 = -c - d - e - f \qquad\qquad d = 3 - c - e - f$$

Sustituyendo, $\quad \text{Potencia} = K\,\rho^{1-e}\, d^{5-2e-c-f}\, V^c\, \omega^{3-c-e-f}\, \mu^e\, c^f$

Ordenando y reuniendo términos con los mismos exponentes, se obtiene

$$\text{Potencia} = K\left[\left(\frac{\rho\, d^2\, \omega}{\mu}\right)^{-e}\left(\frac{d\,\omega}{V}\right)^{-c}\left(\frac{d\,\omega}{c}\right)^{-f}\right]\omega^3\, d^5\, \rho$$

Al observar los términos entre paréntesis se ve que todos son adimensionales. El primer factor puede escribirse como un *número de Reynolds*, ya que velocidad lineal = radio × velocidad angular. El segundo factor es una relación adimensional característica de la hélice y el tercer factor, cociente de la velocidad a la celeridad del sonido, es el número de Mach. Combinando todos estos términos se llega a la ecuación

$$\text{Potencia} = C'\,\rho\,\omega^3\, d^5$$

13. Resumir el procedimiento a seguir para aplicar el Teorema de Pi de Buckingham.

Introducción:

Cuando el número de variables o magnitudes físicas son cuatro o más, el Teorema de Pi de Buckingham constituye una excelente herramienta, mediante la cual pueden agruparse estas magnitudes en un número menor de grupos adimensionales significativos, a partir de los cuales puede establecerse una ecuación. Los grupos adimensionales se llaman grupos o números Pi. Si en el fenómeno físico en cuestión intervienen n magnitudes físicas q de las cuales k son dimensiones fundamentales (por ejemplo, fuerza, longitud y tiempo, o bien masa, longitud y tiempo) y otras q (tales como velocidad, densidad, viscosidad, presión y área), entonces matemáticamente

$$f_1\,(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) = 0$$

Y esta ecuación puede remplazarse por la relación

$$\phi\,(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-k}) = 0$$

donde cualquier número π no depende más que de $(k + 1)$ magnitudes físicas q y cada uno de los números π son funciones monómicas independientes, adimensionalmente, de las magnitudes q.

Procedimiento:

1. Se escriben las n magnitudes físicas q, que intervienen en un problema en particular, anotando sus dimensiones y el número k de dimensiones fundamentales. Existirán $(n - k)$ números π.
2. Seleccionar k de estas magnitudes, sin que haya ninguna sin dimensiones, ni dos que tengan las mismas dimensiones. Todas las dimensiones fundamentales deben incluirse colectivamente en las magnitudes seleccionadas.
3. El primer grupo π puede expresarse como el producto de las magnitudes escogidas, elevada cada una a un exponente desconocido, y una de las otras magnitudes elevada a una potencia conocida (normalmente se toma igual a uno).
4. Mantener las magnitudes escogidas en (2) como variables *repetidas* y escoger una de las restantes variables para establecer el nuevo número π. Repetir el procedimiento para obtener los sucesivos números π.
5. En cada uno de los grupos π determinar los exponentes desconocidos mediante el análisis dimensional.

Relaciones útiles:

(*a*) Si una magnitud es adimensional constituye un grupo π sin necesidad de aplicar el procedimiento anterior.
(*b*) Si dos magnitudes físicas cualesquiera tienen las mismas dimensiones su cociente será un número adimensional π. Por ejemplo, L/L es adimensional y, por tanto, un número π.
(*c*) Cualquier número π puede ser sustituido por una potencia del mismo, incluida π^{-1}. Por ejemplo, π_3 puede remplazarse por π_3^2, o π_2 por $1/\pi_2$.
(*d*) Cualquier número π puede sustituirse por su producto por una constante numérica. Por ejemplo, π_1 puede remplazarse por $3\pi_1$.
(*e*) Cualquier número π puede expresarse como función de otros números π. Por ejemplo, si hay dos números π, $\pi_1 = \phi(\pi_2)$.

14. Resolver el Problema 2 mediante el Teorema de Pi de Buckingham.

Solución:

El problema puede resolverse estableciendo que cierta función de la distancia s, el peso W, la aceleración de la gravedad g y el tiempo T es igual a cero, o bien matemáticamente

$$f_1\,(s, W, g, T) = 0$$

Paso 1

Se enumeran las magnitudes y sus unidades.

$$s = \text{longitud } L, \quad W = \text{fuerza } F, \quad g = \text{aceleración } L/T^2, \quad T = \text{tiempo } T$$

Existen 4 magnitudes físicas, 3 de ellas fundamentales, de donde $(4 - 3) =$ un número π.

Paso 2

Escogidas s, W y T como magnitudes físicas proporcionan las tres dimensiones fundamentales F, L y T

Paso 3

Como las magnitudes físicas de dimensiones distintas no pueden sumarse ni restarse, el número π se expresa en forma de producto, como sigue:

$$\pi_1 = (s^{x_1})\,(W^{y_1})\,(T^{z_1})\,(g) \qquad (1$$

Aplicando la homogeneidad dimensional

$$F^0\,L^0\,T^0 = (L^{x_1})\,(F^{y_1})\,(T^{z_1})\,(LT^{-2})$$

Igualando los exponentes de F, L y T, respectivamente, se obtiene $0 = y_1$, $0 = x_1 + 1$, $0 = z_1 - 2$, de dond $x_1 = -1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 2$. Sustituyendo en (*1*),

$$\pi_1 = s^{-1}\,W^0\,T^2\,g = \frac{W^0\,T^2\,g}{s}$$

Despejando s y poniendo $1/\pi_1 = K$, se obtiene $s = K\,g\,T^2$.

15. Resolver el Problema 6 aplicando el Teorema de Pi de Buckingham.

Solución:

El problema se establece matemáticamente así

$$f(P, w, Q, H) = 0$$

Las magnitudes físicas con sus dimensiones en el sistema F, L y T son

Potencia $P = F\,L\,T^{-1}$ — Caudal $Q = L^3\,T^{-1}$

Peso específico $w = F\,L^{-3}$ — Carga $H = L$

Existen 4 magnitudes físicas y de ellas 3 fundamentales, de donde $(4 - 3) = 1$ grupo π.

Escogidas Q, w y H como magnitudes con exponentes desconocidos, el grupo π se establece como sigue:

$$\pi_1 = (Q^{x_1})\,(w^{y_1})\,(H^{z_1})\,P \qquad (1)$$

o

$$\pi_1 = (L^{3x_1}\,T^{-x_1})\,(F^{y_1}\,L^{-3y_1})\,(L^{z_1})\,(F\,L\,T^{-1})$$

Igualando los exponentes de F, L y T, respectivamente, se obtiene $0 = y_1 + 1$, $0 = 3x_1 - 3y_1 + z_1 + 1$, $0 = -x_1 - 1$, de donde $x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $z_1 = -1$. Sustituyendo en *(1)*,

$$\pi_1 = Q^{-1}\,w^{-1}\,H^{-1}\,P = \frac{P}{w\,Q\,H} \qquad \text{o} \qquad P = K\,w\,Q\,H$$

16. Resolver el Problema 9, aplicando el Teorema de Pi de Buckingham.

Solución:

El problema puede establecerse así

$$\phi\,(F, \rho, \mu, L, V) = 0$$

Las magnitudes físicas y sus dimensiones en el sistema F, L y T son

Fuerza $F = F$ — Longitud $L = L$

Densidad $\rho = F\,T^2\,L^{-4}$ — Velocidad $V = L\,T^{-1}$

Viscosidad absoluta $\mu = F\,T\,L^{-2}$

Existen 5 magnitudes físicas, de ellas 3 fundamentales, de donde $(5 - 3) = 2$ números π.

Escogidas la longitud L, la velocidad V y la densidad ρ como 3 variables repetidas con exponentes desconocidos, se establecen los números π como sigue:

$$\pi_1 = (L^{a_1})\,(L^{b_1}\,T^{-b_1})\,(F^{c_1}\,T^{2c_1}\,L^{-4c_1})\,(F) \qquad (1)$$

Igualando los exponentes de F, L y T, respectivamente, se obtiene $0 = c_1 + 1$, $0 = a_1 + b_1 - 4c_1$, $0 = -b_1 + 2c_1$, de donde $c_1 = -1$, $b_1 = -2$, $a_1 = -2$. Sustituyendo en *(1)*, $\pi_1 = F/L^2\,V^2\,\rho$.

Para calcular el segundo número π se mantienen las tres primeras magnitudes físicas y se añade otra magnitud, en este caso la viscosidad absoluta μ. (Véase Problema 13, Apartado 4.)

$$\pi_2 = (L^{a_2})\,(L^{b_2}\,T^{-b_2})\,(F^{c_2}\,T^{2c_2}\,L^{-4c_2})\,(F\,T\,L^{-2}) \qquad (2)$$

Igualando los exponentes de F, L y T, respectivamente, se obtiene $0 = c_2 + 1$, $0 = a_2 + b_2 - 4c_2 - 2$, $0 = -b_2 + 2c_2 + 1$, de donde $c_2 = -1$, $b_2 = -1$, $a_2 = -1$. Por tanto, $\pi_2 = \mu/LV\rho$. Esta expresión puede ponerse en la forma $\pi_2 = LV\rho/\mu$, que es una forma del número de Reynolds.

La nueva relación, escrita en función de los grupos π_1 y π_2, es

$$f_1\left(\frac{F}{L^2\,V^2\,\rho}, \frac{L\,V\,\rho}{\mu}\right) = 0$$

o

$$\text{Fuerza } F = (L^2\,V^2\,\rho)\,f_2\left(\frac{L\,V\,\rho}{\mu}\right)$$

que puede escribirse

$$F = (2K\,R_E)\,\rho\,L^2\,\frac{V^2}{2}$$

Sustituyendo L^2 por un área, la ecuación puede establecerse finalmente en la forma $F = C_D\,\rho\,A\,\dfrac{V^2}{2}$. (Véase Capítulo 11.)

17. Resolver el Problema 11 mediante el Teorema de Pi de Buckingham.

Solución:

Matemáticamente, el problema puede escribirse en la forma

$$f\,(\Delta p, d, \mu, \rho, L, V, K) = 0$$

donde K es la rugosidad relativa o relación del tamaño de las irregularidades de la superficie ϵ al diámetro d de la tubería. (Véase Capítulo 7.)

Las magnitudes físicas con sus dimensiones en el sistema F, L y T son

Caída de presión $\Delta p = F\,L^{-2}$	Longitud $L = L$
Diámetro $d = L$	Velocidad $V = L\,T^{-1}$
Viscosidad absoluta $\mu = F\,T\,L^{-2}$	Rugosidad relativa $K = L_1/L_2$
Densidad $\rho = F\,T^2\,L^{-4}$	

Existen 7 magnitudes físicas, 3 de ellas dimensiones fundamentales, de donde $(7 - 3) = 4$ números π. Escogidos el diámetro, la velocidad y la densidad como variables repetidas con exponentes desconocidos, los números π son

$$\pi_1 = (L^{x_1})(L^{y_1}\,T^{-y_1})(F^{z_1}\,T^{2z_1}\,L^{-4z_1})(F\,L^{-2})$$

$$\pi_2 = (L^{x_2})(L^{y_2}\,T^{-y_2})(F^{z_2}\,T^{2z_2}\,L^{-4z_2})(F\,T\,L^{-2})$$

$$\pi_3 = (L^{x_3})(L^{y_3}\,T^{-y_3})(F^{z_3}\,T^{2z_3}\,L^{-4z_3})(L)$$

$$\pi_4 = K = L_1/L_2$$

Calculando los exponentes término a término se llega a

π_1: $0 = z_1 + 1,\ 0 = x_1 + y_1 - 4z_1 - 2,\ 0 = -y_1 + 2z_1$; luego $x_1 = 0,\ y_1 = -2,\ z_1 = -1$.

π_2: $0 = z_2 + 1,\ 0 = x_2 + y_2 - 4z_2 - 2,\ 0 = -y_2 + 2z_2 + 1$; luego $x_2 = -1,\ y_2 = -1,\ z_2 = -1$.

π_3: $0 = z_3,\ 0 = x_3 + y_3 - 4z_3 + 1,\ 0 = -y_3 + 2z_3$; luego $x_3 = -1,\ y_3 = 0,\ z_3 = 0$.

De donde los números π son

$$\pi_1 = d^0\,V^{-2}\,\rho^{-1}\,\Delta p = \frac{\Delta p}{\rho\,V^2}$$ (número de Euler)

$$\pi_2 = \frac{\mu}{d\,V\,\rho} \quad \text{o} \quad \frac{d\,V\,\rho}{\mu}$$ (número de Reynolds)

$$\pi_3 = d^{-1}\,V^0\,\rho^0\,L = \frac{L}{d}$$ (como podía esperarse; véase Apartado *b*, Problema 13)

$$\pi_4 = L_1/L_2 = \frac{\epsilon}{d}$$ (véase Capítulo 7)

La nueva relación puede escribirse ahora

$$f_1\left(\frac{\Delta p}{\rho\,V^2}, \frac{d\,V\,\rho}{\mu}, \frac{L}{d}, \frac{\epsilon}{d}\right) = 0$$

Despejando Δp,

$$\Delta p = \frac{w}{g}\,V^2\,f_2\left(R_E, \frac{L}{d}, \frac{\epsilon}{d}\right)$$

donde $\rho = w/g$. De aquí, la caída de presión en pérdida de altura sería

$$\frac{\Delta p}{w} = \frac{V^2}{2g}\,(2)\cdot f_2\left(R_E, \frac{L}{d}, \frac{\epsilon}{d}\right)$$

Si lo que se desea es obtener una expresión del tipo de la de Darcy, la experiencia y el análisis indican que la caída de presión es proporcional a la primera potencia de L/d; por tanto,

$$\frac{\Delta p}{w} = \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{L}{d} \cdot 2 \cdot f_3\left(R_E, \frac{\epsilon}{d}\right)$$

que puede ponerse en la forma

$$\frac{\Delta p}{w} = (\text{coeficiente } f)\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

Nota 1

Si el flujo fuera compresible habría que incluir otra magnitud física, el módulo volumétrico de elasticidad E, y el quinto grupo π conduciría a la relación adimensional $\dfrac{E}{\rho V^2}$. Este se escribe normalmente en la forma $\dfrac{V}{\sqrt{E/\rho}}$, que es el número de Mach.

Nota 2

Si la gravedad influye en el problema general del flujo habría que incluir la fuerza de la gravedad como nueva magnitud física, y el sexto número π conduciría a la relación adimensional $\dfrac{V^2}{g L}$. Este grupo se llama número de Froude.

Nota 3

Si en el problema general interviniera también la tensión superficial σ habría que tenerla en cuenta como nueva magnitud física, lo que conduciría a un séptimo grupo π adimensional. El número π tomaría la forma $\dfrac{V^2 L \rho}{\sigma}$, que es el número de Weber.

18. Cuando únicamente influyen la gravedad y la inercia, demostrar que, para modelo y prototipo, la relación de caudales Q es igual a la relación de longitudes elevada a cinco medios.

Solución:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3/T_m}{L_p^3/T_p} = \frac{L_r^3}{T_r}$$

Hay que establecer la relación de tiempos para las condiciones que influyen en el flujo. Las expresiones para la gravedad y las fuerzas de inercia pueden escribirse como sigue

$$\text{Gravedad:} \quad \frac{F_m}{F_p} = \frac{W_m}{W_p} = \frac{w_m}{w_p} \times \frac{L_m^3}{L_p^3} = w_r L_r^3$$

$$\text{Inercia:} \quad \frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \times \frac{L_m^3}{L_p^3} \times \frac{L_r}{T_r^2} = \rho_r L_r^3 \times \frac{L_r}{T_r^2}$$

Igualando las relaciones de fuerzas,

$$w_r L_r^3 = \rho_r L_r^3 \times \frac{L_r}{T_r^2}$$

de la que, despejando la relación de tiempos, se llega a

$$T_r^2 = L_r \times \frac{\rho_r}{w_r} = \frac{L_r}{g_r} \qquad (1)$$

Como g_r es igual a la unidad, la sustitución en la relación de caudales conduce a la expresión buscada

$$Q_r = \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_r^3}{L_r^{1/2}} = L_r^{5/2} \qquad (2)$$

19. Para las condiciones establecidas en el problema precedente obtener (*a*) la relación de velocidades y (*b*) la relación de presiones y la relación de fuerzas.

Solución:

(*a*) Al dividir los dos miembros de la ecuación (*1*) del problema anterior por L_r^2, se obtiene

$$\frac{T_r^2}{L_r^2} = \frac{L_r}{L_r^2\, g_r} \qquad \text{o como} \quad V = \frac{L}{T}, \qquad V_r^2 = L_r\, g_r$$

Pero el valor de g_r puede considerarse igual a la unidad. Esto significa que, para modelo y prototipo, $V_r^2 = L_r$, que puede llamarse la ley de modelos de Froude para la relación de velocidades.

(*b*) Relación de fuerzas para fuerzas de presión $= \dfrac{p_m\, L_m^2}{p_p\, L_p^2} = p_r\, L_r^2.$

Relación de fuerzas para fuerzas de inercia $= \dfrac{\rho_r\, L_r^4}{T_r^2} = w_r\, L_r^3.$

Igualando éstas, se obtiene
$$p_r\, L_r^2 = w_r\, L_r^3 \qquad (1)$$
$$p_r = w_r\, L_r$$

Para los estudios sobre modelos en flujos con superficie libre, los números de Froude en modelo y prototipo han de ser iguales. También han de ser iguales los números de Euler en modelo y prototipo.

Utilizando $V_r^2 = L_r$, la ecuación (*1*) puede ponerse en la forma

$$p_r = w_r\, V_r^2$$

y, como fuerza $F = p\,A$,
$$F_r = p_r\, L_r^2 = w_r\, L_r^3 \qquad (2)$$

20. Desarrollar la ley de modelos de Reynolds para las relaciones de tiempos y de velocidades de líquidos incompresibles.

Solución:

Para configuraciones de flujos solo dependientes de las fuerzas de inercia y viscosas (siendo el resto de influencias despreciables) es necesario calcular estas fuerzas para modelo y prototipo.

Inercia: $\dfrac{F_m}{F_p} = \rho_r\, L_r^3 \times \dfrac{L_r}{T_r^2}$ (del problema precedente)

Viscosidad:
$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\tau_m\, A_m}{\tau_p\, A_p} = \frac{\mu_m\,(dV/dy)_m\, A_m}{\mu_p\,(dV/dy)_p\, A_p} = \frac{\mu_m\,(L_m/T_m \times 1/L_m)\, L_m^2}{\mu_p\,(L_p/T_p \times 1/L_p)\, L_p^2}$$
$$= \frac{\mu_m\, L_m^2/T_m}{\mu_p\, L_p^2/T_p} = \frac{\mu_r\, L_r^2}{T_r}$$

Igualando las dos relaciones de fuerzas, se obtiene $\rho_r \dfrac{L_r^4}{T_r^2} = \dfrac{\mu_r\, L_r^2}{T_r}$ de la cual $T_r = \dfrac{\rho_r\, L_r^2}{\mu_r}.$

Como $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$, se puede poner
$$T_r = \frac{L_r^2}{\nu_r} \qquad (1)$$

Relación de velocidades
$$V_r = \frac{L_r}{T_r} = \frac{L_r}{L_r^2}\,\nu_r = \frac{\nu_r}{L_r} \qquad (2)$$

Escribiendo estas relaciones en función del modelo y prototipo a partir de (*2*), se obtiene

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p} \times \frac{L_p}{L_m}$$

Reuniendo términos para modelo y prototipo se llega a $V_m\, L_m/\nu_m = V_p\, L_p/\nu_p$, igualdad que el lector puede identificar como: Número de Reynolds para el modelo = número de Reynolds para el prototipo.

21. Un aceite de viscosidad cinemática $4{,}70 \times 10^{-5}$ m²/seg va a utilizarse en un prototipo en el que son fuerzas predominantes las debidas a la viscosidad y a la gravedad. También se desea experimentar sobre un modelo a escala de 1 : 5. ¿Qué valor debe tener la viscosidad del líquido del modelo para que tanto el número de Froude como el de Reynolds sean iguales en modelo y prototipo?

Solución:

Mediante las escalas de velocidades de las leyes de Froude y de Reynolds (véanse Problemas 19 y 20) se establece la igualdad

$$(L_r\, g_r)^{1/2} = \nu_r / L_r$$

Ya que $g_r = 1$, $L_r^{3/2} = \nu_r$ y $\nu_r = (1/5)^{3/2} = 0{,}0894$.

Esto significa que $\dfrac{\nu_m}{\nu_p} = 0{,}0894 = \dfrac{\nu_m}{4{,}70 \times 10^{-5}}$ y, por tanto, $\nu_m = 4{,}20 \times 10^{-6}$ m²/seg.

Mediante las escalas de tiempos, aceleraciones y caudales se llegaría a los mismos resultados. Por ejemplo, igualando la relación de tiempos (Problemas 18 y 20) se llega a

$$\frac{L_r^{1/2}}{g_r^{1/2}} = \frac{\rho_r L_r^2}{\mu_r} \quad \text{o, como } g_r = 1, \quad \frac{\mu_r}{\rho_r} = \nu_r = L_r^{3/2}, \text{ como antes.}$$

22. A través de una tubería de 20 cm de diámetro está fluyendo agua a 15° C a una velocidad de 4,0 m/seg. ¿A qué velocidad debe fluir un fuel-oil medio a a 32° C por el interior de una tubería de 10 cm de diámetro para que los dos flujos sean dinámicamente semejantes?

Solución:

Como los flujos en ambas tuberías están sujetos únicamente a las fuerzas debidas a la viscosidad y a la inercia, el criterio de semejanza será la igualdad de los números de Reynolds. Otras propiedades del fluido que circula, tales como la elasticidad, la tensión superficial y las fuerzas gravitatorias, no afectarán a la configuración del flujo. Por tanto, para la semejanza dinámica,

Número de Reynolds para el agua = número de Reynolds para el aceite

$$\frac{V\,d}{\nu} = \frac{V'\,d'}{\nu'}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de las viscosidades en la Tabla 2 del Apéndice,

$$\frac{4{,}0 \times 0{,}2}{1{,}13 \times 10^{-6}} = \frac{V' \times 0{,}1}{2{,}97 \times 10^{-6}}$$

y $V' = 21{,}0$ m/seg para el aceite.

23. A través de una tubería de 60 cm de diámetro está circulando aire a 20° C a una velocidad media de 2,0 m/seg. ¿Cuál debe ser el diámetro de la tubería que al transportar agua a 15° C y a una velocidad de 1,22 m/seg dé lugar a un flujo dinámicamente semejante?

Solución:

Igualando los dos números de Reynolds: $\dfrac{2{,}0 \times 0{,}6}{1{,}49 \times 10^{-5}} = \dfrac{1{,}22 \times d}{1{,}13 \times 10^{-6}}$, $d = 0{,}075$ m $= 7{,}5$ cm

24. Un modelo de submarino a escala 1 : 15 va a ser ensayado en un canal hidrodinámico de agua salada. Si el submarino se mueve a una velocidad de 12,0 mph (millas por hora), ¿a qué velocidad deberá ser arrastrado el modelo para que exista semejanza dinámica?

Solución:

Igualando los números de Reynolds para modelo y prototipo: $\dfrac{12{,}0 \times L}{\nu} = \dfrac{V \times L/15}{\nu}$, $V = 180$ mph.

25. Un modelo de avión a escala 1 : 80 es ensayado en una corriente de aire a 20° C y a una velocidad de 45 m/seg. (*a*) ¿A qué velocidad habrá de arrastrarse el modelo si está totalmente sumergido en agua a 27° C? (*b*) ¿Qué arrastre sobre el prototipo en el aire corresponderá a una resistencia sobre el modelo en el agua de 0,55 kg?

Solución:

(*a*) Igualando los números de Reynolds, $\dfrac{45 \times L}{1{,}49 \times 10^{-5}} = \dfrac{V \times L}{0{,}864 \times 10^{-6}}$ o $V = 2{,}60$ m/seg en el agua.

(*b*) Como p varía proporcionalmente a ρV^2, igualando los números de Euler, se obtiene

$$\frac{\rho_m V_m^2}{p_m} = \frac{\rho_p V_p^2}{p_p} \quad \text{o} \quad \frac{p_m}{p_p} = \frac{\rho_m V_m^2}{\rho_p V_p^2}$$

Pero las fuerzas que actúan son (presión × área), es decir, $p L^2$; de aquí

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{p_m L_m^2}{p_p L_p^2} = \frac{\rho_m V_m^2 L_m^2}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

o

$$F_r = \rho_r V_r^2 L_r^2 \quad \text{[ecuación (6), página 51].}$$

Para obtener la velocidad del prototipo en el aire se igualan los números de Reynolds, con lo que se obtiene

$$\frac{V_m L_m}{\nu_{aire}} = \frac{V_p L_p}{\nu_{aire}} \quad \text{o} \quad \frac{45 \times L_p/80}{\nu_{aire}} = \frac{V_p L_p}{\nu_{aire}} \quad \text{y} \quad V_p = 0{,}563 \text{ m/seg}$$

Por tanto, $$\frac{0{,}55}{F_p} = \left(\frac{102}{0{,}123}\right)\left(\frac{2{,}60}{0{,}563}\right)^2\left(\frac{1}{80}\right)^2 \quad \text{y} \quad F_p = 0{,}200 \text{ kg}$$

26. Un modelo de torpedo es ensayado en un canal hidrodinámico a una velocidad de 24,0 m/seg. Se espera que el prototipo se mueva a una velocidad de 6,0 m/seg en agua a 15° C. (*a*) ¿A qué escala se ha construido el modelo? (*b*) ¿A qué velocidad se ensayará el modelo en un túnel aerodinámico si la presión es de 20 atmósferas y la temperatura constante de 27° C?

Solución:

(*a*) Igualando los números de Reynolds para prototipo y modelo, $\dfrac{6{,}0 \times L}{\nu} = \dfrac{24{,}0 \times L/x}{\nu}$ o bien $x = 4$. La escala geométrica del modelo es 1:4.

(*b*) La viscosidad absoluta para el aire, de la Tabla 1(*B*), es $1{,}88 \times 10^{-6}$ kg seg/m² y la densidad $\rho = \dfrac{w}{g} = \dfrac{p}{g R T} = \dfrac{20 \times 1{,}033 \times 10^4}{9{,}8(29{,}3)(273 + 27)} = 2{,}410$ UTM/m³ (o bien $\rho = 20$ veces el valor de la Tabla 1(*B*) a 27° C = $20 \times 0{,}120 = 2{,}40$). Por tanto,

$$\frac{6{,}0 \times L}{1{,}13 \times 10^{-6}} = \frac{V \times L/4}{1{,}88 \times 10^{-6}/2{,}410} \quad \text{y} \quad V = 16{,}50 \text{ m/seg}$$

27. Una bomba centrífuga, girando a 1200 rpm, bombea un aceite lubricante medio a 15° C. Se va a ensayar un modelo de la bomba que utiliza aire a 20° C. Si el diámetro del modelo es 3 veces mayor que el del prototipo, ¿a qué velocidad debe girar el modelo?

Solución:

Utilizando como velocidades en los números de Reynolds las velocidades periféricas (que son iguales al radio por la velocidad angular en radianes/seg), se obtiene

$$\frac{(d/2)\,\omega_p\,(d)}{17{,}5 \times 10^{-5}} = \frac{(3d/2)\,\omega_m\,(3d)}{1{,}49 \times 10^{-5}}$$

De aquí, $\omega_p = 106\omega_m$ y velocidad de giro del modelo = 1200/106 = 11,3 rpm.

28. Un ala de avión de 90 cm de cuerda se ha de mover a 90 mph en el aire. En el túnel aerodinámico se va a ensayar un modelo de 7,50 cm de cuerda con una velocidad del aire de 108 mph. Para una temperatura del aire en ambos casos de 20° C, ¿cuál debe ser la presión en el túnel aerodinámico?

Solución:

Igualando los números de Reynolds, en modelo y prototipo, y utilizando las mismas unidades para las velocidades.

$$\frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p}, \qquad \frac{108 \times 0{,}075}{\nu_{túnel}} = \frac{90 \times 0{,}90}{1{,}49 \times 10^{-5}}, \qquad \nu_{túnel} = 1{,}49 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$$

La presión que da lugar a esta viscosidad cinemática a 20° C puede calcularse recordando que la viscosidad absoluta no se ve afectada por los cambios de presión. La viscosidad cinemática es igual a la viscosidad absoluta dividida por la densidad. Pero la densidad aumenta con la presión (a temperatura constante); por tanto,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{y} \quad \frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{1{,}49 \times 10^{-5}}{1{,}49 \times 10^{-6}} = 10{,}0$$

De aquí, la densidad del aire en el túnel debe ser diez veces mayor que la normal (20° C) del aire y, por tanto, la presión del aire en el túnel habrá de ser de diez atmósferas.

29. Un barco cuyo casco tiene una longitud de 140 m ha de moverse a 7,50 m/seg. (*a*) Calcular el número de Froude N_F. (*b*) Para la semejanza dinámica, ¿a qué velocidad debe remolcarse en agua un modelo construido a una escala 1 : 30?

Solución:

(*a*)
$$N_F = \frac{V}{\sqrt{g\,L}} = \frac{7{,}50}{\sqrt{9{,}8 \times 140}} = 0{,}203$$

(*b*) Cuando las configuraciones de los flujos, con contornos geométricamente semejantes, se ven influenciadas por las fuerzas de inercia y las gravitatorias, el número de Froude es el grupo adimensional significativo en los estudios sobre modelo. Por tanto,

Número de Froude del prototipo = número de Froude del modelo

o
$$\frac{V}{\sqrt{g\,L}} = \frac{V'}{\sqrt{g'\,L'}}$$

Como $g = g'$ en todos los casos prácticos, puede escribirse

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = \frac{V'}{\sqrt{L'}}, \qquad \frac{7{,}50}{\sqrt{140}} = \frac{V'}{\sqrt{140/30}}, \qquad V' = 1{,}37 \text{ m/seg en el modelo}$$

30. A través de una acequia de 60 cm de anchura se va a construir un modelo de aliviadero a escala 1 : 25. El prototipo tiene 12,5 m de altura y se espera una altura de carga máxima de 1,50 m. (*a*) ¿Qué altura y qué carga deben utilizarse en el modelo? (*b*) Si el caudal vertido sobre el modelo es de 20 l/seg con una carga de 6,0 cm, ¿qué caudal por metro de prototipo puede esperarse? (*c*) Si en el modelo aparece un resalto hidráulico de 2,50 cm, ¿qué altura tendrá el resalto en el prototipo? (*d*) Si la energía disipada en el resalto hidráulico del modelo es de 0,15 CV, ¿cuál será la energía disipada en el prototipo?

Solución:

(*a*) Como $\dfrac{\text{longitudes en modelo}}{\text{longitudes en prototipo}} = \dfrac{1}{25}$, altura del modelo $= \dfrac{1}{25} \times 12{,}50 = 0{,}50$ m y

altura de carga sobre el modelo $= \dfrac{1}{25} \times 1{,}50 = 0{,}06$ m $= 6$ cm.

(*b*) Por predominar las fuerzas gravitatorias, del Problema 18, $Q_r = L_r^{5/2}$, y de aquí

$$Q_p = \frac{Q_m}{L_r^{5/2}} = 20 \times 10^{-3}(25 \times 25 \times 5) = 62{,}50\ \text{m}^3/\text{seg}$$

Este caudal puede esperarse en 0,6 × 25 = 15 m de longitud del prototipo. Por tanto, caudal por metro de prototipo = 62,5/15 = 4,17 m^3/seg.

(c) $$\frac{h_m}{h_p} = L_r \quad \text{o} \quad h_p = \frac{h_m}{L_r} = \frac{2{,}5}{1/25} = 62{,}50\ \text{cm (altura del resalto)}$$

(d) Relación de potencias $P_r = (\text{kgm/seg})_r = \dfrac{F_r L_r}{T_r} = \dfrac{w_r L_r^3 L_r}{\sqrt{L_r/g_r}}$. Pero $g_r = 1$ y $w_r = 1$. De aquí,

$$\frac{P_m}{P_p} = L_r^{7/2} = (\frac{1}{25})^{7/2} \quad \text{y} \quad P_p = P_m(25)^{7/2} = 0{,}15(25)^{7/2} = 11.700\ \text{CV}$$

31. El modelo de un recipiente se vacía en 4 minutos al abrir una compuerta de tajadera. El modelo está construido a una escala 1 : 225. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el prototipo?

Solución:

Como la fuerza debida a la gravedad es la dominante, la relación de las Q, por el Problema 18, es igual a $L_r^{5/2}$.

Además, $Q_r = \dfrac{Q_m}{Q_p} = \dfrac{L_m^3}{L_p^3} : \dfrac{T_m}{T_p}$. Por tanto, $L_r^{5/2} = L_r^3 \times \dfrac{T_p}{T_m}$ y $T_p = T_m/L_r^{1/2} = 4(225)^{1/2} = 60$ minutos.

32. Un espigón rectangular en un río tiene 1,20 m de anchura por 3,60 m de longitud, siendo la profundidad media del agua de 2,70 m. Se construye un modelo a una escala de 1 : 16. Sobre el modelo se mantiene un flujo de una velocidad media de 0,75 m/seg y la fuerza que actúa sobre el modelo es de 400 g. (*a*) ¿Cuáles son los valores de la velocidad y de la fuerza sobre el prototipo? (*b*) Si delante del modelo se forma una ola estacionaria de 5,0 cm de altura, ¿cuál será la altura esperada de la ola que se forme en la tajamar del espigón? (*c*) ¿Cuál es el valor del coeficiente de arrastre o resistencia?

Solución:

(*a*) Como predominan las fuerzas debidas a la gravedad, del Problema 19 se obtiene

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{L_r} \quad \text{y} \quad V_p = \frac{0{,}75}{(1/16)^{1/2}} = 3{,}0\ \text{m/seg}$$

Además, $$\frac{F_m}{F_p} = w_r L_r^3 \quad \text{y} \quad F_p = \frac{0{,}40}{1{,}0(1/16)^3} = 1640\ \text{kg}$$

(*b*) Como $\dfrac{V_m}{V_p} = \dfrac{\sqrt{L_m}}{\sqrt{L_p}}$, $\sqrt{h_p} = \sqrt{0{,}05} \times \dfrac{3{,}00}{0{,}75}$ y $h_p = 0{,}90$ m de altura de la ola.

(*c*) Fuerza de arrastre $= C_D \rho A \dfrac{V^2}{2}$, $0{,}40 = C_D(102)(\dfrac{1{,}2}{16} \times \dfrac{2{,}7}{16})\dfrac{(0{,}75)^2}{2}$ y $C_D = 1{,}10$.

Si se hubieran utilizado los valores del prototipo para estos cálculos, se habría obtenido lo siguiente:

$$1640 = C_D(102)(1{,}2 \times 2{,}7)\frac{(3{,}0)^2}{2} \quad \text{y} \quad C_D = 1{,}10, \text{ como era de esperar}$$

33. La resistencia medida en agua dulce, presentada a un modelo de barco de 2,50 m, moviéndose a una velocidad de 2,0 m/seg, fue de 4,40 kg. (*a*) ¿Cuál será la velocidad del prototipo de 40 m? (*b*) ¿Cuál será la fuerza necesaria para mover a esta velocidad el barco en agua salada?

Solución:

(*a*) Como predominan las fuerzas debidas a la gravedad, se obtiene

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{L_r} = \sqrt{8/128} \quad \text{y} \quad V_p = \frac{2{,}0}{(1/16)^{1/2}} = 8{,}0\ \text{m/seg}$$

(*b*) $$\frac{F_m}{F_p} = w_r L_r^3 \quad \text{y} \quad F_p = \frac{4{,}40}{(1000/1025)(1/16)^3} = 18.470 \text{ kg}$$

Este último valor puede encontrarse mediante la fórmula que da la resistencia o fuerza de arrastre: Resistencia $= C_f \rho \dfrac{A}{2} V^2$.

Para el modelo, $$4{,}40 = C_f \frac{1000}{2g} \frac{A}{(16)^2} (2{,}0)^2 \quad \text{y} \quad \frac{C_f A}{2g} = \frac{4{,}4(16)^2}{1000(2{,}0)^2} \qquad (1)$$

Para el prototipo, $$\text{fuerza} = C_f \frac{1025}{2g} (8{,}0)^2 \quad \text{y} \quad \frac{C_f A}{2g} = \frac{\text{fuerza}}{1025(8{,}0)^2} \qquad (2)$$

Como el valor de C_f ha de ser el mismo para modelo y prototipo, al igualar (*1*) y (*2*) se obtiene

$$\frac{4{,}40(16)^2}{1000(2{,}0)^2} = \frac{\text{fuerza}}{1025(8{,}0)^2} \quad \text{de la cual} \quad \text{fuerza} = 18.470 \text{ kg, como antes}$$

34. (*a*) Calcular la escala geométrica del modelo cuando sea necesario tener en cuenta las fuerzas viscosas y gravitatorias para asegurar la semejanza. (*b*) ¿Cuál será la escala geométrica del modelo si el aceite empleado en el ensayo sobre modelo tiene una viscosidad cinemática de 10×10^{-5} m²/seg y el líquido en el prototipo tiene una viscosidad de 80×10^{-5} m²/seg? (*c*) ¿Cuáles serán las relaciones de velocidades y caudales para estos líquidos si la escala geométrica modelo-prototipo es 1 : 4?

Solución:

(*a*) En esta situación deben satisfacerse simultáneamente las igualdades de los números de Reynolds y de Froude. Se igualarán las relaciones de velocidades para cada una de las leyes de modelos. Mediante los resultados obtenidos en los Problemas 19 y 20,

$$\text{Número de Reynolds } V_r = \text{número de Froude } V_r$$

$$(\nu/L)_r = \sqrt{L_r g_r}$$

Como $g_r = 1$, se obtiene $L_r = \nu_r^{2/3}$.

(*b*) Utilizando la relación de longitudes anterior, $L_r = \left(\dfrac{10 \times 10^{-5}}{80 \times 10^{-5}}\right)^{2/3} = \dfrac{1}{4}$. La escala del modelo es 1:4.

(*c*) Mediante la ley de modelos de Froude (véanse Problemas 18 y 19),

$$V_r = \sqrt{L_r g_r} = \sqrt{L_r} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad Q_r = L_r^{5/2} = (\tfrac{1}{4})^{5/2} = \tfrac{1}{32}$$

O mediante la ley de modelos de Reynolds (véase Problema 20),

$$V_r = \frac{\nu_r}{L_r} = \frac{10/80}{1/4} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad Q_r = A_r V_r = L_r^2 \times \frac{\nu_r}{L_r} = L_r \nu_r = \frac{1}{4}\left(\frac{10}{80}\right) = \frac{1}{32}$$

Problemas propuestos

35. Comprobar dimensionalmente la expresión $\tau = \mu\,(dV/dy)$.

36. Demostrar mediante los métodos del análisis dimensional que la energía cinética de un cuerpo es igual a $K\,M\,V^2$

37. Mediante los métodos del análisis dimensional probar que la fuerza centrífuga viene dada por $K\,M\,V^2/r$.

38. Un cuerpo cae libremente una distancia s partiendo del reposo. Desarrollar una ecuación para la velocidad.
Sol. $V = K\sqrt{s\,g}$

39. Un cuerpo cae libremente durante un tiempo T partiendo del reposo. Desarrollar una ecuación para la velocidad
Sol. $V = K\,g\,T$

40. Desarrollar una expresión que dé la frecuencia de un péndulo simple, suponiendo que es función de la longitud y de la masa del péndulo y de la aceleración de la gravedad. *Sol.* Frecuencia $= K\sqrt{g/L}$

41. Suponiendo que el caudal Q sobre un vertedero rectangular varía directamente con la longitud L y es función de la altura de carga total H y de la aceleración de la gravedad g, establecer la fórmula del vertedero.
Sol. $Q = K\,L\,H^{3/2}\,g^{1/2}$

42. Establecer la fórmula que da la distancia recorrida s por un cuerpo que cae libremente, suponiendo que dicha distancia depende de la velocidad inicial V, el tiempo T y la aceleración de la gravedad g.
Sol. $s = K\,V\,T\,(g\,T/V)^b$

43. Establecer la expresión del número de Froude al ser éste función de la velocidad V, la aceleración de la gravedad g y de la longitud L. *Sol.* $N_F = K\,(V^2/L\,g)^{-c}$

44. Establecer la expresión del número de Weber si es función de la velocidad V, la densidad ρ, de la longitud L y de la tensión superficial σ. *Sol.* $N_W = K\,(\rho\,L\,V^2/\sigma)^{-d}$

45. Establecer un número adimensional que sea función de la aceleración de la gravedad g, la tensión superficial σ, la viscosidad absoluta μ y la densidad ρ. *Sol.* Número $= K\,(\sigma^3\rho/g\mu^4)^d$

46. Suponiendo que la fuerza de arrastre o resistencia de un barco es función de la viscosidad absoluta μ y de la densidad ρ del fluido, de la velocidad V, la aceleración de la gravedad g y del tamaño (longitud L) del barco, establecer la fórmula que da la resistencia. *Sol.* Fuerza $= K\,(R_E^{-a}\,N_F^{-d}\,\rho\,V^2\,L^2)$

47. Resolver el Problema 9 incluyendo los efectos de la compresibilidad mediante la magnitud *celeridad* c, velocidad de propagación del sonido. *Sol.* Fuerza $= K'\,R_E^{-b}\,N_M^{-e}\,\rho\,A\,V^2/2$

48. Demostrar que, para orificios geométricamente semejantes, la relación de velocidades es esencialmente igual a la raíz cuadrada de la relación de alturas de carga.

49. Demostrar que las relaciones de tiempos y de velocidades, cuando la magnitud predominante es la tensión superficial, vienen dadas por

$$T_r = \sqrt{L_r^3 \times \frac{\rho_r}{\sigma_r}} \quad \text{y} \quad V_r = \sqrt{\frac{\sigma_r}{L_r\,\rho_r}} \quad \text{respectivamente}$$

50. Demostrar que las relaciones de tiempos y velocidades, cuando los efectos predominantes son los elásticos, vienen dadas por

$$T_r = \frac{L_r}{\sqrt{E_r/\rho_r}} \quad \text{y} \quad V_r = \sqrt{\frac{E_r}{\rho_r}} \quad \text{respectivamente}$$

51. El modelo de un aliviadero se construye a una escala 1:36. Si en el modelo la velocidad y caudal desaguado son, respectivamente, 0,40 m/seg y 62 l/seg, ¿cuáles son los valores correspondientes en el prototipo?
Sol. 2,40 m/seg, 482 m^3/seg

52. ¿A qué velocidad debe ensayarse en un túnel aerodinámico un modelo de ala de avión de 15 cm de cuerda para que el número de Reynolds sea el mismo que en el prototipo de 90 cm de cuerda y que se mueve a una velocidad de 150 km/h? En el túnel el aire está a la presión atmosférica. *Sol.* 900 km/h

53. A través de una tubería de 15 cm de diámetro fluye un aceite ($\nu = 5{,}65 \times 10^{-6}$ m^2/seg) a una velocidad de 4 m/seg. ¿A qué velocidad debe circular agua a 15° C a través de una tubería de 30 cm de diámetro para que los números de Reynolds sean iguales? *Sol.* 0,40 m/seg

54. A 15° C fluye gasolina a 4 m/seg por una tubería de 10 cm. ¿Qué diámetro debe tener una tubería que transporta agua a 15° C a una velocidad de 2 m/seg para que los números de Reynolds sean los mismos?
Sol. 33,3 cm

55. Agua a 15° C fluye a 4 m/seg a través de una tubería de 15 cm. Para que exista semejanza dinámica, (*a*) ¿a qué velocidad debe fluir un fuel-oil medio a 27° C por una tubería de 30 cm? (*b*) ¿Qué diámetro de tubería se utilizaría si la velocidad del fuel-oil fuera de 20 m/seg? *Sol.* 5,24 m/seg, $d = 7{,}86$ cm

56. Un modelo es ensayado en atmósfera de aire normal a 20° C y a una velocidad de 30,0 m/seg. ¿A qué velocidad debe ensayarse sumergido totalmente en el agua a 15° C de un canal hidrodinámico para que se satisfagan las condiciones de semejanza dinámica? *Sol.* 2,28 m/seg

57. Un navío de superficie de 155 m de longitud ha de moverse a 7 m/seg. ¿A qué velocidad ha de ensayarse un modelo geométricamente semejante de 2,50 m de longitud? *Sol.* 0,89 m/seg

58. ¿Qué fuerza por metro de longitud se ejercerá sobre un muro de contención del agua de mar si un modelo a escala 1:36 de una longitud de 1 m experimenta una fuerza de las olas de 12 kg? *Sol.* 15.550 kg/m

59. Un cuerpo anclado está sumergido en agua dulce a 15° C, que fluye a una velocidad de 2,50 m/seg. La resistencia medida sobre un modelo a escala 1:5 en un túnel aerodinámico en condiciones normales es de 2 kg. ¿Qué fuerza actúa sobre el prototipo si se dan las condiciones de la semejanza dinámica? *Sol.* 9,60 kg

60. Determinar las expresiones de las relaciones o escalas de velocidades y pérdidas de carga entre modelo y prototipo para un flujo en que las fuerzas dominantes son las viscosas y las debidas a la presión.
Sol. $V_r = p_r L_r/\mu_r$ y Perd. $H_r = V_r \mu_r / w_r L_r$

61. Obtener una expresión que dé el coeficiente de fricción f si se sabe que depende del diámetro de la tubería d, de la velocidad media V, de la densidad del fluido ρ, de la viscosidad del fluido μ y de la rugosidad absoluta de la tubería ϵ. Utilizar el teorema de Pi de Buckingham. *Sol.* $f = \phi\,(R_E, \epsilon/d)$

Capítulo 6

Fundamentos del flujo de fluidos

INTRODUCCION

Del Capítulo 1 al 4 se han considerado los fluidos en reposo y la única propiedad significativa el peso del fluido. En este capítulo se expondrán conceptos adicionales, requeridos para el estudio movimiento de los fluidos. El flujo de fluidos es complejo y no siempre puede ser estudiado de for exacta mediante el análisis matemático. Contrariamente a lo que sucede con los sólidos, las partícu de un fluido en movimiento pueden tener diferentes velocidades y estar sujetas a distintas acelerac nes. Tres principios fundamentales que se aplican al flujo de fluidos son:

(*a*) el principio de conservación de la masa, a partir del cual se establece la ecuación de cc tinuidad,

(*b*) el principio de la energía cinética, a partir del cual se deducen ciertas ecuaciones aplicab al flujo, y

(*c*) el principio de la cantidad de movimiento, a partir del cual se deducen ecuaciones para calc lar las fuerzas dinámicas ejercidas por los fluidos en movimiento (véanse Capítulos 11 y 1.

FLUJO DE FLUIDOS

El flujo de los fluidos puede ser permanente o no permanente; uniforme o no uniforme; lamin o turbulento (Capítulo 7); unidimensional, bidimensional o tridimensional, y rotacional o irrotacion

Verdaderamente, el flujo unidimensional de un fluido incompresible tiene lugar cuando el módu dirección y sentido de la velocidad en todos los puntos son idénticos. No obstante, el análisis cor flujo unidimensional es aceptable cuando al tomar como única dimensión espacial, de la que depe den todas las características, la línea de corriente central del flujo pueden considerarse como desp ciables las variaciones de las velocidades y aceleraciones en dirección normal a dicha línea de corrie te. En tales casos, se consideran como representativas del flujo completo los valores medios de la locidad, la presión y la elevación, despreciando las variaciones menores. Por ejemplo, el flujo en tuber curvas se analiza mediante los principios del flujo unidimensional, a pesar de que la geometría es dimensional y la velocidad varía en las secciones rectas de la tubería.

Un flujo bidimensional tiene lugar cuando las partículas fluidas se mueven en planos o en plar paralelos de forma que la configuración de las líneas de corriente es idéntica en cada plano.

Para un fluido ideal en que no existen tensiones cortantes no pueden transmitirse pares y no tier lugar movimientos rotacionales de las partículas fluidas alrededor de su propio centro de graved Tales flujos ideales, que admiten una representación muy intuitiva mediante la red de corriente, se llam flujos irrotacionales.

En el Capítulo 4, los líquidos en depósitos que están girando constituyen un ejemplo de flujo ro cional en los que la velocidad de cada partícula varía en proporción directa a la distancia del cen de rotación.

FLUJO PERMANENTE

El flujo permanente tiene lugar cuando, en un punto cualquiera, la velocidad de las sucesivas partículas que ocupan ese punto en los sucesivos instantes es la misma. Por tanto, la velocidad es constante respecto del tiempo o bien $\partial V/\partial t = 0$, pero puede variar de un punto a otro, es decir, ser variable respecto de las coordenadas espaciales. Este supuesto da por sentado que las otras variables o magnitudes del fluido y del flujo no varían con el tiempo o $\partial p/\partial t = 0$, $\partial \rho/\partial t = 0$, $\partial Q/\partial t = 0$, etc. La mayoría de los problemas técnicos prácticos implican condiciones permanentes del flujo. Por ejemplo, el transporte de líquidos bajo condiciones constantes de altura de carga o el vaciado de depósitos por orificios, bajo altura de carga constante, ilustran flujos permanentes. Estos flujos pueden ser uniformes o no uniformes.

La complejidad de los flujos no permanentes hacen que su estudio caiga fuera del propósito de un texto de introducción a la mecánica de los fluidos. Un flujo es no permanente cuando las condiciones en un punto cualquiera del fluido varían con el tiempo o bien $\partial V/\partial t \neq 0$. El Problema 7 da a conocer una ecuación general para el flujo no permanente y en el Capítulo 9 se presentarán unos pocos problemas sencillos, en los cuales la altura de carga y el caudal varían con el tiempo.

FLUJO UNIFORME

El flujo uniforme tiene lugar cuando el módulo, la dirección y el sentido de la velocidad no varían de un punto a otro del fluido, es decir, $\partial V/\partial s = 0$. Este supuesto implica que las otras magnitudes físicas del fluido no varían con las coordenadas espaciales o bien $\partial y/\partial s = 0$, $\partial \rho/\partial s = 0$, $\partial p/\partial s = 0$, etc. El flujo de líquidos bajo presión a través de tuberías de diámetro constante y gran longitud es uniforme tanto si el régimen es permanente como si es no permanente.

El flujo es no uniforme cuando la velocidad, la profundidad, la presión, etc., varían de un punto a otro en la región del flujo, es decir, $\partial V/\partial s \neq 0$, etc. (Véase Capítulo 10.)

LINEAS DE CORRIENTE

Las líneas de corriente son curvas imaginarias dibujadas a través de un fluido en movimiento y que indican la dirección de éste en los diversos puntos del flujo fluido. La tangente en un punto de la curva representa la dirección instantánea de la velocidad de las partículas fluidas en dicho punto. Las tangentes a las líneas de corriente pueden representar de esta forma la dirección media de la velocidad. Como la componente de la velocidad normal a la línea de corriente es nula, queda claro que no existe en ninguno de sus puntos flujo perpendicular a la línea de corriente.

TUBOS DE CORRIENTE

Un tubo de corriente está constituido por una región parcial del flujo fluido delimitada por una familia de líneas de corriente, que lo confinan. Si la sección recta del tubo de corriente es suficientemente pequeña, la velocidad en el punto medio de una sección cualquiera puede considerarse como la velocidad media en dicha sección. El concepto de tubo de corriente se utilizará para deducir la ecuación de continuidad en el caso de fluido incompresible, o régimen permanente y unidimensional (Problema 1).

ECUACION DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad es una consecuencia del principio de conservación de la masa. Para un flujo permanente, la masa de fluido que atraviesa cualquier sección de una corriente de fluido, por unidad de tiempo, es constante. Esta puede calcularse como sigue

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \text{constante} \qquad (1)$$

o

$$w_1 A_1 V_1 = w_2 A_2 V_2 \qquad \text{(en kg/seg)} \qquad (2)$$

Para fluidos *incompresibles* y para todos los casos prácticos en que $w_1 = w_2$, la ecuación se transforma en

$$Q = A_1\,V_1 = A_2\,V_2 = \text{constante} \qquad (\text{en m}^3/\text{seg}) \tag{3}$$

donde A_1 y V_1 son, respectivamente, el área de la sección recta en m^2 y la velocidad media de la corriente en m/seg en la sección 1, con significado análogo en la sección 2. (Véase Problema 1.) El caudal se mide normalmente en m^3/seg o bien en l/seg. En los Estados Unidos de Norteamérica en el abastecimiento de ciudades se emplea frecuentemente como unidad el millón de galones por día (mgd).

La ecuación de continuidad para un flujo permanente incompresible bidimensional es

$$A_{n_1}\,V_1 = A_{n_2}\,V_2 = A_{n_3}\,V_3 = \text{constante} \tag{4}$$

donde las magnitudes A_n representan las áreas normales a los respectivos vectores velocidad (véanse Problemas 10 y 11).

La ecuación de continuidad para flujos tridimensionales se deducirá en el Problema 7, para régimen permanente y no permanente. Para régimen permanente se reducirá la ecuación general para flujos uni y bidimensionales.

RED DE CORRIENTE

Las redes de corriente se dibujan para representar la configuración del flujo en casos de flujos bidimensionales y en algunos casos también en tridimensionales. La red de corriente está formada por (*a*) una familia de líneas de corriente espaciadas de tal forma que el caudal q es el mismo entre cada dos pares de líneas y (*b*) otra familia de curvas ortogonales a las líneas de corriente, y espaciadas de tal forma que la separación entre ellas es igual a la separación entre las líneas de corriente adyacentes. Para describir completamente un flujo, con condiciones de contorno dadas, se requiere un número infinito de líneas de corriente. No obstante, el número de líneas de corriente empleadas prácticamente es el mínimo necesario para obtener la precisión deseada.

Aunque la técnica del trazado de la red de corriente se sale del propósito de un texto de introducción, el significado de dicha red de corriente sí es importante (véanse Problemas 13 y 14). Cuando se ha obtenido la red de corriente para una forma de los contornos que limitan el flujo, dicha red puede utilizarse para todos los flujos irrotacionales en tanto que los contornos sean geométricamente semejantes.

ECUACION DE LA ENERGIA

Se obtiene la ecuación de energía al aplicar al flujo fluido el principio de conservación de la energía. La energía que posee un fluido en movimiento está integrada por la energía interna y las energías debidas a la presión, a la velocidad y a su posición en el espacio. En la dirección del flujo, el principio de la energía se traduce en la siguiente ecuación, al hacer el balance de la misma:

$$\begin{matrix}\text{Energía en la}\\ \text{sección 1}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Energía}\\ \text{añadida}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Energía}\\ \text{perdida}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Energía}\\ \text{extraída}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Energía en la}\\ \text{sección 2}\end{matrix}$$

Esta ecuación, en los flujos permanentes de fluidos incompresibles con variaciones en su energía interna es despreciable, se reduce a

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) + H_A - H_L - H_E = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) \tag{5}$$

La ecuación anterior se conoce con el nombre de *teorema de Bernoulli*. En el Problema 20 se dará una demostración de la ecuación (*5*) y las modificaciones para adaptarla al caso de fluidos compresibles.

Las unidades de cada término son kgm/kg de fluido o bien metros de fluido. Prácticamente, todos los problemas que entrañan flujos de líquidos se resuelven básicamente con esta ecuación. El flujo de gases, en muchos casos, va acompañado de transferencia de calor y se necesita la aplicación de los principios de la termodinámica, lo que se sale fuera del propósito de este libro.

ALTURA DE VELOCIDAD

La altura de velocidad representa la energía cinética por unidad de peso que existe en un punto en particular. Si la velocidad en una sección recta fuera uniforme, la altura de velocidad calculada con esta velocidad uniforme (o velocidad media) daría la energía cinética correcta por unidad de peso del fluido. Pero, en general, la distribución de velocidades no es uniforme. La energía cinética verdadera se determina por integración de las energías cinéticas diferenciales de una a otra línea de corriente (véase Problema 16). El factor de corrección α de la energía cinética, por el que hay que multiplicar el término $V_{av}^2/2g$ viene dado por la expresión

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA \qquad (6)$$

donde V = velocidad media en la sección recta
v = velocidad en un punto genérico de la sección recta
A = área de la sección recta.

Teóricamente puede verse que $\alpha = 1{,}0$ para una distribución uniforme de velocidades, $\alpha = 1{,}02$ a 1,15 para flujos turbulentos y $\alpha = 2{,}00$ para flujo laminar. En la mayoría de los cálculos en la mecánica de fluidos se toma α igual a 1,0, lo que no introduce serios errores en los resultados ya que la altura de velocidad representa, por lo general, un pequeño porcentaje de la altura total (energía).

APLICACION DEL TEOREMA DE BERNOULLI

La aplicación del teorema de Bernoulli debe hacerse de forma racional y sistemática. El procedimiento sugerido es el siguiente:

(1) Dibujar un esquema del sistema, seleccionando y marcando cada una de las secciones rectas bajo consideración.
(2) Aplicar la ecuación de Bernoulli en la dirección del flujo. Seleccionar el plano de referencia para cada una de las ecuaciones escritas. Se escoge para esto el punto de menor elevación para que no existan signos negativos, reduciendo así el número de errores.
(3) Calcular la energía aguas arriba en la sección 1. La energía se mide en kgm/kg que se reducen en definitiva a metros de fluido. En los líquidos, la altura de presión puede expresarse en unidades manométricas o absolutas, manteniendo las mismas unidades para la altura de presión en la sección 2. Para los líquidos resulta más sencillo utilizar unidades manométricas, por lo que se usarán a lo largo de todo el libro. Deben utilizarse alturas de presión absoluta cuando no es constante el peso específico w. Como en la ecuación de continuidad, V_1 es la velocidad media en la sección, sin apreciable pérdida de precisión.
(4) Añadir, en metros de fluido, toda energía adicionada al fluido mediante cualquier dispositivo mecánico, tal como bombas.
(5) Restar, en metros de fluido, cualquier energía perdida durante el flujo.
(6) Restar, en metros de fluido, cualquier energía extraída mediante dispositivos mecánicos, tal como turbinas.
(7) Igualar la anterior suma algebraica a la suma de las alturas de presión, de velocidad y topográfica o elevación en la sección 2.
(8) Si las dos alturas de velocidad son desconocidas, relacionarlas mediante la ecuación de continuidad.

LINEA DE ENERGIA O DE ALTURAS TOTALES

La línea de alturas totales es la representación gráfica de la energía de cada sección. Para cada ción representativa puede representarse, respecto de un plano de referencia, la energía total (como v lineal en metros de fluido) y la línea obtenida de esta forma es de gran ayuda en muchos problemas flujos. La línea de energías totales tiene una pendiente decreciente (cae) en el sentido del flujo, exce en las secciones donde se añade energía mediante dispositivos mecánicos.

LINEA DE ALTURAS PIEZOMETRICAS

La línea de alturas piezométricas está situada por debajo de la línea de alturas totales en una c tidad igual a la altura de velocidad en la sección correspondiente. Las dos líneas son paralelas para to los tramos en que las secciones rectas tienen la misma área. La ordenada entre el eje de la corrient la línea de alturas piezométricas es igual a la altura de presión en la sección en cuestión.

POTENCIA

La potencia se calcula multiplicando el caudal en peso, kg/seg, (wQ) por la energía H en kgm/ Así resulta la ecuación

$$\text{Potencia } P = w\,Q\,H = \text{kg/m}^3 \times \text{m}^3\text{/seg} \times \text{kgm/kg} = \text{kgm/seg}$$
$$\text{Potencia en CV} = w\,Q\,H/75.$$

Problemas resueltos

1. Deducir la ecuación de continuidad para un flujo permanente en el caso (a) de un fluido compresible y (b) de un fluido incompresible.

Solución:

(a) Se considera un flujo a través de un tubo de corriente, siendo las secciones 1 y 2 normales a las líneas de corriente que forman el tubo. Para un valor de la densidad ρ_1 y una velocidad normal V_1, el caudal en masa por unidad de tiempo que atraviesa la sección 1 es $\rho_1 V_1\, dA_1$, ya que $V_1\, dA_1$ es el volumen por unidad de tiempo. Análogamente, el caudal en masa que atraviesa la sección 2 es $\rho_2 V_2\, dA_2$. Como en un flujo permanente la masa no puede variar con el tiempo, y como no hay paso de fluido a través de la superficie que contornea el tubo de corriente, el caudal en masa a través del tubo de corriente es constante. Por tanto,

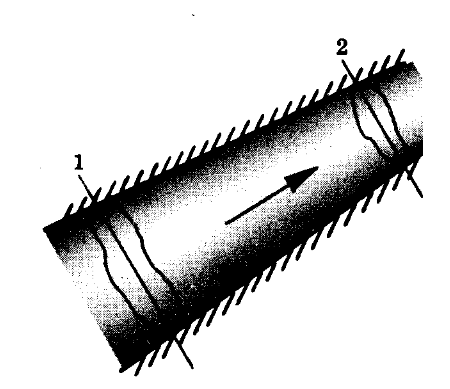


Fig. 6-1

$$\rho_1 V_1\, dA_1 = \rho_2 V_2\, dA_2$$

Las densidades ρ_1 y ρ_2 se mantienen constantes en cada sección genérica dA, y las velocidades V_1 y V_2 presentan las velocidades del fluido en el tubo de corriente en las secciones 1 y 2, respectivamente. De aq

$$\rho_1 V_1 \int_{A_1} dA_1 = \rho_2 V_2 \int_{A_2} dA_2$$

Integrando $\qquad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \qquad \text{o} \qquad w_1 V_1 A_1 = w_2 V_2 A_2$

(*b*) Para fluidos incompresibles (y para algunos casos de flujos compresibles) la densidad es constante, es decir, $\rho_1 = \rho_2$. Por tanto,

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constante} \qquad (\text{en m}^3/\text{seg}) \qquad (C)$$

Así, el caudal es constante a través de un haz de tubos de corriente. En muchos casos de flujos de fluidos pueden utilizarse en las ecuaciones de continuidad (*B*) y (*C*) las velocidades medias en la sección transversal.

2. Por una tubería de 30 cm de diámetro circulan 1800 l/min, reduciéndose después el diámetro de la tubería a 15 cm. Calcular las velocidades medias en ambas tuberías.

Solución:

$$Q \text{ en m}^3/\text{seg} = \frac{1800}{60} \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{seg} = 0{,}030\ \text{m}^3/\text{seg}$$

$$V_{30} = \frac{Q \text{ en m}^3/\text{seg}}{A \text{ en m}^2} = \frac{0{,}030}{\frac{1}{4}\pi(0{,}30)^2} = 0{,}43\ \text{m/seg} \quad \text{y} \quad V_{15} = \frac{0{,}030}{\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2} = 1{,}70\ \text{m/seg}$$

3. Si la velocidad en una tubería de 30 cm es de 0,50 m/seg, ¿cuál será la velocidad en el chorro de 7,5 cm de diámetro que sale por una boquilla unida al extremo de la tubería?

Solución:

$Q = A_{30} V_{30} = A_{7,5} V_{7,5}$ o bien como las áreas son proporcionales al cuadrado de los diámetros $(30)^2 V_{30} = (7{,}5)^2 V_{7,5}$. Por tanto, $V_{7,5} = (30/7{,}5)^2 V_{30} = 16 \times 0{,}50 = 8{,}0$ m/seg.

4. A través de una tubería de 15 cm de diámetro circula aire a una presión manométrica de 2,10 kg/cm² y una temperatura de 38° C. Si la presión barométrica es de 1,030 kg/cm² y la velocidad de 3,20 m/seg, ¿cuál es el caudal en peso que está fluyendo?

Solución:

En la ley de los gases hay que emplear unidades absolutas tanto en la temperatura como en la presión (kg/m²). Por tanto,

$$w_{\text{aire}} = \frac{p}{RT} = \frac{(2{,}10 + 1{,}03) \times 10^4}{29{,}3(38 + 273)} = 3{,}43\ \text{kg/m}^3$$

donde $R = 29{,}3$, constante de los gases para el aire, se ha obtenido de la Tabla 1 del Apéndice.

$$W \text{ en kg/seg} = wQ = wA_{15}V_{15} = 3{,}43\ \text{kg/m}^3 \times \tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2\ \text{m}^2 \times 3{,}20\ \text{m/seg} = 0{,}194\ \text{kg/seg}$$

5. Por la sección *A* de una tubería de 7,5 cm de diámetro circula anhídrido carbónico a una velocidad de 4,50 m/seg. La presión en *A* es de 2,10 kg/cm² y la temperatura de 21° C. Aguas abajo en el punto *B* la presión es de 1,40 kg/cm² y la temperatura de 32° C. Para una lectura barométrica de 1,030 kg/cm², calcular la velocidad en *B* y comparar los caudales volumétricos en *A* y *B*. El valor de *R* para el anhídrido carbónico es de 19,30, obtenido de la Tabla 1 del Apéndice.

Solución:

$$w_A = \frac{p_A}{RT} = \frac{3{,}13 \times 10^4}{19{,}3 \times 294} = 5{,}52\ \text{kg/m}^3, \qquad w_B = \frac{2{,}43 \times 10^4}{19{,}3 \times 305} = 4{,}13\ \text{kg/m}^3$$

(*a*) W en kg/seg $= w_A A_A V_A = w_B A_B V_B$. Pero como $A_A = A_B$, se tiene

$$w_A V_A = w_B V_B = 5{,}52 \times 4{,}50 = 4{,}13 V_B \quad \text{y} \quad V_B = 6{,}0\ \text{m/seg}$$

(*b*) El caudal en peso es constante, pero el caudal en volumen variará por diferir el peso específico.

$$Q_A = A_A V_A = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}075)^2 \times 4{,}50 = 19{,}9 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{seg}, \quad Q_B = A_B V_B = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}075)^2 \times 6{,}00 = 26{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{seg}$$

6. ¿Qué diámetro máximo de tubería será necesario para transportar 0,230 kg/seg de aire a una velocidad máxima de 5,50 m/seg? La temperatura del aire es de 27° C y la presión absoluta de 2,40 kg/cm².

Solución:

$$w_{\text{aire}} = \frac{p}{RT} = \frac{2{,}40 \times 10^4}{29{,}3(27 + 273)} = 2{,}73 \text{ kg/m}^3$$

$$W = 0{,}230 \text{ kg/seg} = wQ \quad \text{o} \quad Q = \frac{W}{w} = \frac{0{,}230 \text{ kg/seg}}{2{,}73 \text{ kg/m}^3} = 0{,}084 \text{ m}^3\text{/seg.}$$

$$\text{Area mínima } A \text{ necesaria} = \frac{\text{caudal } Q \text{ en m}^3\text{/seg}}{\text{velocidad media } V} = \frac{0{,}084}{5{,}50} = 0{,}0153 \text{ m}^2 = 153 \text{ cm}^2$$

De aquí, diámetro mínimo = 14 cm

7. Desarrollar la ecuación general de continuidad para un flujo tridimensional de un fluido compresible (*a*) en el caso de flujo no permanente, y (*b*) en el de flujo permanente.

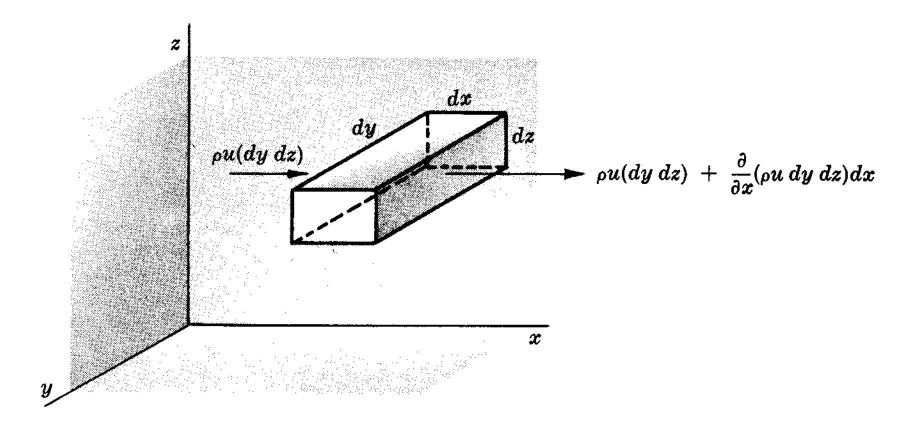


Fig. 6-2

Solución:

(*a*) Sean las componentes de la velocidad en las direcciones x, y y z, respectivamente, u, v y w. Se considera el flujo a través de un paralelepípedo rectángulo de aristas dx, dy y dz. La masa de fluido entrante, a través de una de sus caras, en dicho volumen por unidad de tiempo es igual al producto de la densidad del fluido por el área de la cara y por la velocidad normal a la cara, es decir, en la dirección x, $\rho u(dy\,dz)$. En la dirección x los flujos aproximados son (véase Fig. 6-2)

$$\textit{Flujo entrante } \rho u(dy\,dz) \quad \text{y} \quad \textit{Flujo saliente } \rho u(dy\,dz) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\,dy\,dz)dx,$$

o el flujo entrante aproximado es $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\,dy\,dz)dx$ o bien $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\,dx\,dy\,dz)$.

Si se escriben expresiones análogas para los flujos entrantes netos en las direcciones y y z, y sumamos los tres, el flujo neto entrante será

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right] dx\,dy\,dz$$

Estas magnitudes son más precisas al hacer tender a cero dx, dy y dz.

El *aumento de masa por unidad de tiempo* en el interior del paralelepípedo será

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dy\,dz) \quad \text{o} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\,dy\,dz)$$

donde $\partial\rho/\partial t$ es la variación por unidad de tiempo de la densidad en el interior del volumen. Como el flujo entrante neto ha de ser igual al aumento por unidad de tiempo de la masa, se obtiene

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right] dx\,dy\,dz = \frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\,dy\,dz)$$

Por tanto, la ecuación de continuidad tridimensional para un flujo no permanente de un fluido compresible toma la forma

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right] = \frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (A)$$

(*b*) Para un flujo permanente no varían las propiedades del fluido con el tiempo, es decir, $\partial\rho/\partial t = 0$. Para un flujo permanente y compresible la ecuación de continuidad es

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right] = 0 \qquad (B)$$

Si el flujo además de permanente es incompresible (ρ = constante) la ecuación tridimensional adopta la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (C)$$

Si $\partial w/\partial z = 0$, el flujo permanente es bidimensional y

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (D)$$

Cuando simultáneamente $\partial w/\partial z$ y $\partial v/\partial y = 0$, el flujo permanente es unidimensional y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (E)$$

Esta ecuación es la del flujo uniforme.

8. Comprobar si se satisface la ecuación de continuidad para un flujo permanente e incompresible, cuando las componentes de la velocidad vienen dadas por

S

$$u = 2x^2 - xy + z^2, \quad v = x^2 - 4xy + y^2, \quad w = -2xy - yz + y^2$$

I

Solución:

Derivando cada componente respecto de la coordenada apropiada,

$$\partial u/\partial x = 4x - y, \quad \partial v/\partial y = -4x + 2y, \quad \partial w/\partial z = -y$$

Sustituyendo en la ecuación (*C*) del problema anterior, $(4x - y) + (-4x + 2y) + (-y) = 0$. Luego se satisface.

9. Las componentes de la velocidad de un flujo incompresible no permanente son $u = (2x - 3y)t$, $v = (x - 2y)t$ y $w = 0$. ¿Se satisface la ecuación de continuidad?

Solución:

Derivando cada componente respecto de la coordenada apropiada,

$$\partial u/\partial x = 2t, \quad \partial v/\partial y = -2t, \quad \partial w/\partial z = 0$$

Sustituyendo en la ecuación (*C*) del Problema 7 da 0. Luego se satisface.

10. ¿Son posibles los siguientes valores de u y v para un flujo permanente e incompresible?

$$(a)\ u = 4xy + y^2, \ v = 6xy + 3x \qquad (b)\ u = 2x^2 + y^2, \ v = -4xy$$

Solución:

Para el flujo bidimensional dado debe satisfacerse la ecuación (*D*) del Problema 7.

(*a*) $\partial u/\partial x = 4y$, $\partial v/\partial y = 6x$, $4y + 6x \neq 0$
El flujo no es posible.

(*b*) $\partial u/\partial x = 4x$, $\partial v/\partial y = -4x$, $4x - 4x = 0$
El flujo es posible.

11. Entre dos placas convergentes de 45 cm de anchura circula un fluido y la distribución de velocidades viene dada por la expresión

$$\frac{v}{v_{max}} = 2\frac{n}{n_0}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right)$$

Para los valores $n_0 = 5$ cm y $v_{max} = 0{,}30$ m/seg determinar (*a*) el caudal total en m^3/seg, (*b*) la velocidad media en la sección considerada y (*c*) la velocidad media en la sección en la que $n = 2$ cm.

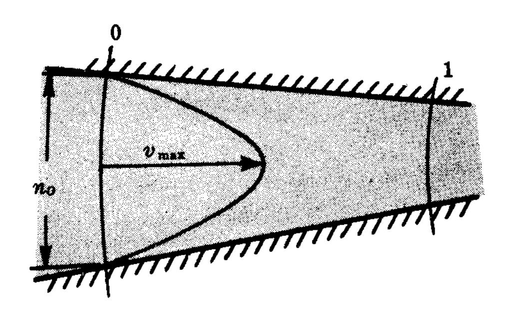


Fig. 6-3

Solución:

(*a*) El flujo por unidad de anchura, perpendicular al dibujo, será

$$q = \int_0^{n_0} v\,dn = \frac{2v_{max}}{n_0}\int_0^{n_0}(n - n^2/n_0)\,dn = \frac{1}{3}v_{max}\,n_0 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{/seg m de anchura}$$

y el caudal total $Q = 5 \times 10^{-3}(0{,}45) = 2{,}25 \times 10^{-3}$ m³/seg.

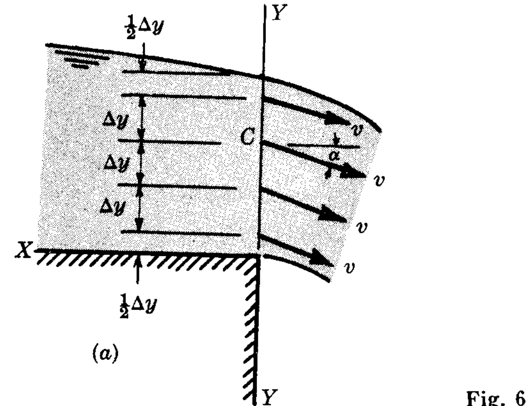
(*b*) La velocidad media $V_0 = q/n_0 = 0{,}10$ m/seg, donde $n_0 = 0{,}05$ m. O bien $V_0 = Q/A = 0{,}10$ m/seg.

(*c*) Mediante la ecuación (*4*), $V_0A_{n_0} = V_1A_{n_1}$, $0{,}10(0{,}05)(0{,}45) = V_1(0{,}02)(0{,}45)$, de donde $V_1 = 0{,}25$ m/seg.

12. Si los módulos y direcciones de las velocidades se miden en un plano vertical YY en puntos distanciados Δy, demostrar que el caudal q por unidad de anchura puede expresarse por $\Sigma v_x\Delta y$.

S

I



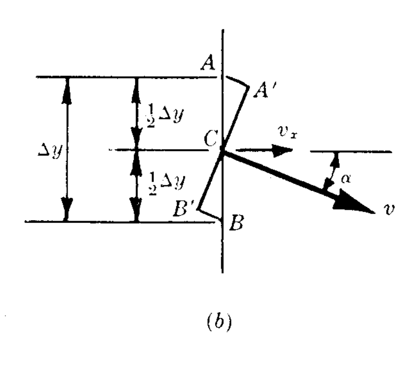


Fig. 6-4

Solución:

Caudal por unidad de anchura = $q = \Sigma\,\Delta q$, donde cada Δq viene dado por $v(\Delta A_n)$.
De la Fig. 6-4(*b*), $A'B' = \Delta A_n = \Delta y \cos\alpha$. De donde $q = \Sigma\, v(\Delta y \cos\alpha) = \Sigma\, v_x\Delta y$ por unidad de anchura.

13. (*a*) Explicar brevemente el procedimiento para dibujar la red de corriente en el caso de un flujo bidimensional permanente de un fluido ideal entre los contornos dados en la Figura 6-5.

(*b*) Si la velocidad uniforme en la sección 2 es igual a 9,0 m/seg y los valores de Δn_2 son iguales a 3 cm, determinar el caudal q y la velocidad uniforme en la sección 1, donde los Δn_1 son iguales a 9 cm.

Solución:

(*a*) El procedimiento para dibujar la red de corriente en este caso puede aplicarse a casos más complejos. Para un fluido *ideal* se procede como sigue:

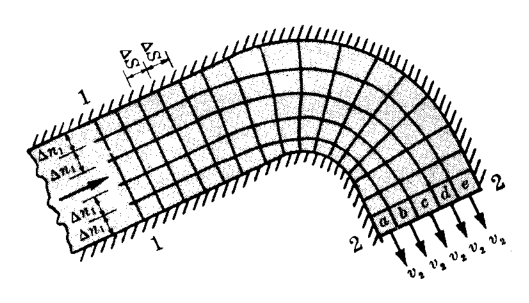


Fig. 6-5

1. En una sección entre contornos paralelos se divide el flujo en un cierto número de bandas de igual anchura Δn (supuesto que se ha tomado del flujo una capa, de espesor unidad, perpendicular al dibujo). Cada banda representa un tubo de corriente limitado por líneas de corriente o bien por líneas de corriente y uno de los contornos. Así, el flujo total queda dividido en flujos parciales iguales por cada una de las bandas y $\Delta q \cong v(\Delta n) \cong$ constante, donde Δn se mide normalmente a la velocidad local. Como $\Delta q \cong v_1 \Delta n_1 \cong v_2 \Delta n_2$, se deduce $v_1/v_2 \cong \Delta n_2/\Delta n_1 \cong \Delta S_2/\Delta S_1$. Cuanto menores son los valores de Δn y ΔS más exactas son las relaciones anteriores. Se escogen el número suficiente de líneas de corriente para que la exactitud sea aceptable, sin entrar en innecesarios refinamientos y detalles en el dibujo.
2. Para determinar las *direcciones* de las líneas de corriente se dibujan las líneas normales a aquéllas o líneas equipotenciales. Estas líneas están espaciadas de forma que $\Delta S = \Delta n$. Las líneas equipotenciales son ortogonales a las líneas de corriente en cada punto de intersección y a los contornos ya que éstos son líneas de corriente. De esta forma el diagrama obtenido se asemeja a un grupo de cuadrados (aproximadamente) a través de toda la red de corriente.
3. En las zonas próximas y allí donde los contornos cambian de forma no se pueden mantener los cuadrados, variando la configuración de la red de corriente, y para obtenerla de la manera más correcta sera necesario comprobarla dibujando las diagonales a través de todos los «cuadrados» (curvilíneos). Las dos familias de diagonales formarán también una red aproximadamente cuadrada.
4. Muchas veces los mismos contornos son líneas de corriente verdaderas. Si no sucede así, la red de corriente no representa la configuración real del flujo. Por ejemplo, cuando el flujo se «separa» del contorno, en esta región no puede utilizarse el contorno como una línea de corriente. En general, cuando las líneas de corriente son divergentes se dan las condiciones para que se pueda producir el fenómeno de la separación.

La solución matemática de los flujos irrotacionales está basada en la definición de la *función de corriente*, cuya definición incluye el principio de continuidad y las propiedades de una línea de corriente. El caudal ψ entre dos líneas de corriente cualesquiera es constante (ya que el flujo no puede atravesar las líneas de corriente), y si ψ puede expresarse en función de x e y pueden dibujarse las líneas de corriente. Análogamente, las líneas equipotenciales pueden definirse por $\phi(x, y) =$ constante. A partir de estas expresiones es factible deducir que

$$u = \partial\psi/\partial y \quad \text{y} \quad v = -\partial\psi/\partial x \qquad \text{para las líneas de corriente}$$

y

$$u = -\partial\phi/\partial x \quad \text{y} \quad v = -\partial\phi/\partial y \qquad \text{para las líneas equipotenciales}$$

Estas ecuaciones han de satisfacer a la ecuación de Laplace, es decir,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

y la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

En general, se determinan y dibujan las funciones equipotenciales. A continuación se trazan las líneas de corriente, ortogonales a las anteriores, obteniendo la red de corriente.

Este tipo de soluciones exactas pueden verse en textos de Mecánica de Fluidos Superiores, en Hidrodinámicas o en los de Teoría de Funciones de Variable Compleja.

(*b*) Caudal/unidad de anchura $= q = \Sigma\,\Delta q = q_a + q_b + q_c + q_d + q_e = 5(v_2)(A_{n_2})$.

Para 1 unidad de anchura, $A_{n_2} = 1(\Delta n_2)$ y $q = 5(9{,}0)(1 \times 0{,}03) = 1{,}35$ m^3/seg por unidad de anchura.

Por tanto, para $\Delta n_1 = 0{,}09$ m, $5\,v_1(0{,}09 \times 1) = 1{,}35$, de donde $v_1 = 3{,}0$ m/seg.

v_1 puede determinarse también a partir de: $v_1/v_2 \cong \Delta n_2/\Delta n_1$, $v_1/9{,}0 \cong 0{,}03/0{,}09$, $v_1 = 3{,}0$ m/seg.

14. Dibujar las líneas de corriente y equipotenciales para las condiciones de contorno dadas en l Fig. 6-6. (Las áreas que están sin terminar de dibujar se dejan para que las utilice el lector.)

Solución:

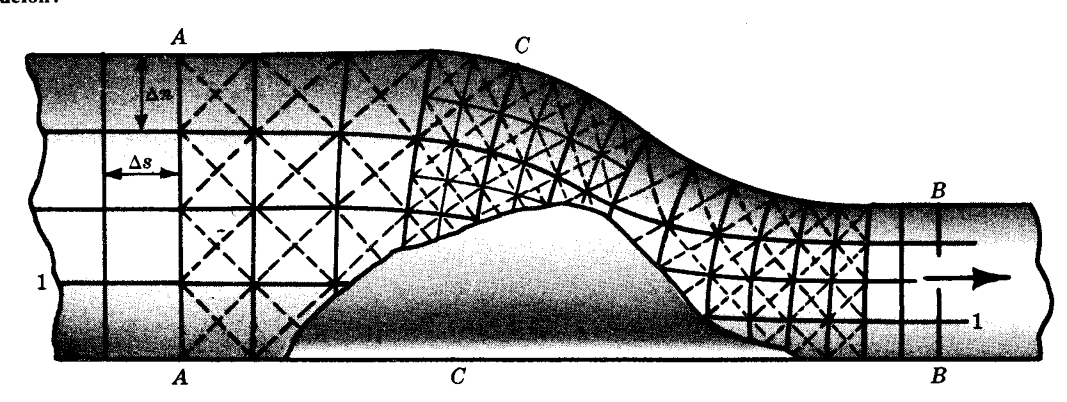


Fig. 6-6

1. En las zonas donde el flujo tiene lugar entre contornos paralelos se divide la anchura total en 4 partes igual o tubos de corriente (en AA y en BB). Hay que tratar de dibujar la trayectoria de una partícula a lo largo c una de estas líneas de corriente, dibujando, por ejemplo, la línea 1-1 (véase el problema precedente). Se pr cede en igual forma con el resto de las líneas de corriente.

2. Las líneas equipotenciales han de ser ortogonales, tanto a las líneas de corriente como a los contornos, e todos los puntos. Se han de esquematizar de manera que formen aproximadamente cuadrados. Partiend de la sección central, se dibujan estas líneas ortogonales en cada dirección. Antes de obtener una red de cc rriente de manera satisfactoria será necesario utilizar con frecuencia la goma de borrar.

3. Se dibujan las diagonales (a trazos en la figura) para comprobar la bondad de la red de corriente. Estas dia gonales deben formar también una red cuadrada.

4. En la figura la zona C se ha dividido en 8 tubos de corriente. Se observa que los cuadriláteros curvilíneo más pequeños se aproximan en su forma a cuadrados más que los de mayor tamaño. Cuanto mayor sea e número de tubos de corriente, la red de corriente será más «cuadrada».

15. En la Fig. 6-7 se representa una línea de corriente correspondiente a un flujo bidimensional y las líneas equipotenciales, ortogonales a las primeras, y representadas por los segmentos numerados del 1 al 10. La separación entre las líneas equipotenciales se da en la segunda columna de la tabla que figura más adelante. Si la velocidad media entre 1 y 2 es 0,500 m/seg, calcular (a) las velocidades medias entre cada dos líneas equipotenciales y (b) el tiempo que tardará una partícula fluida en recorrer el espacio entre 1 y 10 a lo largo de la línea de corriente.

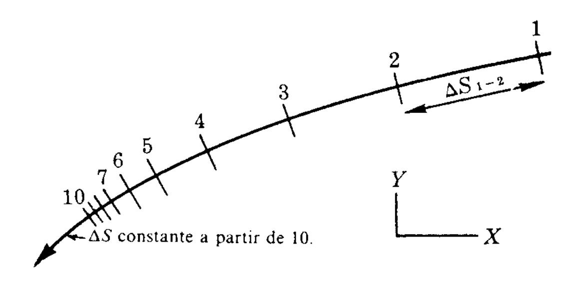


Fig. 6-7

Solución:

(a) Utilizando las relaciones entre la velocidad y Δn del Problema 13,

$$V_{1-2}\,\Delta n_{1-2} = V_{2-3}\,\Delta n_{2-3} = V_{3-4}\,\Delta n_{3-4} = \ldots.$$

Además $\quad \Delta S_{1-2} \cong \Delta n_{1-2}, \qquad \Delta S_{2-3} \cong \Delta n_{2-3}, \qquad \ldots.$

Por tanto, $V_{2-3} \cong V_{1-2}(\Delta S_{1-2}/\Delta S_{2-3}) = 0{,}500(0{,}500/0{,}400) = 0{,}625$ m/seg. Análogamente, $V_{3-4} =$ $0{,}500(0{,}500/0{,}300) = 0{,}833$ m/seg, etc. Los valores así obtenidos para las velocidades medias se dan en l siguiente tabla.

Posición	ΔS (m)	$\Delta S_{1-2}/\Delta S$	$V = 0{,}500(0{,}500/\Delta S)$ m/seg	$t = (\Delta S)/V$ seg
1-2	0,500	1,000	0,500	1,000
2-3	0,400	1,250	0,625	0,640
3-4	0,300	1,667	0,833	0,360
4-5	0,200	2,500	1,250	0,160
5-6	0,100	5,000	2,500	0,040
6-7	0,0700	7,143	3,571	0,020
7-8	0,0450	11,11	5,56	0,008
8-9	0,0300	16,67	8,33	0,004
9-10	0,0208	24,00	12,00	0,002
				Σ = 2,234 seg

(*b*) El tiempo que tarda una partícula en recorrer de 1 a 2 es igual a la distancia entre 1 y 2 dividida por la velocidad media entre 1 y 2 o bien $t_{1-2} = (0{,}500/0{,}500) = 1{,}000$ seg. Análogamente, $t_{2-3} = (0{,}400/0{,}625) = 0{,}640$ seg. El tiempo total que tarda en recorrer la distancia entre 1 y 10 es igual a la suma de los términos de la última columna, es decir, 2,234 seg.

16. Deducir la expresión del coeficiente α de corrección de la energía cinética para un flujo permanente e incompresible.

Solución:

La energía cinética de una partícula es $\frac{1}{2}\,dM\,v^2$, y la energía total de un flujo fluido será

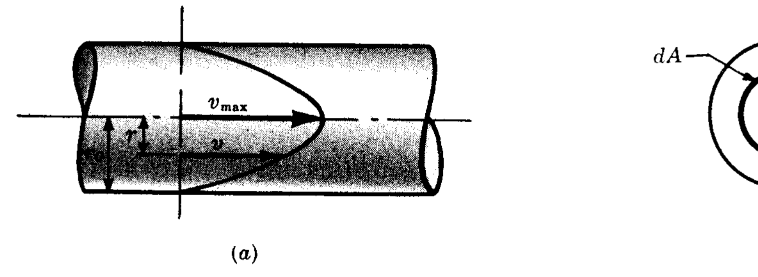
$$\frac{1}{2}\int_A (dM)\,v^2 = \frac{1}{2}\int_A \frac{w}{g}(dQ)v^2 = \frac{w}{2g}\int_A (v\,dA)v^2$$

Para calcular esta expresión debe extenderse la integral a toda el área A.

La energía çinética calculada mediante la velocidad media en una sección transversal es $\frac{1}{2}(wQ/g)V_{av}^2 = \frac{1}{2}(wA/g)V_{av}^3$. Aplicando a esta expresión un coeficiente de corrección α e igualando el resultado a la energía cinética verdadera, se obtiene

$$\alpha\left(\frac{wA}{2g}\right)(V_{av}^3) = \frac{w}{2g}\int_A (v\,dA)v^2 \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V_{av}}\right)^3 dA$$

17. Un líquido está fluyendo a través de una tubería circular. Para una distribución de velocidades dada por la ecuación $v = v_{max}(r_0^2 - r^2)/r_0^2$, calcular el coeficiente de corrección de la energía cinética α.



(*a*)

dA dr r r_o

(*b*)

Fig. 6-8

Solución:

Es necesario calcular la velocidad media para aplicar la fórmula obtenida en el Problema 16. A partir de la ecuación de continuidad,

$$V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{\int v\,dA}{\pi r_o^2} = \frac{\int (v_{max}/r_o^2)(r_o^2 - r^2)(2\pi r\,dr)}{\pi r_o^2} = \frac{2v_{max}}{r_o^4}\int_0^{r_o}(r_o^2 r - r^3)\,dr = \frac{v_{max}}{2}$$

Este valor podría haberse obtenido también al considerar que la ecuación dada representa una parábola y que el volumen del paraboloide generado por dicha distribución es igual a la mitad del volumen del cilindro circunscrito. Por tanto,

$$V_{av} = \frac{\text{volumen/seg}}{\text{área de la base}} = \frac{\frac{1}{2}(\pi r_o^2)v_{max}}{\pi r_o^2} = \frac{v_{max}}{2}$$

Utilizando el valor de la velocidad media en la ecuación que da α,

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V_{av}}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi r_o^2}\int_0^{r_0}\left(\frac{v_{max}(r_o^2 - r^2)/r_o^2}{\frac{1}{2}v_{max}}\right)^3 2\pi r\, dr = 2{,}00$$

(Véase Flujo laminar en el Capítulo 7.)

18. A través de una tubería de 15 cm de diámetro está fluyendo aceite de densidad relativa 0,750 a una presión de 1,05 kg/cm^2. Si la energía total respecto de un plano de referencia situado 2,40 m por debajo del eje de la tubería es de 17,6 kgm/kg, determinar el caudal de aceite en m^3/seg.

Solución:

Energía por kg de aceite = energía de presión + energía cinética (altura de velocidad) + energía potencial

$$17{,}6 = \frac{1{,}05 \times 10^4}{0{,}750 \times 1000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 2{,}40$$

de donde $V_{15} = 4{,}85$ m/seg. Por tanto, $Q = A_{15}V_{15} = \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 4{,}85 = 86 \times 10^{-3}$ m^3/seg.

19. Una turbina produce 600 CV cuando el caudal de agua a través de la misma es de 0,60 m^3/seg. Suponiendo un rendimiento del 87 %, ¿qué altura actúa sobre la turbina?

Solución:

Potencia de salida (CV) = potencia consumida (CV) × rendimiento = $(wQH_T/75)$ × rendimiento

$$600 = (1000 \times 0{,}60 \times H_T/75)(0{,}87) \quad \text{y} \quad H_T = 86{,}3 \text{ m.}$$

20. Deducir las ecuaciones del movimiento para un flujo permanente y un fluido cualquiera.

Solución:

Se considera como cuerpo libre la masa elemental de fluido dM mostrada en la Fig. 6-9(a) y (b). El movimiento tiene lugar en el plano del papel y se escoge el eje x paralelo a la dirección del movimiento. No se han representado las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre dM en dirección normal al movimiento. Las fuerzas que actúan en la dirección x se deben a (1) las presiones que actúan sobre las caras de los extremos, (2) la componente del peso y (3) las fuerzas cortantes (dF_S en kilogramos) ejercidas por las partículas fluidas adyacentes.

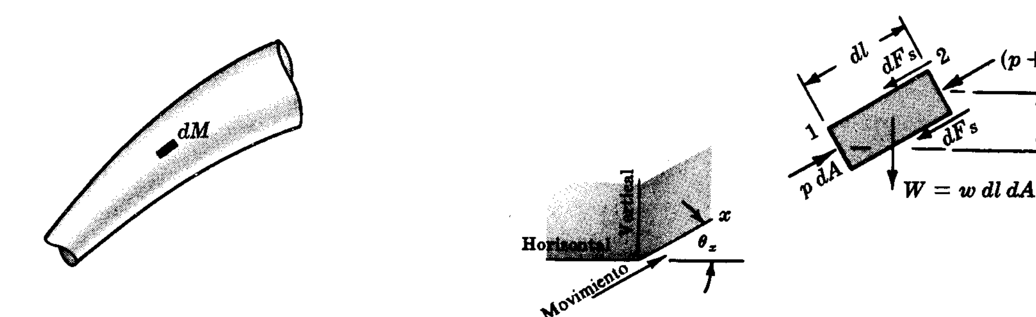


Fig. 6-9(a) Fig. 6-9(b)

De la ecuación del movimiento $\Sigma F_x = Ma_x$, se obtiene

$$[+\,p\,dA - (p + dp)dA - w\,dA\,dl\,\text{sen}\,\theta_x - dF_S] = \frac{w\,dA\,dl}{g}\left(\frac{dV}{dt}\right) \qquad (1)$$

Dividiendo (1) por $w\,dA$ y sustituyendo dl/dt por la velocidad V,

$$\left[\frac{p}{w} - \frac{p}{w} - \frac{dp}{w} - dl\,\text{sen}\,\theta_x - \frac{dF_S}{w\,dA}\right] = \frac{V\,dV}{g} \qquad (2)$$

El término $\frac{dF_S}{w\,dA}$ representa la resistencia que se opone al movimiento en la longitud dl. Las fuerzas cortantes dF_S pueden sustituirse por el producto de la tensión cortante τ por el área sobre la que actúa (perímetro × longitud), es decir, $dF_S = \tau\, dP\, dl$.

Así, $\frac{dF_S}{w\,dA} = \frac{\tau\, dP\, dl}{w\,dA} = \frac{\tau\, dl}{wR}$, donde R se conoce con el nombre de radio hidráulico y se define como el cociente del área de la sección recta por el perímetro mojado o, en este caso, dA/dP. La suma del trabajo realizado por todas las fuerzas cortantes mide la pérdida de energía debida al flujo, y, medida en kgm/kg, será

$$\text{pérdida de carga } dh_L = \frac{\tau\, dl}{wR} = \frac{\text{kg/m}^2 \times \text{m}}{\text{kg/m}^3 \times \text{m}^2/\text{m}} = \text{m}$$

Para futuras referencias,
$$\tau = wR\left(\frac{dh_L}{dl}\right) \qquad (3)$$

Volviendo sobre la expresión (2), como dl sen $\theta_x = dz$, adopta finalmente la forma

$$\frac{dp}{w} + \frac{V\,dV}{g} + dz + dh_L = 0 \qquad (4)$$

Esta expresión se conoce con el nombre de ecuación de Euler cuando se aplica a un fluido ideal (pérdida de carga = 0). Al integrar la ecuación anterior, para fluidos de densidad constante, se obtiene la llamada ecuación de Bernoulli. La ecuación diferencial (4), para flujos permanentes, es una de las ecuaciones fundamentales del flujo de fluidos.

CASO 1. Flujo de fluidos incompresibles

Para fluidos *incompresibles* la integración es como sigue:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{w} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{V\,dV}{g} + \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_1^2 dh_L = 0 \qquad (A)$$

Los métodos de cálculo del último término se discutirán en los capítulos siguientes. El término de la pérdida de carga total se representa por H_L. Al integrar y sustituir límites,

$$\left(\frac{p_2}{w} - \frac{p_1}{w}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + (z_2 - z_1) + H_L = 0$$

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) - H_L = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right)$$

que es la forma más conocida del teorema de Bernoulli, aplicable al flujo de fluidos incompresibles (sin adición de energía exterior).

CASO 2. Flujo de fluidos compresibles.

Para fluidos compresibles el término $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{w}$ no puede integrarse hasta no conocer la expresión de w en función de la variable p. La relación entre w y p depende de las condiciones termodinámicas implicadas.

(*a*) Para condiciones *isotérmicas* (temperatura constante) la ecuación general de los gases puede expresarse en la forma

$$p_1/w_1 = p/w = \text{constante} \qquad \text{o} \qquad w = (w_1/p_1)p$$

donde w_1/p_1 es una constante y p viene en kg/m², siendo presión *absoluta*. Sustituyendo en la ecuación (*A*),

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{(w_1/p_1)p} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{V\,dV}{g} + \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_1^2 dh_L = 0$$

Integrando y sustituyendo límites, $\frac{p_1}{w_1} \ln \frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + (z_2 - z_1) + H_L = 0$ o bien puesta en la forma más conocida,

$$\frac{p_1}{w_1} \ln p_1 + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - H_L = \frac{p_1}{w_1} \ln p_2 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2. \qquad (B)$$

Al combinar esta ecuación con la de continuidad y la ley de los gases perfectos, para condiciones isotérmicas, se llega a una expresión en la que solo es desconocida una velocidad. Así, para un flujo permanente,

$$w_1 A_1 V_1 = w_2 A_2 V_2 \quad \text{y} \quad \frac{p_1}{w_1} = \frac{p_2}{w_2} = RT \quad \text{de donde} \quad V_1 = \frac{w_2 A_2 V_2}{(w_2/p_2) p_1 A_1} = \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) V_2$$

Sustituyendo en la ecuación de Bernoulli en su forma (B),

$$\left[\frac{p_1}{w_1} \ln p_1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} + z_1\right] - H_L = \left[\frac{p_1}{w_1} \ln p_2 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] \qquad (C)$$

(*b*) Para condiciones *adiabáticas* (sin pérdida ni ganancia de calor) la ley general de los gases perfectos se reduce a

$$\left(\frac{w}{w_1}\right)^k = \frac{p}{p_1} \quad \text{o} \quad \frac{p_1^{1/k}}{w_1} = \frac{p^{1/k}}{w} = \text{constante}, \qquad \text{y así} \qquad w = w_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/k}$$

donde k es el exponente adiabático.

Hallando el valor de dp/w e integrando se obtiene

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{w_1 (p/p_1)^{1/k}} = \frac{p_1^{1/k}}{w_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p^{1/k}} = \left(\frac{k}{k-1}\right) \times \frac{p_1}{w_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

y la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{w_1} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_1}{w_1}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] \qquad (D)$$

Combinando esta ecuacion con la de continuidad y con la ley de los gases perfectos, para condiciones adiabáticas, se llega a una expresión en que solo figura una velocidad como incógnita.

$$\text{Mediante } w_1 A_1 V_1 = w_2 A_2 V_2 \quad \text{y} \quad \frac{p_1^{1/k}}{w_1} = \frac{p_2^{1/k}}{w_2} = \text{constante}, \quad V_1 = \frac{w_2 A_2 V_2}{w_1 A_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) V_2$$

y la ecuación de Bernoulli adopta la forma

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{w_1} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} + z_1\right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_1}{w_1}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] \qquad (E)$$

21. En la Fig. 6-10 están circulando 0,370 m^3/seg de agua de A a B, existiendo en A una altura de presión de 6,6 m. Suponiendo que no existen pérdidas de energía entre A y B, determinar la altura de presión en B. Dibujar la línea de alturas totales.

Solución:

Se aplica la ecuación de Bernoulli entre A y B, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por A.

Energía en A + energía añadida − energía perdida = energía en B

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + z_A\right) + 0 - 0 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_{60}^2}{2g} + z_B\right)$$

donde $V_{30} = Q/A_{30} = 0{,}370/(\frac{1}{4}\pi 0{,}3^2) = 5{,}24$ m/seg y $V_{60} = (\frac{1}{2})^2(5{,}24) = 1{,}31$ m/seg. Sustituyendo,

Línea de alturas totales

$\frac{V_A^2}{2g} = 1{,}4$ m

$\frac{V_B^2}{2g} = 0{,}09$ m

Línea de alturas piezométricas

$\frac{p_B}{w} = 3{,}41$ m

$\frac{p_A}{w} = 6{,}6$ m

B 60 cm

$z_B = 7{,}5$ m

30 cm A

$z_A = 3{,}0$ m

D Plano de referencia D

Fig. 6-10

$$\left(6{,}6 + \frac{(5{,}24)^2}{2g} + 0\right) - 0 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{(1{,}31)^2}{2g} + 4{,}5\right) \text{ y } \frac{p_B}{w} = 3{,}41 \text{ m de agua}$$

Puede representarse la energía total en una sección cualquiera como altura sobre un plano horizontal de referencia. Utilizando en este caso el plano que pasa por *D-D*,

$$\text{Altura total en } A = p_A/w + V_{30}^2/2g + z_A = 6{,}6 + 1{,}4 + 3{,}0 = 11{,}0 \text{ m}$$
$$\text{Altura total en } B = p_B/w + V_{60}^2/2g + z_B = 3{,}41 + 0{,}09 + 7{,}5 = 11{,}0 \text{ m}$$

Se observa que tiene lugar la transformación de una forma de energía en otra durante el flujo. En el caso presente, parte de la energía de presión y de la energía cinética en A se transforma en energía potencial en B.

22. En el venturímetro mostrado en la Fig. 6-11 la lectura del manómetro diferencial de mercurio es 35,8 cm. Determinar el caudal de agua a través del venturímetro si se desprecian las pérdidas entre A y B.

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre $-A$ y B, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por A,

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 0\right) - 0 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0{,}75\right)$$

y
$$\left(\frac{p_A}{w} - \frac{p_B}{w}\right) = \left(\frac{V_{15}^2}{2g} - \frac{V_{30}^2}{2g} + 0{,}75\right) \qquad (1)$$

Por la ecuación de continuidad $A_{30}V_{30} = A_{15}V_{15}$, de donde $V_{30} = (\frac{15}{30})^2 V_{15} = \frac{1}{4}V_{15}$, y $V_{30}^2 = \frac{1}{16}V_{15}^2$. Por la lectura manométrica,

altura de presión en L = altura de presión en R (m de agua)

$$p_A/w + z + 0{,}358 = p_B/w + 0{,}75 + z + (0{,}358)(13{,}6)$$

de la cual $(p_A/w - p_B/w) = 5{,}26$ m de agua. Sustituyendo en (1), se obtiene $V_{15} = 9{,}7$ m/seg y $Q = \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 9{,}7 = 0{,}172$ m³/seg.

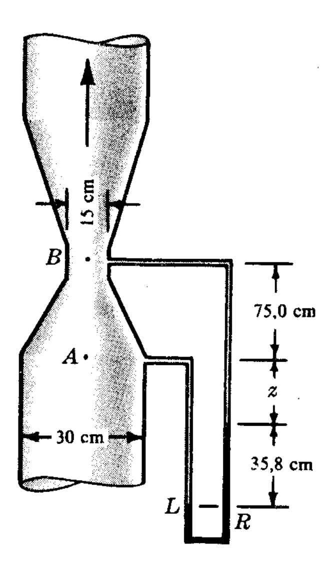


Fig. 6-11

23. Una tubería, que transporta aceite de densidad relativa 0,877, pasa de 15 cm de diámetro, en la sección E, a 45 cm en la sección R. La sección E está 3,6 m por debajo de R y las presiones son respectivamente 0,930 kg/cm² y 0,615 kg/cm². Si el caudal es de 146 l/seg, determinar la pérdida de carga en la dirección del flujo.

Solución:

Velocidad media en una sección = Q/A. Por tanto,

$$V_{15} = \frac{0{,}146}{\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2} = 8{,}26 \text{ m/seg} \qquad \text{y} \qquad V_{45} = \frac{0{,}146}{\frac{1}{4}\pi(0{,}45)^2} = 0{,}92 \text{ m/seg}$$

Utilizando, como plano de referencia, el horizontal que pasa por la sección más baja E, la energía en cada sección será:

$$\text{en } E, \quad \left(\frac{p}{w} + \frac{V_{15}^2}{2g} + z\right) = \frac{0{,}930 \times 10^4}{0{,}877 \times 1000} + \frac{(8{,}26)^2}{2g} + 0 \quad = 13{,}75 \text{ kgm/kg}$$

$$\text{en } R, \quad \left(\frac{p}{w} + \frac{V_{45}^2}{2g} + z\right) = \frac{0{,}615 \times 10^4}{0{,}877 \times 1000} + \frac{(0{,}92)^2}{2g} + 3{,}60 = 10{,}65 \text{ kgm/kg}$$

El flujo tiene lugar de E a R, ya que la energía de E es mayor que la de R. La pérdida de carga se determina haciendo el balance de energía entre E y R, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por E: 13,75 − pérdida de carga = 10,65 o bien pérdida de carga = 3,10 m, de E a R.

24. Considerar que a través del venturímetro del Problema 22 fluye aire a 27° C y que la presión manométrica en A es igual a 2,65 kg/cm². La lectura del manómetro es de 35,8 cm de agua. Suponiendo que el peso específico del aire no varía entre A y B y que la pérdida de energía es despreciable, determinar el caudal en peso, kg/seg, de aire que está circulando.

Solución:

Aplicando la ecuación de la energía entre A y B, tomando como plano de referencia el que pasa por A, como en el Problema 22, se obtiene $\left(\frac{p_A}{w} - \frac{p_B}{w}\right) = \frac{15}{16}\frac{V_{15}^2}{2g} + 0{,}75$. $\qquad (1)$

Para obtener la altura de presión del fluido que circula es necesario calcular el peso específico del aire.

$$w = \frac{p}{RT} = \frac{(2{,}65 + 1{,}030)10^4}{29{,}3(27 + 273)} = 4{,}20 \text{ kg/m}^3$$

En el manómetro diferencial, $p_L = p_R$ (en kg/m^2, manométrica)

o bien $p_A + 4{,}20(z + 0{,}358) = p_B + 4{,}20(0{,}75 + z) + 1000(0{,}358)$

y $(p_A - p_B) = 359{,}6$ kg/m^2. Sustituyendo en (*1*), se obtiene $V_{15} = 42{,}2$ m/seg y

$$W = wQ = 4{,}20[\tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 42{,}2] = 3{,}12 \text{ kg/seg de aire}$$

25. Un conducto por el que circula aire reduce su sección recta de $7{,}0 \times 10^{-2}$ m^2 a $2{,}0 \times 10^{-2}$ m^2. Suponiendo que no existen pérdidas, ¿cuál es la variación de presión que tiene lugar si están fluyendo 0,70 kg/seg de aire? (Utilizar $w = 3{,}200$ kg/m^3 para la presión y temperatura implicadas.)

Solución:

$$Q = \frac{0{,}70 \text{ kg/seg}}{3{,}2 \text{ kg/m}^3} = 0{,}218 \text{ m}^3\text{/seg}, \quad V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0{,}218}{0{,}07} = 3{,}12 \text{ m/seg}, \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0{,}218}{0{,}02} = 10{,}9 \text{ m/seg.}$$

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 se obtiene

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{(3{,}12)^2}{2g} + 0\right) - 0 = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{(10{,}9)^2}{2g} + 0\right) \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{p_1}{w} - \frac{p_2}{w}\right) = 5{,}60 \text{ m de aire}$$

y $p_1' - p_2' = (5{,}60 \times 3{,}200)/10^4 = 1{,}8 \times 10^{-3}$ kg/cm^2, como variación de presión. Esta pequeña variación en la presión justifica la hipótesis de densidad constante del fluido.

26. Una tubería de 15 cm de diámetro y 180 m de longitud transporta agua desde A, a una elevación de 24,0 m, hasta B, a una elevación de 36,0 m. La tensión debida a la fricción entre el líquido y las paredes de la tubería es igual a 3,05 kg/m^2. Determinar la variación de presión en la tubería y la pérdida de carga.

Solución:

(*a*) Las fuerzas que actúan sobre la masa de agua son las mismas que aparecen en la Figura (*b*) del Problema 20.

Mediante $P_1 = p_1A_{15}$, $P_2 = p_2A_{15}$ se obtiene, aplicando $\Sigma F_x = 0$,

$$p_1A_{15} - p_2A_{15} - W \text{ sen } \theta_x - \tau(\pi d)L = 0$$

Ahora bien, $W = w(\text{volumen}) = 1000[\tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 180]$ y $\text{sen } \theta_x = (36{,}0 - 24{,}0)/180$. Por tanto,

$$p_1[\tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2] - p_2[\tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2] - 1000[\tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 180] \times 12/180 - 3{,}05(\pi \times 0{,}15 \times 180) = 0$$

de donde $p_1 - p_2 = 26.640$ kg/m^2 $= 2{,}664$ kg/cm^2.

(*b*) Mediante la ecuación de la energía, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por A,

energía en A − pérdida de carga = energía en B

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} + 0\right) - \text{pérdida de carga} = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_B^2}{2g} + 12\right)$$

o pérdida de carga $= (p_A/w - p_B/w) - 12 = 26.640/1000 - 12 = 14{,}64$ m.

Otro método:

Mediante la (*3*) del Problema 20, pérdida de carga $= \dfrac{\tau L}{wR} = \dfrac{3{,}05(180)}{1000(0{,}15/4)} = 14{,}64$ m.

27. El agua, a 32° C, contenida en un pozo debe ser extraída a una velocidad de 2,0 m/seg a través de la tubería de succión de una bomba. Calcular la altura teórica máxima a que puede colocarse la bomba bajo las siguientes condiciones: presión atmosférica = 1,00 kg/cm^2 (ab), presión de vapor = 0,05 kg/cm^2 (ab) [véase Tabla 1(*C*)] y pérdida de carga en la tubería de succión = 3 veces la altura de velocidad.

S

I

Solución:

El peso específico del agua a 32° C es, según la Tabla 1(*C*), 995 kg/m³. La presión mínima a la entrada de la bomba no puede exceder a la presión del vapor del líquido. Se aplica ahora la ecuación de la energía entre la superficie libre del agua fuera de la tubería de succión y la sección de entrada en la bomba, utilizando alturas de presión absolutas.

Energía en la superficie del agua − pérdida de carga = energía en la entrada de la bomba

$$\left(\frac{1{,}00 \times 10^4}{995} + 0 + 0\right) - \frac{3(2{,}0)^2}{2g} = \left(\frac{0{,}05 \times 10^4}{995} + \frac{(2{,}0)^2}{2g} + z\right)$$

de donde $z = 8{,}74$ m sobre la superficie libre del agua.

En estas condiciones es probable que tengan lugar serios deterioros debidos a la cavitación. Véase Capítulo 12.

28. En el sistema mostrado en la Fig. 6-12 la bomba *BC* debe producir un caudal de 160 l/seg de aceite, Dr = 0,762, hacia el recipiente *D*. Suponiendo que la pérdida de energía entre *A* y *B* es de 2,50 kgm/kg y entre *C* y *D* es de 6,50 kgm/kg, (*a*) ¿qué potencia en CV debe suministrar la bomba a la corriente? (*b*) Dibujar la línea de alturas totales.

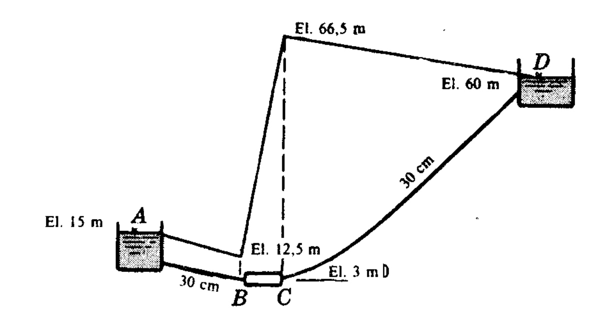


Fig. 6-12

Solución:

(*a*) La velocidad de las partículas en *A* y *D* es tan pequeña que pueden despreciarse las alturas de velocidad.

La ecuación de la energía entre *A* y *D*, con plano de referencia el que pasa por *BC* (también podría tomarse el que pasa por *A*),

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A\right) + H_{\text{bomba}} - H_{\text{perd}} = \left(\frac{p_D}{w} + \frac{V_D^2}{2g} + z_D\right)$$

$$(0 + \text{desprec.} + 12) + H_{\text{bomba}} - (2{,}50 + 6{,}50) = (0 + \text{desprec.} + 57)$$

y $H_{\text{bomba}} = 54{,}0$ m (o kgm/kg).

Potencia (CV) $= wQH_{\text{bomba}}/75 = (0{,}762 \times 1000)(0{,}16)(54)/75 = 88$ CV suministrada al sistema.

Obsérvese que la bomba ha de suministrar una carga suficiente para subir el líquido 45,0 m y vencer las cargas debidas a las pérdidas en las tuberías. Por tanto, comunica al sistema una carga de 54,0 m.

(*b*) La línea de alturas totales en *A* tiene una elevación de 15,0 m sobre el plano de referencia de cota cero. De *A* a *B* la pérdida de energía es de 2,5 m y la línea de alturas totales caerá esta misma altura, lo que da en *B* una elevación de 12,5 m. La bomba comunica una energía por unidad de peso de 54,0 m y la elevación en *C* será de 66,5 m. Finalmente, la pérdida de energía entre *C* y *D* es de 6,5 m y la elevación en $D = 66{,}5 - 6{,}5 = 60{,}0$ m. Estos resultados se reflejan en la Figura 6-12.

29. A través de la turbina de la Fig. 6-13 circulan 0,22 m³/seg de agua y las presiones en *A* y *B* son iguales, respectivamente, a 1,50 kg/cm² y −0,35 kg/cm². Determinar la potencia en CV comunicada por la corriente de agua a la bomba.

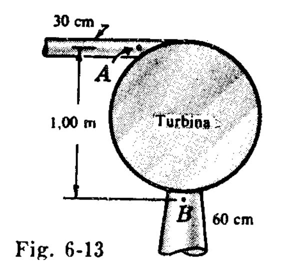


Fig. 6-13

Solución:

Mediante la ecuación de la energía entre *A* y *B* (plano de referencia por *B*), con

$$V_{30} = 0{,}22/A_{30} = 3{,}12 \quad \text{y} \quad V_{60} = 3{,}12/4 = 0{,}78 \text{ m/seg},$$

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + z_A\right) + 0 - H_{\text{Turbina}} = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_{60}^2}{2g} + z_B\right)$$

$$\left(\frac{1{,}5 \times 10^4}{1000} + \frac{3{,}12^2}{2g} + 1{,}00\right) - H_T = \left(\frac{-0{,}35 \times 10^4}{1000} + \frac{0{,}78^2}{2g} + 0\right) \quad \text{y} \quad H_T = 20{,}0$$

Potencia (CV) $= wQH_T/75 = 1000(0{,}22)(20{,}0)/75 = 59{,}0$ CV comunicados a la turbina.

30. En la turbina del Problema 29, si la potencia extraída de la corriente es de 68,0 CV y las pre: nes manométricas en A y B son 1,45 kg/cm² y $-0{,}34$ kg/cm², respectivamente, ¿cuál es el cau de agua que está fluyendo?

Solución:

Aplicando la ecuación de la energía entre A y B (plano de referencia el que pasa por B),

$$\left(\frac{1{,}45 \times 10^4}{1000} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 1{,}0\right) - H_T = \left(\frac{-0{,}34 \times 10^4}{1000} + \frac{V_{60}^2}{2g} + 0\right) \quad \text{y}$$

$$(a) \qquad H_T = \left(\frac{1{,}79 \times 10^4}{1000} + 1{,}0 + \frac{V_{30}^2}{2g} - \frac{V_{60}^2}{2g}\right)$$

$$(b) \qquad A_{30}V_{30} = A_{60}V_{60} \quad \text{o} \quad \frac{V_{60}^2}{2g} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{V_{30}^2}{2g} = \frac{1}{16}\frac{V_{30}^2}{2g}$$

$$(c) \qquad 68{,}0 \text{ CV} = \frac{wQH_T}{75} = \frac{1000 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}30)^2 V_{30} \times H_T}{75} \quad \text{o} \quad H_T = \frac{72{,}2}{V_{30}}$$

Mediante las ecuaciones (a) y (c) (sustituyendo la altura de velocidad), $72{,}2/V_{30} = 18{,}9 + (15/16)(V_{30}^2/2g)$ o bi

$$18{,}9\, V_{30} + 0{,}048\, V_{30}^3 = 72{,}2$$

Resolviendo esta ecuación por tanteos:

Tanteo 1.° $V_{30} = 3{,}5$ m/seg, $\quad 66{,}2 + 2{,}10 \neq 72{,}2$ (debe aumentarse V)
Tanteo 2.° $V_{30} = 4{,}0$ m/seg, $\quad 75{,}6 + 3{,}07 \neq 72{,}2$ (solución entre ambas)
Tanteo 3.° $V_{30} = 3{,}7$ m/seg, $\quad 70{,}0 + 2{,}43 = 72{,}2$ (solución)

El caudal $Q = A_{30}V_{30} = \frac{1}{4}\pi(0{,}3)^2 \times 3{,}7 = 0{,}262$ m³/seg.

31. Un aceite, de densidad relativa 0,761, está fluyendo desde el depósito A al E, según se muestra en la Fig. 6-14. Las distintas pérdidas de carga puede suponerse vienen dadas como sigue:

de A a $B = 0{,}60\dfrac{V_{30}^2}{2g}$ $\qquad$ de C a $D = 0{,}40\dfrac{V_{15}^2}{2g}$

de B a $C = 9{,}0\dfrac{V_{30}^2}{2g}$ $\qquad$ de D a $E = 9{,}0\dfrac{V_{15}^2}{2g}$

Determinar (a) el caudal Q en m³/seg,
(b) la presión en C en kg/cm² y
(c) la potencia en C, en CV, tomando como plano de referencia el que pasa por E.

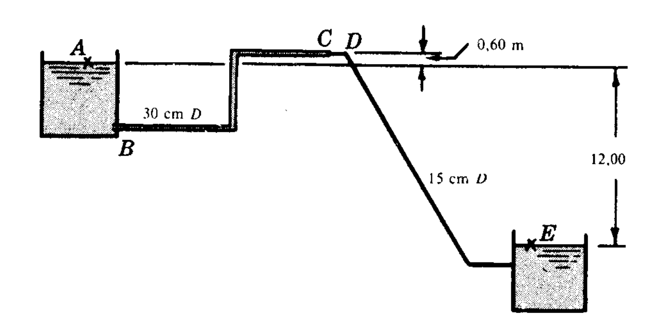


Fig. 6-14

Solución:

(a) Aplicando la ecuación de la energía entre A y E, plano de referencia el que pasa por E,

en A $\qquad$ de A a B $\qquad$ de B a C $\qquad$ de C a D $\qquad$ de D a E $\qquad$ en E

$$(0 + \text{despr.} + 40{,}0) - \left[\left(0{,}60\frac{V_{30}^2}{2g} + 9{,}0\frac{V_{30}^2}{2g}\right) + \left(0{,}40\frac{V_{15}^2}{2g} + 9{,}0\frac{V_{15}^2}{2g}\right)\right] = (0 + \text{despr.} + 0)$$

o bien $12{,}0 = 9{,}6(V_{30}^2/2g) + 9{,}4(V_{17}^2/2g)$. Además, $V_{30}^2 = (\frac{1}{2})^4 V_{15}^2 = \frac{1}{16}V_{15}^2$. Sustituyendo y despejando,

$$V_{15}^2/2g = 1{,}2 \text{ m},\quad V_{15} = 4{,}85 \text{ m/seg} \quad \text{y} \quad Q = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 4{,}85 = 0{,}086 \text{ m}^3/\text{seg}$$

(*b*) Aplicando la ecuación de la energía entre A y C, plano de referencia el que pasa por A,

$$(0 + \text{despr.} + 0) - (0{,}60 + 9{,}0)\frac{V_{30}^2}{2g} = (\frac{p_C}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 0{,}60) \quad \text{y} \quad \frac{V_{30}^2}{2g} = \frac{1}{16}\frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{1}{16}(1{,}2) = 0{,}075 \text{ m}$$

Por tanto, $p_C/w = -1{,}395$ m de aceite (man) y $p_C' = (0{,}761 \times 1000)(-1{,}395)/10^4 = -0{,}106$ kg/cm² (man).

Los mismos resultados podrían haberse obtenido también aplicando la ecuación de Bernoulli entre C y E. Las dos ecuaciones obtenidas por los dos caminos *no* constituirían, naturalmente, un sistema de ecuaciones independientes.

(*c*) Potencia en $C = \dfrac{wQH_C}{75} = \dfrac{(0{,}761 \times 1000)(0{,}086)(-1{,}395 + 0{,}075 + 12{,}6)}{75} = 9{,}85$ CV, plano de referencia el que pasa por E.

32. La carga extraída por la turbina CR de la Fig. 6-15 es de 60 m y la presión en T es de 5,10 kg/cm². Para unas pérdidas entre W y R de $2{,}0(V_{60}^2/2g)$ y de $3{,}0(V_{30}^2/2g)$ entre C y T, determinar (*a*) el caudal de agua que circula y (*b*) la altura de presión en R. Dibujar la línea de alturas totales.

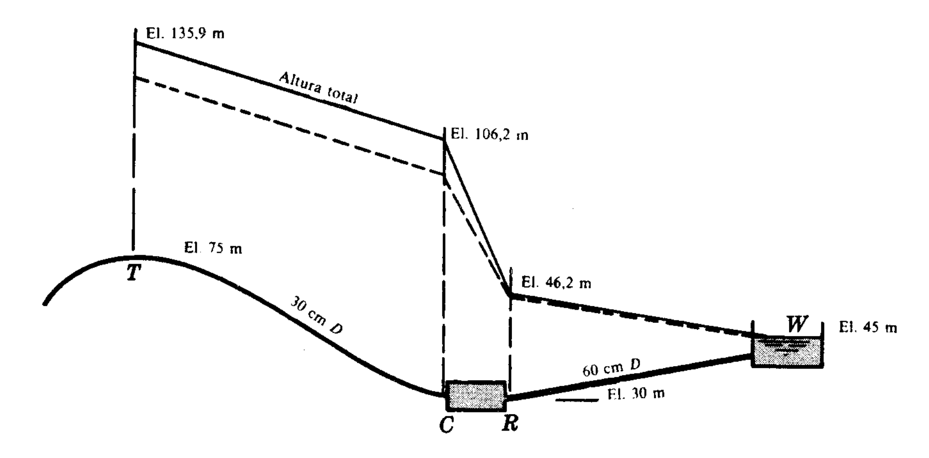


Fig. 6-15

Solución:

Como la elevación de la línea de alturas totales en T es igual a $(75 + \dfrac{5{,}10 \times 10^4}{1000} + \dfrac{V_{30}^2}{2g})$ muy por encima de la elevación en W, el agua circulará hacia el recipiente W.

(*a*) Aplicando la ecuación de la energía entre T y W, tomando como plano de referencia el de cota cero,

$$\underset{\text{en } T}{(\frac{5{,}10 \times 10^4}{1000} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 75)} - [\underset{\text{de } T \text{ a } C}{3{,}0\frac{V_{30}^2}{2g}} + \underset{\text{de } R \text{ a } W}{2{,}0\frac{V_{60}^2}{2g}}] - \underset{H_T}{60} = \underset{\text{en } W}{(0 + \text{despr.} + 45)}$$

Sustituyendo $V_{60}^2 = \frac{1}{16}V_{30}^2$ y operando, $V_{30}^2/2g = 9{,}88$ m, de donde $V_{30} = 13{,}9$ m/seg. Por tanto,

$$Q = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}3)^2 \times 13{,}9 = 0{,}98 \text{ m}^3/\text{seg}$$

(*b*) Aplicando la ecuación de la energía entre R y W, con plano de referencia el que pasa por R, $(p_R/w + \frac{1}{16} \times 9{,}88 + 0) - 2(\frac{1}{16} \times 9{,}88) = (0 + \text{despr.} + 15)$ y $p_R/w = 15{,}62$ m. El lector puede comprobar esta altura de presión aplicando la ecuación de Bernoulli entre T y R.

Para dibujar la línea de alturas totales se calcula la altura total en las secciones indicadas.

Altura total en $T = 51{,}0 + 9{,}9 + 75{,}0 = 135{,}9$ m
en $C = 135{,}9 - 3 \times 9{,}9 = 106{,}2$ m
en $R = 106{,}2 - 60{,}0 = 46{,}2$ m
en $W = 46{,}2 - 2 \times \frac{1}{16} \times 9{,}9 = 45{,}0$ m

En los siguientes capítulos se demostrará que la línea de alturas totales es una línea recta en el caso flujo permanente en una tubería de diámetro constante. La línea de alturas piezométricas será paralel la línea de alturas totales y situada por debajo de ella a una distancia igual a $V^2/2g$, altura de velocidad (la figura dibujada a trazos).

33. (*a*) ¿Cuál es la presión en la ojiva de un torpedo que se mueve en agua salada a 30 m/seg y a u profundidad de 9,0 m? (*b*) Si la presión en un punto lateral C del torpedo, y a la misma profundid que la ojiva, es de 0,70 kg/cm² (man), ¿cuál es la velocidad relativa en ese punto?

Solución:

(*a*) En este caso se obtiene una mayor claridad, en la aplicación de la ecuación de Bernoulli, al considerar torpedo en reposo y sumergido en una corriente de agua a la misma velocidad relativa que en el caso re La velocidad en la punta anterior del torpedo será ahora cero. Suponiendo que no hay pérdida de car en un tubo de corriente que vaya desde un punto A, delante del torpedo y a suficiente distancia para q el flujo no esté perturbado, y un punto B, situado en la punta de la ojiva del torpedo, la ecuación de Be noulli toma la forma

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A\right) - 0 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B\right) \quad \text{o bien} \quad \left(9{,}0 + \frac{(30)^2}{2g} + 0\right) = \left(\frac{p_B}{w} + 0 + 0\right)$$

Por tanto, $p_B/w = 55$ m de agua de mar, y $p'_B = wh/10^4 = 1025(55)/10^4 = 5{,}65$ kg/cm² (man).

Esta presión se llama presión de estancamiento (también presión de parada o de remanso) y puec expresarse en la forma $p_S = p_O + \frac{1}{2}\rho V_O^2$, en kg/m². Para un estudio más detallado, véase Capítulos 9 y 1

(*b*) Se puede aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y C o bien entre B y C. Escogiendo A y C

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A\right) - 0 = \left(\frac{p_C}{w} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C\right) \quad \text{o bien} \quad \left(9{,}0 + \frac{(30)^2}{2g} + 0\right) = \left(\frac{0{,}70 \times 10^4}{1025} + \frac{V_C^2}{2g} + 0\right)$$

de la cual $V_C = 30{,}7$ m/seg.

34. Una esfera está colocada en una corriente de aire, donde reina la presión atmosférica, y que se mueve a una velocidad de 30,0 m/seg. Suponiendo que no hay variación en la densidad del aire y que ésta es igual a 0,125 UTM/m³, (*a*) calcular la presión de estancamiento y (*b*) calcular la presión sobre un punto de la superficie de la esfera, punto B, a 75° del punto de estancamiento, si la velocidad en dicho punto es de 66,0 m/seg.

Solución:

(*a*) Aplicando la fórmula dada en el problema anterior se obtiene

$$p_S = p_O + \tfrac{1}{2}\rho V_O^2 = 1{,}033(10^4) + \tfrac{1}{2}(0{,}125)(30{,}0)^2 = 10.330 + 56{,}25 = 10.386 \text{ kg/m}^2$$

(*b*) Peso específico del aire $= \rho g = 0{,}125(9{,}8) = 1{,}225$ kg/m³.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el punto de estancamiento y el B, se obtiene

$$\left(\frac{p_S}{w} + \frac{V_S^2}{2g} + 0\right) - 0 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_B^2}{2g} + 0\right) \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{10.386}{1{,}225} + 0 + 0\right) = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{(66{,}0)^2}{2g} + 0\right)$$

de donde $p_B/w = 8238$ m de aire, y $p'_B = wh/10^4 = 1{,}225(8238)/10^4 = 1{,}010$ kg/cm².

35. Un gran depósito cerrado está lleno de amoniaco a una presión manométrica de 0,37 kg/cm² y a una temperatura de 18° C. El amoniaco descarga en la atmósfera a través de un pequeño orificio practicado en uno de los lados del depósito. Despreciando las pérdidas por fricción, calcular la velocidad con que el amoniaco abandona el depósito (*a*) suponiendo su densidad constante y (*b*) suponiendo que el flujo tiene lugar en condiciones adiabáticas.

Solución:

(*a*) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el depósito y la atmósfera,

$$\left(\frac{0,37 \times 10^4}{w_1} + 0 + 0\right) = \left(0 + \frac{V^2}{2g} + 0\right) \quad \text{donde} \quad w_1 = \frac{p_1}{RT} = \frac{(0,37 + 1,030)10^4}{49,6(273 + 18)} = 0,97 \text{ kg/m}^3$$

Sustituyendo y despejando, $V = 273$ m/seg.

Para un peso específico w constante puede utilizarse indistintamente la presión manométrica o la absoluta. Sin embargo, cuando w no es constante *debe* emplearse la carga de presión absoluta.

(*b*) Para $V_1 = 0$ y $z_1 = z_2$, la ecuación (*D*), para procesos adiabáticos, del Problema 20 puede escribirse

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{w_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right] = \frac{V_2^2}{2g}$$

Para el amoniaco, de la Tabla 1 del Apéndice, $k = 1,32$ y

$$\frac{1,32}{0,32} \times \frac{1,40 \times 10^4}{0,97}\left[1 - \left(\frac{1,03 \times 10^4}{1,40 \times 10^4}\right)^{0,242}\right] = \frac{V_2^2}{2g} = 4172, \qquad \text{de donde} \qquad V_2 = 285 \text{ m/seg}$$

Al utilizar la hipótesis de densidad constante, el error en la velocidad es del 4,2 %, aproximadamente. El peso específico del amoniaco en el chorro se calcula mediante la expresión

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^k \qquad \text{o} \qquad \frac{1,40}{1,03} = \left(\frac{0,97}{w_2}\right)^{1,32} \qquad \text{y} \qquad w_2 = 0,774 \text{ kg/m}^3$$

A pesar de esta variación de un 20,3 % en la densidad, el error en la velocidad fue solo de un 4,2 %.

36. Comparar las velocidades en los casos (*a*) y (*b*) del Problema 35 para una presión en el depósito de 1,08 kg/cm² (man).

Solución:

(*a*) $w_1 = \dfrac{p_1}{RT} = \dfrac{2,11 \times 10^4}{49,6 \times 291} = 1,460$ kg/m³ y, a partir del problema anterior,

$$\frac{1,08 \times 10^4}{1,46} = \frac{V^2}{2g} \qquad \text{y} \qquad V = 380 \text{ m/seg}$$

(*b*) Mediante la expresión dada en el problema anterior para procesos adiabáticos,

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1,32}{0,32} \times \frac{2,11 \times 10^4}{1,46}\left[1 - \left(\frac{1,03 \times 10^4}{2,11 \times 10^4}\right)^{0,242}\right] = 9410, \qquad \text{de donde} \qquad V = 430 \text{ m/seg}$$

El error cometido, al suponer la densidad constante, en la velocidad es del 11,6 % aproximadamente. La variación de densidad es del 41 % aproximadamente.

Las limitaciones impuestas en el módulo de la velocidad se discutirán en el Capítulo 11. Se verá que la velocidad límite, para la temperatura considerada, es de 430 m/seg.

37. Una corriente de nitrógeno está fluyendo desde una tubería de 5,0 cm, donde la temperatura es de 4,5° C y la presión 2,80 kg/cm², a una tubería de 2,5 cm en la que la presión es 1,50 kg/cm². Las presiones son manométricas. Calcular la velocidad en cada una de las tuberías, suponiendo que no hay pérdidas y aplicando el proceso isotérmico.

Solución:

Aplicando la ecuación (*C*) del Problema 20 para condiciones isotérmicas y despejando V_2, teniendo en cuenta que $z_1 = z_2$,

$$\frac{V_2^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{A_2 p_2}{A_1 p_1}\right)^2\right] = \frac{p_1}{w_1} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = RT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \quad \text{o} \quad V_2 = \sqrt{2g \times \frac{RT \ln(p_1/p_2)}{1 - (A_2 p_2/A_1 p_1)^2}}$$

Sustituyendo valores, y teniendo en cuenta que $R = 30{,}3$ para el nitrógeno, Tabla 1 del Apéndice,

$$V_2 = \sqrt{2g \times \frac{30{,}3 \times 277{,}5 \ln (3{,}83 \times 10^4)/(2{,}53 \times 10^4)}{1 - (\frac{1}{2})^4[(2{,}53 \times 10^4)/(3{,}83 \times 10^4)]^2}} = 265 \text{ m/seg}$$

Además, $V_1 = (A_2/A_1)(p_2/p_1)V_2 = (\frac{1}{2})^2(2{,}53/3{,}83)(265) = 43{,}8$ m/seg.

38. En el Problema 37, siendo la presión, velocidad y temperatura, respectivamente, en la tuberí de 5,0 cm, 2,67 kg/cm² (man), 43 m/seg y 0° C, calcular la presión y la velocidad en la tubería d 2,5 cm. Se supone que no hay pérdidas y que las condiciones son isotérmicas.

Solución:

Utilizando la ecuación (*C*), para condiciones isotérmicas del Problema 20, poniéndola en función de V en lugar de V_2,

$$(a) \quad \frac{(43)^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{4}{1}\right)^2\left(\frac{3{,}70 \times 10^4}{p_2' \times 10^4}\right)^2\right] = 30{,}3 \times 273 \ln \frac{p_2' \times 10^4}{3{,}70 \times 10^4}$$

Aunque solo aparece una incógnita, la solución directa es difícil. Se utiliza el método de aproximacione sucesivas, dando un valor a p_2', que figura en el denominador de la fracción entre corchetes.

(1) Se supone $p_2' = 3{,}70$ kg/cm² (ab) y se despeja p_2' del segundo miembro de la ecuación.

$$94{,}4[1 - 16(1)^2] = 8272 \ln (p_2'/3{,}70)$$

de donde $p_2' = 3{,}11$ kg/cm² (ab).

(2) Al utilizar el valor $p_2' = 3{,}11$ kg/cm² en (*a*) resultaría una nueva desigualdad. Anticipando el resultado, se supone el valor $p_2' = 2{,}45$ kg/cm³, y se procede como anteriormente.

$$94{,}4[1 - 16(3{,}70/2{,}45)^2] = 8272 \ln (p_2'/3{,}70)$$

de donde $p_2' = 2{,}44$ kg/cm² (ab), que puede considerarse como solución operando con regla de cálculo. Para la velocidad,

$$V_2 = \frac{w_1 A_1}{w_2 A_2} V_1 \quad \text{o} \quad V_2 = \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)V_1 = \frac{3{,}70 \times 10^4}{2{,}44 \times 10^4}\left(\frac{2}{1}\right)^2 \times 43 = 261 \text{ m/seg}$$

Problemas propuestos

39. ¿Cuál es la velocidad media en una tubería de 15 cm, si el caudal de agua transportado es de 3800 m³/día?
Sol. 2,48 m/seg

40. ¿Qué diámetro debe de tener una tubería para transportar 2 m³/seg a una velocidad media de 3 m/seg?
Sol. 92 cm

41. Una tubería de 30 cm de diámetro, que transporta 110 l/seg, está conectada a una tubería de 15 cm. Determinar la altura de velocidad en la tubería de 15 cm. *Sol.* 1,97 m

42. Una tubería de 15 cm de diámetro transporta 80 l/seg. La tubería se ramifica en otras dos, una de 5 cm y la otra de 10 cm de diámetro. Si la velocidad en la tubería de 5 cm es de 12 m/seg, ¿cuál es la velocidad en la tubería de 10 cm? *Sol.* 7,20 m/seg

43. Determinar si las expresiones siguientes de las componentes de la velocidad satisfacen las condiciones de flujo permanente e incompresible.

(*a*) $u = 3xy^2 + 2x + y^2$, $v = x^2 - 2y - y^3$

(*b*) $u = 2x^2 + 3y^2$, $v = -3xy$

Sol. (*a*) Sí (*b*) No

44. Una tubería de 30 cm de diámetro transporta aceite, viniendo dada la distribución de velocidades por $v = 30(r_0^2 - r^2)$. Determinar la velocidad media y el valor del coeficiente de corrección de la energía cinética.
Sol. $\alpha = 2{,}00$, $V_{av} = 34$ cm/seg

45. Demostrar que la ecuación de continuidad puede escribirse en la forma $1 = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V_{av}}\right) dA$.

46. Una tubería de 30 cm de diámetro transporta 110 l/seg de un aceite de densidad relativa 0,812 y la presión manométrica en A es de 0,20 kg/cm^2. Si el punto A está situado 1,80 m por encima del plano de referencia, calcular la energía en A en kgm/kg. *Sol.* 4,27 kgm/kg

47. ¿Cuántos kg/seg de anhídrido carbónico fluyen a través de una tubería de 15 cm de diámetro si la presión manométrica es de 1,75 kg/cm^2, la temperatura de 27° C y la velocidad media de 2,50 m/seg? *Sol.* 0,213 kg/seg

48. Una tubería de 20 cm de diámetro transporta aire a 24 m/seg, 1,51 kg/cm^2 de presión absoluta y 27° C. ¿Cuál es el caudal de aire en peso que fluye? La tubería de 20 cm se reduce a 10 cm de diámetro y la presión y temperatura en esta última son 1,33 kg/cm^2 (ab) y 11° C, respectivamente. Determinar la velocidad en la tubería de 10 cm y los caudales en m^3/seg en ambas tuberías.
Sol. 1,29 kg/seg, 103 m/seg, 0,75 m^3/seg, 0,81 m^3/seg

49. A través de una tubería de 10 cm está fluyendo aire a una velocidad de 5,00 m/seg. La presión manométrica medida es de 2,00 kg/cm^2 y la temperatura 15° C. En otro punto, aguas abajo, la presión manométrica es 1,40 kg/cm^2 y la temperatura 27° C. Para una lectura barométrica correspondiente a la presión atmosférica normal calcular la velocidad en el punto aguas abajo y los caudales en volumen en ambas secciones.
Sol. 6,54 m/seg, 39,3 l/seg, 51,4 l/seg

50. Anhídrido sulfuroso fluye a través de una tubería de 30 cm de diámetro, que se reduce a 10 cm de diámetro al desaguar en el interior de una chimenea. Las presiones en la tubería y en el chorro que desagua son, respectivamente, 1,40 kg/cm^2 (ab) y la presión atmosférica (1,033 kg/cm^2). La velocidad en la tubería es de 15,0 m/seg y la temperatura 27° C. Determinar la velocidad en la corriente de desagüe si la temperatura del gas es allí de −5° C.
Sol. 72,5 m/seg

51. A través de una tubería de 15 cm de diámetro fluye agua a una presión de 4,20 kg/cm^2. Suponiendo que no hay pérdidas, ¿cuál es el caudal si en una reducción de 7,5 cm de diámetro la presión es de 1,40 kg/cm^2?
Sol. $Q = 107$ l/seg

52. Si en el Problema 51 fluye un aceite de densidad relativa 0,752, calcular el caudal. *Sol.* 123 l/seg

53. Si lo que fluye en el Problema 51 es tetracloruro de carbono (densidad relativa 1,594), determinar Q.
Sol. 85 l/seg

54. A través de una tubería vertical de 30 cm de diámetro fluyen hacia arriba 220 l/seg de agua. En el punto A de la tubería la presión es 2,20 kg/cm^2. En el punto B, 4,60 m por encima de A, el diámetro es de 60 cm y la pérdida de carga entre A y B es igual a 1,80 m. Determinar la presión en B en kg/cm^2. *Sol.* 1,61 kg/cm^2

55. Una tubería de 30 cm de diámetro tiene un corto tramo en el que el diámetro se reduce gradualmente hasta 15 cm y de nuevo aumenta a 30 cm. La sección de 15 cm está 60 cm por debajo de la sección A, situada en la tubería de 30 cm, donde la presión es de 5,25 kg/cm^2. Si entre las dos secciones anteriores se conecta un manómetro diferencial de mercurio, ¿cuál es la lectura del manómetro cuando circula hacia abajo un caudal de agua de 120 l/seg? Supóngase que no existen pérdidas. *Sol.* 17,6 cm

56. Una tubería de 30 cm de diámetro transporta aceite de densidad relativa 0,811 a una velocidad de 24 m/seg. En los puntos A y B las medidas de la presión y elevación fueron, respectivamente, 3,70 kg/cm^2 y 2,96 kg/cm^2 y 30 m y 33 m. Para un flujo permanente, determinar la pérdida de carga entre A y B. *Sol.* 6,12 m

57. Un chorro de agua, de 7,5 cm de diámetro, descarga en la atmósfera a una velocidad de 24 m/seg. Calcular la potencia, en caballos de vapor del chorro, utilizando como plano de referencia el horizontal que pasa por el eje del chorro. *Sol.* 41,6 CV

58. Un recipiente suministra agua a través de una tubería horizontal de 15 cm de diámetro y 300 m de longitud. El flujo es a tubería llena y desagua en la atmósfera un caudal de 65 l/seg. ¿Cuál es la presión en la mitad de la longitud de la tubería al suponer que la única pérdida de carga es de 6,20 m cada 100 m de tubería?
Sol. 0,93 kg/cm^2

59. Un aceite de densidad relativa 0,750 es bombeado desde un depósito por encima de una colina a través de una tubería de 60 cm de diámetro, manteniendo una presión en el punto más elevado de la línea de 1,80 kg/cm^2. La

parte superior de la tubería está 75 m sobre la superficie libre del depósito y el caudal de aceite bombeado de 620 l/seg. Si la pérdida de carga desde el depósito hasta la cima es de 4,70 m, ¿qué potencia debe suministr la bomba al líquido? *Sol.* 645 CV

60. Una bomba aspira agua de un pozo mediante una tubería vertical de 15 cm. La bomba desagua a través de ur tubería horizontal de 10 cm de diámetro, situada 3,20 m sobre el nivel del agua del pozo. Cuando se bombea 35 l/seg, las lecturas de los manómetros colocados a la entrada y a la salida de la bomba son $-0{,}32$ kg/cm^2 $+1{,}80$ kg/cm^2, respectivamente. El manómetro de descarga está situado 1,0 m por encima del manómetro c succión. Calcular la potencia de salida de la bomba y la pérdida de carga en la tubería de succión de 15 cn *Sol.* 10,4 CV, 0,80 m

61. Calcular la pérdida de carga en una tubería de 15 cm de diámetro si es necesario mantener una presión de 2,3 kg/cm^2 en un punto aguas arriba y situado 1,80 m por debajo de la sección de la tubería por la que desagua e la atmósfera 55 l/seg de agua. *Sol.* 21,70 m

62. Un depósito cerrado de grandes dimensiones está parcialmente lleno de agua, y el espacio superior con aire presión. Una manguera de 5 cm de diámetro, conectada al depósito, desagua sobre la azotea de un edificio, 15 ı por encima de la superficie libre del agua del depósito. Las pérdidas por fricción son de 5,50 m. ¿Qué presión d aire debe mantenerse en el depósito para desaguar sobre la azotea un caudal de 12 l/seg? *Sol.* 2,24 kg/cm

63. Mediante una bomba se bombea agua desde un recipiente A, a una elevación de 225 m, hasta otro depósito E a una elevación de 240 m, a través de una tubería de 30 cm de diámetro. La presión en la tubería de 30 cm e el punto D, a una elevación de 195 m, es de 5,60 kg/cm^2. Las pérdidas de carga son: de A a la entrada de l bomba B = 0,60 m, de la salida de la bomba C hasta $D = 38V^2/2g$ y desde D a $E = 40V^2/2g$. Determinar e caudal Q y la potencia en CV suministrada por la bomba BC. *Sol.* 166 l/seg, 83 CV

64. Un venturímetro horizontal tiene diámetros de 60 y 45 cm en la entrada y garganta, respectivamente. La lectur de un manómetro diferencial de agua es de 10 cm cuando está conectado entre la entrada y la garganta y fluy aire a través del aparato. Considerando constante e igual a 1,28 kg/m^3 el peso específico del aire y despreciand la fricción, determinar el caudal en m^3/seg. *Sol.* 6,66 m^3/seg

65. Desde un depósito hay que transvasar un caudal de agua de 89 l/seg mediante un sifón. El extremo por el que desagua el sifón ha de estar 4,20 m por debajo de la superficie libre del agua en el depósito. Los términos de pérdida de carga son: $1{,}50V^2/2g$ desde el depósito hasta la parte más elevada del sifón y $1{,}00V^2/2g$ desde ésta al desagüe. La parte superior del sifón está 1,50 m por encima de la superficie del agua. Determinar el diámetro de la tubería necesaria y la presión en la parte superior del sifón. *Sol.* 15,3 cm, $-0{,}45$ kg/cm^2

66. Una tubería horizontal de 60 cm de diámetro transporta 440 l/seg de un aceite de densidad relativa 0,825. Las cuatro bombas instaladas a lo largo de la línea son iguales, es decir, las presiones a la entrada y a la salida son, respectivamente, $-0{,}56$ kg/cm^2 y 24,50 kg/cm^2. Si la pérdida de carga, en las condiciones en que desagua, es de 6,00 m cada 1000 m de tubería, ¿con qué separación deben colocarse las bombas? *Sol.* 50.600 m

67. Un depósito de grandes dimensiones está lleno de aire a una presión manométrica de 0,40 kg/cm^2 y una temperatura de 18° C. El aire se descarga en la atmósfera (1,030 kg/cm^2) a través de un pequeño orificio abierto en uno de los lados del depósito. Despreciando las pérdidas por fricción, calcular la velocidad de salida del aire al suponer (*a*) densidad constante del aire, (*b*) condiciones de flujo adiabático. *Sol.* 216 m/seg, 229 m/seg

68. En el Problema 67, cuando la presión sea de 0,70 kg/cm^2 (man), ¿cuáles serán las velocidades en los casos (*a*) y (*b*)? *Sol.* 260 m/seg, 286 m/seg

69. Desde una tubería de 30 mm, donde la presión manométrica es de 4,20 kg/cm^2 y la temperatura de 4° C, está fluyendo anhídrido carbónico en el interior de una tubería de 15 mm un caudal en peso de 0,040 kg/seg. Despreciando el rozamiento y suponiendo el flujo isotérmico, determinar la presión en la tubería de 15 mm. *Sol.* 900 kg/m^2 (absoluta)

70. Un soplador de aire ha de proporcionar 1140 m^3/min. Dos manómetros de tubo en U miden las presiones de succión y de descarga. La lectura del manómetro de succión es negativa de 5 cm de agua. El manómetro de descarga, colocado 1,0 m por encima del orificio manométrico de succión, da una lectura de +7,5 cm de agua. Los conductos de descarga y de succión son del mismo diámetro. ¿Qué potencia debe de tener el motor que mueva el soplador si el rendimiento global es del 68 % (w = 1,20 kg/m^3 para el aire)? *Sol.* 48,1 CV

71. Se está ensayando una tubería de 30 cm para evaluar las pérdidas de carga. Cuando el caudal de agua es de 180 l/seg, la presión en el punto A de la tubería es de 2,80 kg/cm^2. Entre el punto A y el punto B, aguas abajo y 3,0 m más elevado que A, se conecta un manómetro diferencial. La lectura manométrica es de 1,0 m, siendo el líquido mercurio e indicando mayor presión en A. ¿Cuál es la pérdida de carga entre A y B? *Sol.* 12,57 m

72. Prandtl ha sugerido que la distribución de velocidades, para flujo turbulento en conductos, viene representada

muy aproximadamente por la expresión $v = v_{max}(y/r_o)^{1/7}$, donde r_o es el radio de la tubería e y la distancia medida a partir de la pared. Determinar la expresión de la velocidad media en función de la velocidad en el eje v_{max}.
Sol. $V = 0{,}817 v_{max}$

73. ¿Cuál es el coeficiente de corrección de la energía cinética para la distribución de velocidades del Problema 72?
Sol. $\alpha = 1{,}06$

74. Dos placas planas de grandes dimensiones están separadas 1,0 cm. Demostrar que $\alpha = 1{,}43$ si la distribución de velocidades viene representada por $v = v_{max}(1 - 6200 r^2)$, donde r se mide desde el plano medio entre las placas.

75. A través de un conducto de sección variable está fluyendo aire isoentrópicamente. Para un flujo permanente, demostrar que la velocidad V_2 en una sección aguas abajo de la sección 1 puede escribirse

$$V_2 = V_1(p_1/p_2)^{1/k}(A_1/A_2) \text{ para un conducto de forma cualquiera, y}$$
$$V_2 = V_1(p_1/p_2)^{1/k}(D_1/D_2)^2 \text{ para conductos circulares}$$

76. Con referencia a la Fig. 6-16, la presión absoluta en el interior de la tubería en S no debe ser inferior a 0,24 kg/cm^2. Despreciando las pérdidas, ¿hasta qué altura sobre la superficie libre A del agua puede elevarse S?
Sol. 6,73 m

77. La bomba B comunica una altura de 42,20 m al agua que fluye hacia E, como se muestra en la Fig. 6-17. Si la presión en C es de $-0{,}15$ kg/cm^2 y la pérdida de carga entre D y E es $8{,}0(V^2/2g)$, ¿cuál es el caudal?
Sol. 275 l/seg

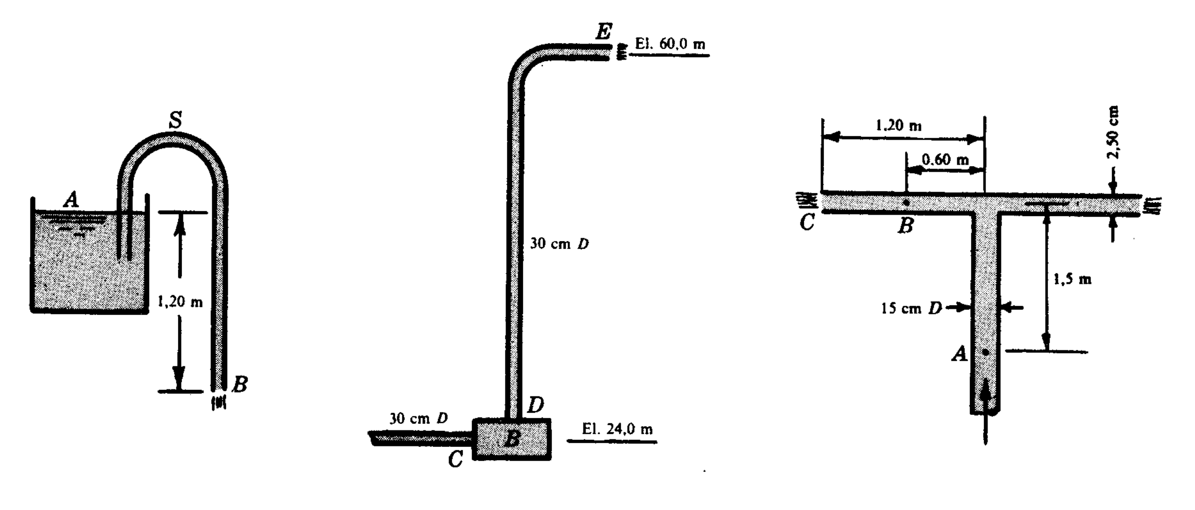


Fig. 6-16 Fig. 6-17 Fig. 6-18

78. El agua fluye radialmente entre dos bridas situadas en el extremo de una tubería de 15 cm de diámetro, como se muestra en la Fig. 6-18. Despreciando las pérdidas, si la altura de presión en A es $-0{,}30$ m, determinar la altura de presión en B y el caudal en l/seg. *Sol.* $-0{,}048$ m, 105,5 l/seg

79. Demostrar que la velocidad media V en una tubería circular de radio r_o es igual a $2v_{max}\left[\dfrac{1}{(K+1)(K+2)}\right]$ para una distribución de velocidades que venga expresada por $v = v_{max}(1 - r/r_o)^K$.

80. Encontrar el coeficiente de corrección de la energía cinética α para el Problema 79.

Sol. $\alpha = \dfrac{(K+1)^3(K+2)^3}{4(3K+1)(3K+2)}$

Capítulo 7

Flujo de fluidos en tuberías

INTRODUCCION

Se va a aplicar el principio de la energía a la solución de problemas prácticos de flujos en t que frecuentemente se presentan en las diversas ramas de la ingeniería. El flujo de un fluido real es más complejo que el de un fluido ideal. Debido a la viscosidad de los fluidos reales, en su mov aparecen fuerzas cortantes entre las partículas fluidas y las paredes del contorno y entre las di capas de fluido. Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que resolverían de forma el problema del flujo (ecuaciones de Euler) no admiten, por lo común, una solución. Como cor cia, los problemas de flujos reales se resuelven aprovechando datos experimentales y utilizand dos semiempíricos.

Existen dos tipos de flujos permanentes en el caso de fluidos reales, que es necesario coı y entender. Estos se llaman flujo laminar y flujo turbulento. Ambos tipos de flujos vienen gob por leyes distintas.

FLUJO LAMINAR

En el flujo laminar las partículas fluidas se mueven según trayectorias paralelas, formando junto de ellas capas o láminas. Los módulos de las velocidades de capas adyacentes no tienen el valor. El flujo laminar está gobernado por la ley que relaciona la tensión cortante con la veloc deformación angular, es decir, la tensión cortante es igual al producto de la viscosidad del fluid gradiente de las velocidades o bien $\tau = \mu\, dv/dy$ (véase Capítulo 1). La viscosidad del fluido es l nitud física predominante y su acción amortigua cualquier tendencia a la turbulencia.

VELOCIDAD CRITICA

La velocidad crítica de interés práctico para el ingeniero es aquella velocidad por debajo de toda turbulencia es amortiguada por la acción de la viscosidad del fluido. La experiencia den que un límite superior para el régimen laminar, en tuberías, viene fijado por un valor del núm Reynolds alrededor de 2000, en la mayoría de los casos prácticos.

NUMERO DE REYNOLDS

El número de Reynolds, que es un grupo adimensional, viene dado por el cociente de las f de inercia por las fuerzas debidas a la viscosidad (véase Capítulo 5 sobre semejanza dinámica

Para tuberías circulares, en flujo a tubería llena,

$$\text{Número de Reynolds } R_E = \frac{Vd\rho}{\mu} \quad \text{o} \quad \frac{Vd}{\nu} = \frac{V(2r_o)}{\nu}$$

donde V = velocidad media en m/seg
d = radio de la tubería en m, r_0 = radio de la tubería en m
ν = viscosidad cinemática del fluido en m^2/seg
ρ = densidad del fluido en UTM/m^3 o $kg\ seg^2/m^4$
μ = viscosidad absoluta en $kg\ seg/m^2$

En el caso de conductos de sección recta no circular se utiliza como longitud característic número de Reynolds el radio hidráulico R, igual al cociente del área de la sección recta por el p tro mojado, expresando el cociente en m. El número de Reynolds es ahora

$$R_E = \frac{V(4R)}{\nu}$$

FLUJO TURBULENTO

En el flujo turbulento las partículas fluidas se mueven de forma desordenada en todas las di nes. Es imposible conocer la trayectoria de una partícula individualmente.

La tensión cortante en el flujo turbulento puede expresarse así

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{dv}{dy} \qquad (2a)$$

donde η (eta) = un factor que depende de la densidad del fluido y de las características del movimiento. El primer término entre paréntesis (μ) representa los efectos debidos a la viscosidad y el segundo (η) tiene en cuenta los efectos debidos a la turbulencia.

Mediante los resultados obtenidos experimentalmente puede obtenerse la solución de las tensiones cortantes en el caso de flujos turbulentos. Prandtl ha sugerido la forma

$$\tau = \rho l^2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \qquad (2b)$$

para expresar las tensiones cortantes en flujos turbulentos. Esta fórmula tiene el inconveniente de que la longitud de mezcla l es función de y. Cuanto mayor es y, distancia a la pared de la tubería, mayor es el valor de l. Posteriormente, Von Karman ha sugerido la fórmula

$$\tau = \tau_o\left(1 - \frac{y}{r_o}\right) = \rho k^2 \frac{(dv/dy)^4}{(d^2v/dy^2)^2} \qquad (2c)$$

Aunque k no es una constante, este número adimensional se mantiene aproximadamente igual a 0,40. La integración de esta expresión conduce a fórmulas del tipo de la (*7b*), que se da más adelante.

TENSION CORTANTE EN LA PARED DE UNA TUBERIA

La tensión cortante en la pared de una tubería, como se desarrollará en el Problema 5, es

$$\tau_o = f\rho V^2/8 \quad \text{en kg/m}^2 \qquad (3)$$

donde f es el coeficiente de fricción, adimensional, que se describe más adelante.

Se demostrará en el Problema 4 que la tensión cortante varía linealmente a lo largo de la sección recta y que

$$\tau = \frac{(p_1 - p_2)}{2L}r \qquad \text{o} \qquad \tau = \left(\frac{wh_L}{2L}\right)r \qquad (4)$$

El término $\sqrt{\tau_0/\rho}$ se llama velocidad de corte o de fricción y se representa por el símbolo v_*. A partir de la expresión (*3*) se obtiene

$$v_* = \sqrt{\tau_o/\rho} = V\sqrt{f/8} \qquad (5)$$

DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

La distribución de velocidades en una sección recta seguirá una ley de variación parabólica en el flujo *laminar*. La velocidad máxima tiene lugar en el eje de la tubería y es igual al doble de la velocidad media. La ecuación que da el perfil de velocidades en el flujo laminar (véase Problema 6) puede expresarse como sigue

$$v = v_c - \left(\frac{wh_L}{4\mu L}\right)r^2 \qquad (6)$$

En los flujos *turbulentos* resulta una distribución de velocidades más uniforme. A partir de los datos experimentales de Nikuradse y otros investigadores, se dan a continuación las ecuaciones de los perfiles de velocidades en función de la velocidad en el eje de la tubería v_c o en función de la velocidad de corte v_*.

(*a*) Una fórmula experimental es

$$v = v_c(y/r_o)^n \qquad (7a)$$

donde $n = \frac{1}{7}$, para tuberías lisas, hasta R_E = 100.000
$n = \frac{1}{8}$, para tuberías lisas y R_E de 100.000 a 400.000

(*b*) Para tuberías *lisas*,

$$v = v_*(5{,}5 + 5{,}75 \log yv_*/\nu) \tag{7b}$$

Para el término yv_*/ν, véase la parte (*e*) del Problema 8

(*c*) Para tuberías *lisas* (y $5000 < R_E < 3.000.000$) y para tuberías rugosas en la zona de exclusiva influencia de la rugosidad,

$$(v_c - v) = -2{,}5\sqrt{\tau_o/\rho}\, \ln y/r_o = -2{,}5\, v_* \ln y/r_o \tag{7c}$$

En función de la velocidad media V, Vennard ha sugerido que V/v_c puede escribirse en la forma

$$\frac{V}{v_c} = \frac{1}{1 + 4{,}07\sqrt{f/8}} \tag{8}$$

(*d*) Para tuberías *rugosas*,

$$v = v_*(8{,}5 + 5{,}75 \log y/\epsilon) \tag{9a}$$

donde ϵ es la rugosidad absoluta de la pared de la tubería.

(*e*) Para contornos *rugosos o lisos*,

$$\frac{v - V}{V\sqrt{f}} = 2 \log y/r_o + 1{,}32 \tag{9b}$$

También

$$v_c/V = 1{,}43\sqrt{f} + 1 \tag{9c}$$

PERDIDA DE CARGA EN FLUJO LAMINAR

En el flujo laminar la pérdida de carga viene dada por la fórmula de Hagen-Poiseuille, que se deducirá en el Problema 6. Su expresión es

$$\text{Pérdida de carga (m)} = \frac{32\ (\text{viscosidad } \mu)(\text{longitud } L \text{ m})(\text{velocidad media } V)}{(\text{peso específico } w)(\text{diámetro } d \text{ m})^2}$$

$$= \frac{32\mu LV}{w\,d^2} \tag{10a}$$

En función de la viscosidad cinemática, como $\mu/w = \nu/g$, se obtiene

$$\text{Pérdida de carga} = \frac{32\nu LV}{gd^2} \tag{10b}$$

FORMULA DE DARCY-WEISBACH

La fórmula de Darcy-Weisbach, desarrollada en el Problema 5 del Capítulo 5, es la fórmula básica para el cálculo de las pérdidas de carga en las tuberías y conductos. La ecuación es la siguiente:

$$\text{Pérdida de carga (m)} = \text{coeficiente de fricción } f \times \frac{\text{longitud } L \text{ (m)}}{\text{diámetro } d \text{ (m)}} \times \text{altura de velocidad } \frac{V^2}{2g} \text{ (m)}$$

$$= f\,\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g} \tag{11}$$

Como ya se señaló en el Capítulo 6, la altura de velocidad exacta, en una sección recta, se obtiene dividiendo el cuadrado de la velocidad media $(Q/A)^2$ por $2g$ y multiplicando el resultado por un coeficiente α. En régimen turbulento en tuberías y conductos α puede considerarse igual a la unidad sin apreciable error en el resultado.

COEFICIENTE DE FRICCION

El factor o coeficiente de fricción f puede deducirse matemáticamente en el caso de régimen laminar, mas en el caso de flujo turbulento no se dispone de relaciones matemáticas sencillas para obtener la variación de f con el número de Reynolds. Todavía más, Nikuradse y otros investigadores han encontrado que sobre el valor de f también influye la rugosidad relativa de la tubería (igual a la relación de la altura de las imperfecciones superficiales ϵ al diámetro interior de la tubería).

(*a*) Para flujo *laminar* la ecuación (*10b*), dada anteriormente, puede ordenarse como sigue:

$$\text{Pérdida de carga} = 64\frac{\nu}{Vd}\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{64}{R_E}\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \qquad (12a)$$

Por tanto, *para régimen laminar en todas las tuberías y para cualquier fluido*, el valor de f viene dado por

$$f = 64/R_E \qquad (12b)$$

R_E tiene un valor práctico máximo de 2000 para que el flujo sea laminar.

(*b*) Para *flujo turbulento*, muchos ingenieros hidráulicos e investigadores se han esforzado en el cálculo de f, tanto a partir de sus propios resultados como de los resultados obtenidos por otros investigadores.

(*1*) Para flujo turbulento en *tuberías rugosas o lisas* las leyes de resistencia universales pueden deducirse a partir de

$$f = 8\tau_0/\rho V^2 = 8V_*^2/V^2 \qquad (13)$$

(*2*) Para tuberías *lisas*, Blasius ha sugerido, con el número de Reynolds comprendido entre 3000 y 100.000,

$$f = 0{,}316/R_E^{0{,}25} \qquad (14)$$

Para valores de R_E hasta 3.000.000, aproximadamente, la ecuación de Von Karman, modificada por Prandtl, es

$$1/\sqrt{f} = 2\log(R_E\sqrt{f}) - 0{,}8 \qquad (15)$$

(*3*) Para tuberías *rugosas*,

$$1/\sqrt{f} = 2\log r_0/\epsilon + 1{,}74 \qquad (16)$$

(*4*) Para *todas* las tuberías, el Hydraulic Institute de los Estados Unidos de Norteamérica y la mayoría de los ingenieros consideran la ecuación de Colebrook como la más aceptable para calcular f. La ecuación es

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left[\frac{\epsilon}{3{,}7d} + \frac{2{,}51}{R_E\sqrt{f}}\right] \qquad (17)$$

Aunque la ecuación (*17*) es de resolución muy engorrosa, se dispone de diagramas que dan las relaciones existentes entre el coeficiente de fricción f, el número de Reynolds R_E y la rugosidad relativa ϵ/d. De estos diagramas se incluyen dos en el Apéndice. El Diagrama A-1 (Diagrama de Moody, publicado por cortesía de la American Society of Mechanical Engineers) se utiliza normalmente cuando se conoce Q, y el Diagrama A-2 se utiliza cuando se desea calcular el caudal. La última forma fue sugerida primeramente por S. P. Johnson y por Hunter Rouse.

Se observa que para tuberías lisas, en las que el valor de ϵ/d es muy pequeño, puede despreciarse el primer término entre corchetes de (*17*); en este caso las (*17*) y (*15*) son análogas. Del mismo modo, para números de Reynolds R_E muy elevados, el segundo término entre corchetes de la (*17*) es despreciable; en tales casos la viscosidad no influye prácticamente y f depende tan solo de la rugosidad relativa de la tubería. Este hecho se pone de manifiesto en el Diagrama A-1 ya que las curvas se vuelven horizontales para números de Reynolds elevados.

Antes de utilizar los diagramas, el ingeniero ha de poder estimar la rugosidad relativa de la tubería a partir de su propia experiencia y/o de la de los demás. Los valores sugeridos para el tamaño de las imperfecciones superficiales ϵ, en el caso de tuberías nuevas, se incluyen los Diagramas A-1 y A-2.

OTRAS PERDIDAS DE CARGA

Otras pérdidas de carga, tales como las que tienen lugar en los accesorios de tuberías, se dan generalmente en la forma

$$\text{Pérdida de carga (m)} = K(V^2/2g) \qquad (18)$$

En las Tablas 4 y 5 del Apéndice se da una serie de valores de las pérdidas de carga en los accesorios más comúnmente utilizados.

Problemas resueltos

1. Determinar la velocidad crítica para (*a*) un fuel-oil medio que fluye a 15° C a través de una tubería de 15 cm de diámetro y (*b*) el agua a 15° C que circula por una tubería de 15 cm.

Solución:

(*a*) Para que el flujo sea laminar, el máximo número de Reynolds es 2000. De la Tabla 2 del Apéndice, la viscosidad cinemática a 15° C es $4{,}42 \times 10^{-6}$ m²/seg.

$$2000 = R_E = V_C d/\nu = V_C(0{,}15)/(4{,}42 \times 10^{-6}) \qquad V_C = 0{,}059 \text{ m/seg}$$

(*b*) De la Tabla 2, $\nu = 1{,}13 \times 10^{-6}$ m²/seg, para el agua a 15° C.

$$2000 = V_C(0{,}15)/(1{,}13 \times 10^{-6}) \qquad V_C = 0{,}015 \text{ m/seg}$$

2. Determinar el tipo de flujo que tiene lugar en una tubería de 30 cm cuando (*a*) fluye agua a 15° C a una velocidad de 1,00 m/seg y (*b*) fluye un fuel-oil pesado a 15° C y a la misma velocidad.

Solución:

(*a*) $R_E = Vd/\nu = 1{,}00(0{,}3)/(1{,}13 \times 10^{-6}) = 265.000 > 2000$. El flujo es turbulento.

(*b*) De la Tabla 2 del Apéndice, $\nu = 2{,}06 \times 10^{-4}$ m²/seg.
$R_E = Vd/\nu = 1{,}00(0{,}3)/(2{,}06 \times 10^{-4}) = 1450 < 2000$. El flujo es laminar.

3. Para un flujo en régimen laminar, ¿qué diámetro de tubería será necesario para transportar 350 l/min de un fuel-oil medio a 4,5° C? ($\nu = 7{,}00 \times 10^{-6}$ m²/seg).

Solución:

$Q = 0{,}350/60 = 5{,}83 \times 10^{-3}$ m³/seg. $V = Q/A = 4Q/\pi d^2 = 23{,}33 \times 10^{-3}/\pi d^2$ m/seg.

$R_E = \dfrac{Vd}{\nu}$, $2000 = \dfrac{23{,}33 \times 10^{-3}}{\pi d^2}\left(\dfrac{d}{7{,}00 \times 10^{-6}}\right)$, $d = 0{,}530$ m. Se utilizará la tubería normalizada de diámetro inmediato superior.

4. Determinar la distribución de las tensiones cortantes a lo largo de una sección recta de una tubería circular, horizontal y el flujo en régimen permanente.

Solución:

(*a*) Para el cuerpo libre de la Fig. 7-1(*a*), como el flujo es permanente, cada una de las partículas se mueve hacia la derecha sin aceleración. Por tanto, la suma de todas las fuerzas en la dirección x debe ser nula.

$$p_1(\pi r^2) - p_2(\pi r^2) - \tau(2\pi r L) = 0 \qquad \text{o} \qquad \tau = \frac{(p_1 - p_2)r}{2L} \qquad (A)$$

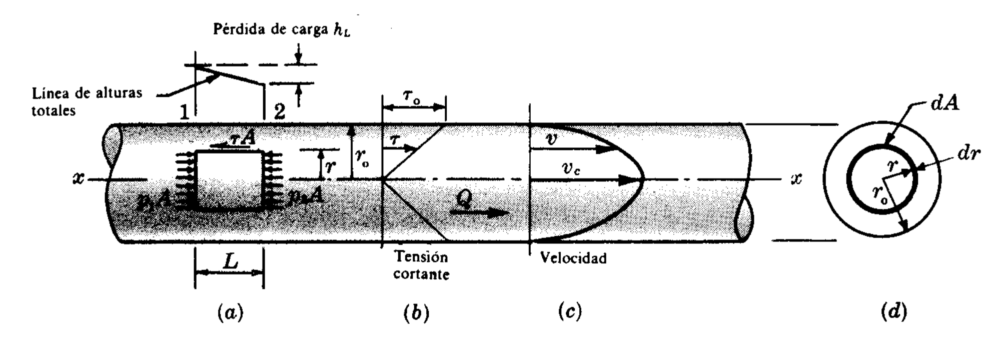


Fig. 7-1

Cuando $r = 0$, la tensión cortante τ se anula; cuando $r = r_0$, la tensión sobre la pared coincide con el máximo de la tensión. La variación es lineal, tal como se ha representado en la Fig. 7-1(*b*). La ecuación (*A*) es válida tanto para flujo laminar como turbulento ya que en la deducción de la misma no se ha impuesto limitación alguna respecto al tipo de flujo.

Como $(p_1 - p_2)/w$ representa la caída de la línea de alturas totales, o pérdida de carga h_L, multiplicando la ecuación (*A*) por w/w, se obtiene

$$\tau = \frac{wr}{2L}\left(\frac{p_1 - p_2}{w}\right) \qquad \text{o} \qquad \tau = \frac{wh_L}{2L}r \qquad (B)$$

5. Desarrollar una expresión que dé la tensión cortante en la pared de una tubería.

Solución:

Del Problema 4, $h_L = \dfrac{2\tau_o L}{wr_o} = \dfrac{4\tau_o L}{wd}$. La fórmula de Darcy-Weisbach es $h_L = f\dfrac{L}{d}\dfrac{V^2}{2g}$.

Igualando estas expresiones, $\dfrac{4\tau_o L}{wd} = f\dfrac{L}{d}\dfrac{V^2}{2g}$ y $\tau_o = f\dfrac{w}{g}\dfrac{V^2}{8} = f\rho V^2/8$ en kg/m^2.

6. Para un flujo laminar y permanente (*a*) ¿cuál es la relación entre la velocidad en un punto de la sección recta y la velocidad en el eje de la tubería? y (*b*) ¿cuál es la ecuación de la distribución de las velocidades?

Solución:

(*a*) En el caso de flujo laminar la tensión cortante (véase Cap. 1) es $\tau = -\mu(dv/dr)$. Igualando éste con el valor dado para τ por la ecuación (*A*) del Problema 4, se obtiene

$$-\mu\frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2)r}{2L}$$

Como $(p_1 - p_2)/L$ no es función de r,

$$-\int_{v_c}^{v} dv = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L}\int_0^r r\,dr \qquad \text{y} \qquad -(v - v_c) = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu L}$$

o

$$v = v_c - \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu L} \qquad (A)$$

Pero la pérdida de carga en L m de tubería es $h_L = (p_1 - p_2)/w$; por tanto,

$$v = v_c - \frac{wh_L r^2}{4\mu L} \qquad (B) \text{ y } (6)$$

(*b*) Como la velocidad en el contorno es cero, cuando $r = r_0$, $v = 0$ en (*A*), y se tiene

$$v_c = \frac{(p_1 - p_2)r_o^2}{4\mu L} \qquad \text{(en el eje)} \qquad (C)$$

Por tanto, en general,

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L}(r_o^2 - r^2) \qquad (D)$$

7. Desarrollar una expresión para la pérdida de carga en una tubería para el caso de flujo lamina permanente y fluido incompresible. Referirse a la Fig. 7-1(d) del Problema 4.

Solución:

$$V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{\int v\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^{r_o} v(2\pi r\,dr)}{\pi r_o^2} = \frac{2\pi(p_1 - p_2)}{\pi r_o^2(4\mu L)} \int_0^{r_o} (r_o^2 - r^2)r\,dr$$

de la cual

$$V_{av} = \frac{(p_1 - p_2)r_o^2}{8\mu L} \qquad (A)$$

Por tanto, para un flujo laminar la velocidad media es la mitad de la velocidad máxima v_c, dada por la ecua ción (C) del Problema 6. Volviendo a ordenar (A), se obtiene

$$\frac{p_1 - p_2}{w} = \text{pérdida de carga} = \frac{8\mu L V_{av}}{w r_o^2} = \frac{32\mu L V_{av}}{w d^2} \qquad (B)$$

Estas expresiones son aplicables al caso de *flujo laminar de cualquier fluido y para todas las tuberías y conducto*

Como ya se estableció al principio de este capítulo, la expresión de la pérdida de carga para flujo laminar e la forma de Darcy es

$$\text{pérdida de carga} = \frac{64}{R_E}\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g}$$

8. Determinar (a) la tensión cortante en la pared de una tubería de 30 cm de diámetro si el líquido qu fluye es agua y la pérdida de carga medida en 100 m de tubería es de 5,0 m, (b) la tensión cor tante a 5 cm del eje de la tubería, (c) la velocidad de corte, (d) la velocidad media para un valor d f igual a 0,050, (e) la relación v/v_*.

Solución:

(a) Utilizando la ecuación (B) del Problema 4, para $r = r_o$, la tensión cortante en la pared será

$$\tau_o = wh_L r_o/2L = 1000(5)(0{,}15)/200 = 3{,}75 \text{ kg/m}^2 = 3{,}75 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^2$$

(b) Como τ varía linealmente desde el eje a la pared, $\tau = \frac{5}{15}(3{,}75 \times 10^{-4}) = 1{,}25 \times 10^{-4}$ kg/cm².

(c) Por la ecuación (5), $v_* = \sqrt{\tau_o/\rho} = \sqrt{3{,}75/102} = 0{,}191$ m/seg.

(d) Mediante $h_L = f\dfrac{L}{d}\dfrac{V^2}{2g}$, se tiene $5 = 0{,}050\dfrac{100}{0{,}30}\dfrac{V^2}{2g}$, de donde $V = 2{,}93$ m/seg.

De otra forma: De la ecuación (3), $\tau_o = f\rho V^2/8$, $3{,}75 = 0{,}050(102)V^2/8$, de donde $V = 2{,}93$ m/seg.

(e) De $\tau_o = \mu(v/y)$ y $\nu = \mu/\rho$ se obtiene $\tau_o = \rho\nu(v/y)$ o $\tau_o/\rho = \nu(v/y)$.

Como $\tau_o/\rho = v_*^2$, se tiene $v_*^2 = \nu(v/y)$, $v/v_*^2 = y/\nu$ y $v/v_* = v_* y/\nu$.

9. Si en el problema precedente el agua circula a través de un conducto rectangular de 90 cm por 120 cn de la misma longitud y con la misma pérdida de carga, ¿cuál es la tensión cortante entre el agua la pared del conducto?

Solución:

En el caso de conductos no circulares se utiliza como dimensión lineal conveniente el radio hidráulico. Par una tubería circular,

$$\text{Radio hidráulico } R = \frac{\text{área de la sección recta}}{\text{perímetro mojado}} = \frac{\pi d^2/4}{\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{r_o}{2}$$

Sustituyendo $r = 2R$ en la ecuación (B) del Problema 4,

$$\tau = \frac{wh_L}{L}R = \frac{1000(5)}{100}\cdot\frac{(0{,}9 \times 1{,}2)}{2(0{,}9 + 1{,}2)} = 12{,}85 \text{ kg/m}^2 = 1{,}285 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^2$$

10. Un aceite lubricante medio, de densidad relativa 0,860, es bombeado a través de una tubería horizontal de 5,0 cm de diámetro y 300 m de longitud. El caudal bombeado es de 1,20 l/seg. Si la caída de presión es de 2,10 kg/cm², ¿cuál es la viscosidad absoluta del aceite?

Solución:

Suponiendo el flujo laminar y utilizando la expresión (*B*) del Problema 7, se obtiene

$$(p_1 - p_2) = \frac{32\mu L V_{av}}{d^2}, \quad \text{donde} \quad V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{1{,}2 \times 10^{-3}}{\frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2} = 0{,}61 \text{ m/seg}$$

Por tanto, $2{,}1 \times 10^4 = 32\mu(300)(0{,}61)/(0{,}05)^2$ y $\mu = 0{,}00896$ kg seg/m²

Para comprobar la hipótesis hecha al principio de flujo laminar es necesario calcular el valor del número de Reynolds para las condiciones en que se desarrolla el flujo. Así

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{Vdw}{\mu g} = \frac{0{,}61 \times 0{,}05 \times 0{,}860 \times 1000}{0{,}00896 \times 9{,}8} = 300$$

Como el número de Reynolds es menor de 2000, el flujo es laminar y el valor hallado de μ es correcto.

11. Un caudal de 44 l/seg de un aceite de viscosidad absoluta 0,0103 kg seg/m² y densidad relativa 0,850 está circulando por una tubería de 30 cm de diámetro y 3000 m de longitud. ¿Cuál es la pérdida de carga en la tubería?

Solución:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{44 \times 10^{-3}}{\frac{1}{4}\pi(0{,}3)^2} = 0{,}62 \text{ m/seg y } R_E = \frac{Vdw}{\mu g} = \frac{0{,}62 \times 0{,}3 \times 0{,}850 \times 1000}{0{,}0103 \times 9{,}8} = 1565,$$ lo que significa que el flujo es laminar. De aquí

$$f = \frac{64}{R_E} = 0{,}0409 \quad \text{y} \quad \text{pérdida de carga} = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = 0{,}0409 \times \frac{3000}{0{,}3} \times \frac{(0{,}62)^2}{2g} = 8{,}02 \text{ m}$$

12. Del punto *A* al *B* está fluyendo un fuel-oil pesado a través de una tubería de acero horizontal de 900 m de longitud y 15 cm de diámetro. La presión en *A* es de 11,0 kg/cm² y en *B* de 0,35 kg/cm². La viscosidad cinemática es $4{,}13 \times 10^{-4}$ m²/seg y la densidad relativa 0,918. ¿Cuál es el caudal en l/seg?

Solución:

La ecuación de Bernoulli entre *A* y *B*, plano de referencia el horizontal que pasa por *A*, es

$$\left(\frac{11{,}0 \times 10^4}{0{,}918 \times 1000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0\right) - f\frac{900}{0{,}15}\frac{V_{15}^2}{2g} = \left(\frac{0{,}35 \times 10^4}{0{,}918 \times 1000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0\right)$$

o bien $$116 = f(6000)(V_{15}^2/2g)$$

Tanto *V* como *f* son incógnitas que dependen una de otra. Si el flujo es laminar, por la ecuación (*B*) del Problema 7,

$$V_{av} = \frac{(p_1 - p_2)d^2}{32\mu L} = \frac{(11{,}0 - 0{,}35)(10^4) \times (0{,}15)^2}{32(4{,}13 \times 10^{-4} \times 0{,}918 \times 1000/9{,}8)(900)} = 2{,}16 \text{ m/seg}$$

y $R_E = 2{,}16(0{,}15)/(4{,}13 \times 10^{-4}) = 785$, por lo que el flujo es laminar. Por tanto, $Q = A_{15}V_{15} = \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 2{,}16 = 3{,}8 \times 10^{-2}$ m³/seg = 38 l/seg.

Si el flujo hubiera sido turbulento no podría aplicarse la ecuación (*B*) del Problema 7. En el Problema 15 se utilizará otro método. Todavía más, si entre los puntos *A* y *B* existiera una diferencia de cota topográfica o elevación habría que sustituir el término $(p_1 - p_2)$ de la ecuación (*B*) por la caída en la línea de alturas piezométricas, medida en kg/m².

13. ¿Qué diámetro de tubería será necesario utilizar para transportar 22,0 l/seg de un fuel-oil pesado a 15° C si la pérdida de carga de que se dispone en 1000 m de longitud de tubería horizontal es de 22,0 m?

Solución:

Para el fuel-oil, $\nu = 2{,}05 \times 10^{-4}$ m²/seg y la densidad relativa = 0,912. Como el valor de la viscosidad cinemática es muy elevado, se supondrá que el flujo es laminar. Entonces,

$$\text{Pérdida de carga} = \frac{V_{av} \times 32\mu L}{wd^2} \quad \text{y} \quad V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{22 \times 10^{-3}}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{0{,}028}{d^2}$$

Sustituyendo, $22{,}0 = \frac{(0{,}028/d^2)(32)(2{,}05 \times 10^{-4} \times 0{,}912 \times 1000/9{,}8)(1000)}{(0{,}912 \times 1000)d^2}$, $d = 0{,}17$ m.

Se comprueba ahora la hipótesis de flujo laminar utilizando $d = 0{,}17$ m.

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(0{,}028/d^2)d}{\nu} = \frac{0{,}028}{0{,}17 \times 2{,}05 \times 10^{-4}} = 804, \text{ luego el flujo es laminar.}$$

Se utilizará tubería normalizada de 8 pulgadas o de 20 cm.

14. Determinar la pérdida de carga en un tramo de tubería nueva de fundición sin recubrimientc de 30 cm de diámetro interior y 1000 m de longitud, cuando (*a*) fluye agua a 15° C y a una velc cidad de 1,50 m/seg, y (*b*) cuando circula un fuel-oil medio a 15° C y a la misma velocidad.

Solución:

(*a*) Para utilizar el Diagrama A-1 es necesario conocer la rugosidad relativa y calcular el valor del número d Reynolds. A partir de la tabla dada en el Diagrama A-1 se ve que los valores de las rugosidades, para tu berías de fundición sin recubrimiento, van de 0,012 cm a 0,060 cm. Para un diámetro interior de 30 cm tomando como valor del diseño $\epsilon = 0{,}024$ cm, la rugosidad relativa será $\epsilon/d = 0{,}024/30 = 0{,}0008$.

Tomando el valor de la viscosidad cinemática de la Tabla 2 del Apéndice,

$$R_E = Vd/\nu = 1{,}50(0{,}3)/(1{,}13 \times 10^{-6}) = 3{,}98 \times 10^5 \quad \text{(flujo turbulento)}$$

En el Diagrama A-1, para $\epsilon/d = 0{,}0008$ y $R_E = 3{,}98 \times 10^5$, $f = 0.0194$ y

$$\text{Pérdida de carga} = 0{,}0194(1000/0{,}3)(2{,}25/2g) = 7{,}40 \text{ m}$$

O, mediante la Tabla 3 del Apéndice (aplicable al agua solamente), $f = 0{,}0200$ y

$$\text{Pérdida de carga} = f(L/d)(V^2/2g) = 0{,}0200(1000/0{,}3)(2{,}25/2g) = 7{,}65 \text{ m}$$

(*b*) Para el fuel-oil, mediante la Tabla 2, $R_E = 1{,}5(0{,}3)/(4{,}42 \times 10^{-6}) = 1{,}02 \times 10^5$. Para flujo turbulentc del Diagrama A-1, $f = 0{,}0215$ y pérdida de carga $= 0{,}0215(1000/0{,}3)(2{,}25/2g) = 8{,}20$ m.

En general, el valor de la rugosidad de las tuberías *en servicio* no puede estimarse con gran precisiói y, por tanto, en estos casos no es necesario un valor de f muy preciso. Por las razones dichas, cuando s utilicen los Diagramas A-1 y A-2 y la Tabla 3 para superficies que no sean nuevas, se sugiere que la tercer cifra significativa del valor de f se lea o interpole solo tomando los valores *cero o cinco*, ya que no pued garantizarse una precisión mayor en la mayoría de los casos prácticos.

Para flujo laminar, y cualquier tubería o fluido, debe utilizarse $f = 64/R_E$.

15. Los puntos A y B están unidos por una tubería nueva de acero de 15 cm de diámetro interior y 1200 m de longitud. El punto B está situado 15,0 m por encima del A y las presiones en A y B son respectivamente, 8,60 kg/cm² y 3,40 kg/cm². ¿Qué caudal de un fuel-oil medio a 21° C circular entre A y B? (Del Diagrama A-1, $\epsilon = 0{,}006$ cm.)

Solución:

El valor del número de Reynolds no puede calcularse directamente. Al establecer la ecuación de Bernoull entre A y B, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por A,

$$\left(\frac{8{,}6 \times 10^4}{0{,}854 \times 1000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0\right) - f\left(\frac{1200}{0{,}15}\right)\frac{V_{15}^2}{2g} = \left(\frac{3{,}4 \times 10^4}{0{,}854 \times 1000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 15{,}0\right) \quad \text{y} \quad \frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{45{,}8}{8000f}$$

Además, $R_E = Vd/\nu$. Sustituyendo V por el valor anterior,

$$R_E = \frac{d}{\nu}\sqrt{\frac{2g(45{,}8)}{8000f}} \quad \text{o} \quad R_E\sqrt{f} = \frac{d}{\nu}\sqrt{\frac{2g(45{,}8)}{8000}} \qquad (A$$

Como el término 45,8 es h_L o descenso de la línea de alturas piezométricas, y 8000 representa L/d, la expre sión general que ha de utilizarse *cuando se quiere determinar* Q es

$$R_E\sqrt{f} = \frac{d}{\nu}\sqrt{\frac{2g(d)(h_L)}{L}} \quad \text{(véase también Diagrama A-2)} \qquad (B$$

Por tanto, $$R_E\sqrt{f} = \frac{0{,}15}{3{,}83 \times 10^{-6}}\sqrt{\frac{19{,}6 \times 45{,}8}{8000}} = 1{,}314 \times 10^4$$

La observación del Diagrama A-2 indica que el flujo es turbulento. Entonces, del Diagrama A-2, $f = 0{,}020$ para $\epsilon/d = 0{,}006/15 = 0{,}0004$. Se completa la solución mediante la ecuación de Bernoulli anterior

$$\frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{45{,}8}{8000(0{,}020)} = 0{,}286, \quad V_{15} = 2{,}37 \text{ m/seg} \quad \text{y}$$
$$Q = A_{15}V_{15} = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 2{,}37 = 0{,}042 \text{ m}^3\text{/seg de fuel-oil}$$

El lector puede comprobar el resultado calculando el valor del número de Reynolds y determinando el valor de f a partir del Diagrama A-1.

Cuando el flujo es laminar, se seguirá el método desarrollado en el Problema 12.

16. ¿Qué caudal de agua (a 15° C) circularía en las condiciones del Problema 15? Utilizar la Tabla 3.

Solución:

La ecuación de Bernoulli conduce a $(86 - 49) = 8000f\dfrac{V_{15}^2}{2g}, \quad \dfrac{V_{15}^2}{2g} = \dfrac{37}{8000f}.$

La solución más directa es suponer, en este caso, un valor de f. De la Tabla 3, para tubería nueva de 15 cm, f varía entre 0,0275 y 0,0175. Se ensaya el valor $f = 0{,}0225$. Entonces,

$$V_{15}^2/2g = 37/(8000 \times 0{,}0225) = 0{,}206 \text{ m} \quad \text{y} \quad V_{15} = 2{,}01 \text{ m/seg}$$

Se comprueba ahora tanto el tipo de flujo como el valor de f en la Tabla 3:

$$R_E = 2{,}01(0{,}15)/(1{,}13 \times 10^{-6}) = 266.000, \quad \text{luego el flujo es turbulento}$$

Ahora, por interpolación en la Tabla 3, $f = 0{,}0210$. Al repetir los cálculos

$$V_{15}^2/2g = 37/(8000 \times 0{,}0210) = 0{,}221 \text{ m} \quad \text{y} \quad V_{15} = 2{,}08 \text{ m/seg}$$

De la Tabla 3, y con una precisión razonable, $f = 0{,}0210$ (comprobación). De aquí

$$Q = A_{15}V_{15} = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 2{,}08 = 37 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{/seg de agua}$$

Este procedimiento puede utilizarse también con el Diagrama A-1, pero se prefiere el método utilizado en el Problema 15.

17. ¿Qué caudal de aire a 20° C puede transportarse mediante una tubería de acero nueva y horizontal de 5 cm de diámetro interior a una presión absoluta de 3 atmósferas y con una pérdida de presión de $3{,}50 \times 10^{-2}$ kg/cm² en 100 m de tubería? Utilizar $\epsilon = 0{,}0075$ cm.

Solución:

Del Apéndice, para una temperatura de 20° C, $w = 1{,}20$ kg/m³ y $\nu = 1{,}49 \times 10^{-5}$ m²/seg a la presión atmosférica normal. A 3 atmósferas, $w = 3 \times 1{,}20 = 3{,}60$ kg/m³ y $\nu = \frac{1}{3} \times 1{,}49 \times 10^{-5} = 4{,}97 \times 10^{-6}$ m²/seg. Esta viscosidad cinemática podría haberse obtenido también de la siguiente forma

$$\mu = \frac{w}{g}\nu = \frac{1{,}20 \times 1{,}49 \times 10^{-5}}{9{,}8} = 1{,}82 \times 10^{-6} \frac{\text{kg seg}}{\text{m}^2} \text{ a } 20^\circ \text{ C y } 1{,}033 \text{ kg/cm}^2 \text{ de presión absoluta}$$

Además, a $3 \times 1{,}033$ kg/cm² de presión absoluta, $w_{\text{aire}} = 3{,}60$ kg/m³ y

$$\nu \text{ a 3 at} = \mu\frac{g}{w} = 1{,}82 \times 10^{-6} \times \frac{9{,}8}{3{,}6} = 4{,}97 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{/seg}$$

Para determinar el caudal puede considerarse el aire como incompresible. Por tanto,

$$\frac{p_1 - p_2}{w} = \text{pérdida de carga} = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g}, \quad \frac{0{,}035 \times 10^4}{3{,}60} = 97{,}3 = f\frac{100}{0{,}05}\frac{V^2}{2g} \quad \text{y} \quad \frac{V^2}{2g} = \frac{0{,}0487}{f}$$

También, del Problema 15, $R_E\sqrt{f} = \dfrac{d}{\nu}\sqrt{\dfrac{2g(d)(h_L)}{L}} = \dfrac{0{,}05}{4{,}97 \times 10^{-6}}\sqrt{\dfrac{19{,}6(0{,}05)(97{,}3)}{100}} = 10.400$ (turbulento).

Del Diagrama A-2, $f = 0{,}025$ para $\epsilon/d = 0{,}0075/5 = 0{,}0015$. De aquí,

$V^2/2g = 0{,}0487/f = 1{,}948$ m, $V_5 = 6{,}18$ m/seg, y $Q = A_5V_5 = \frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2 \times 6{,}18 = 12{,}15 \times 10^{-3}$ m³/seg

18. ¿Qué diámetro debe de tener una tubería nueva de fundición de 2400 m de longitud para transportar 1,0 m³/seg de agua con una caída en la línea de alturas piezométricas de 64 m? Utilizar en los cálculos la Tabla 3.

Solución: El teorema de Bernoulli da $\left(\dfrac{p_A}{w} + \dfrac{V_A^2}{2g} + z_A\right) - f\dfrac{2400}{d}\dfrac{V^2}{2g} = \left(\dfrac{p_B}{w} + \dfrac{V_B^2}{2g} + z_B\right)$

o
$$\left[\left(\frac{p_A}{w} + z_A\right) - \left(\frac{p_B}{w} + z_B\right)\right] = f\frac{2400}{d}\frac{V^2}{2g}$$

El miembro de la izquierda, entre corchetes, representa la caída de la línea de alturas piezométricas. Sustituyendo $V = Q/A$ y suponiendo el flujo turbulento

$$64 = f\frac{2400}{d}\frac{(1{,}0/\frac{1}{4}\pi d^2)^2}{2g}, \quad \text{que simplificada da} \quad d^5 = 3{,}10f$$

Suponiendo $f = 0{,}020$ (como tanto d como V son desconocidos, es necesaria una hipótesis). De aquí,

$$d^5 = f(3{,}10) = 0{,}020(3{,}10) = 0{,}062, \quad d = 0{,}573 \text{ m}$$

De la Tabla 3, para $V = \dfrac{1{,}0}{\pi(0{,}573)^2/4} = 3{,}87$ m/seg, $f = 0{,}0165$.

Para este valor de la velocidad del agua el flujo es turbulento en la mayoría de las tuberías. Repitiendo los cálculos,

$$d^5 = 0{,}0165(3{,}10) = 0{,}0511, \quad d = 0{,}552 \text{ m}$$

Se comprueba el valor de f, $V = 4{,}17$ m/seg y la Tabla 3 da $f = 0{,}0165$ (correcto).

Se seleccionará el diámetro normal inmediato superior: 60 cm o 24 pulgadas, para la tubería. (Es necesario comprobar el valor de R_E, utilizando el valor de ν para el agua a 21° C.)

19. Los puntos C y D, con la misma elevación, están unidos por una tubería de 150 m de longitud y 20 cm de diámetro y conectados a un manómetro diferencial mediante dos tubos de pequeño diámetro. Cuando el caudal de agua que circula es de 178 l/seg, la lectura en el manómetro de mercurio es de 193 cm. Determinar el factor o coeficiente de fricción f.

Solución:

$$\left(\frac{p_C}{w} + \frac{V_{20}^2}{2g} + 0\right) - f\frac{150}{0{,}20}\frac{V_{20}^2}{2g} = \left(\frac{p_D}{w} + \frac{V_{20}^2}{2g} + 0\right) \quad \text{o} \quad \left(\frac{p_C}{w} - \frac{p_D}{w}\right) = f(750)\frac{V_{20}^2}{2g} \qquad (1)$$

Del manómetro diferencial (véase Capítulo 1), $p_L = p_R$ o

$$p_C/w + 1{,}93 = p_D/w + 13{,}57(1{,}93), \quad \text{y} \quad (p_C/w - p_D/w) = 24{,}3 \text{ m} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), $24{,}3 = f(750)(5{,}66)^2/2g$ de la cual $f = 0{,}0198$.

20. Un fuel-oil medio a 15° C se bombea al depósito C (véase Fig. 7-2) a través de 1800 m de una tubería nueva de acero roblonado de 40 cm de diámetro interior. La presión en A es de 0,14 kg/cm², cuando el caudal es de 197 l/seg. (a) ¿Qué potencia debe suministrar la bomba a la corriente de fuel-oil? y (b) ¿qué presión debe mantenerse en B? Dibujar la línea de alturas piezométricas.

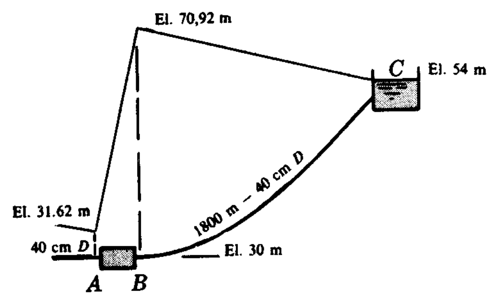


Fig. 7-2

Solución:

$$V_{40} = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}197}{\pi(0{,}4)^2/4} = 1{,}565 \text{ m/seg} \quad \text{y} \quad R_E = \frac{1{,}565 \times 0{,}4}{5{,}16} \times 10^6 = 121.000$$

Del Diagrama A-1, para $\epsilon/d = 0{,}18/40 = 0{,}0045$, $f = 0{,}030$.

(*a*) La ecuación de Bernoulli entre *A* y *C*, con plano de referencia el horizontal que pasa por *A*, da

$$\left(\frac{0{,}14 \times 10^4}{0{,}861 \times 1000} + \frac{(1{,}565)^2}{2g} + 0\right) + H_p - 0{,}03\left(\frac{1800}{0{,}40}\right)\frac{(1{,}565)^2}{2g} - \frac{(1{,}565)^2}{2g} = (0 + 0 + 24)$$

De donde, $H_p = 39{,}3$ m y potencia (CV) $= \dfrac{wQH_p}{75} = \dfrac{0{,}861 \times 1000 \times 0{,}197 \times 39{,}3}{75} = 88$ CV.

El último término del primer miembro de la ecuación de la energía representa la pérdida de carga en la sección de desagüe de la tubería en el depósito (véase Tabla 4 del Apéndice). En la práctica, cuando la relación de longitud a diámetro (L/d) es superior a 2000 se desprecian las alturas de velocidad y las pérdidas menores en la ecuación de la energía (en el caso presente se eliminan entre sí). La precisión de los resultados obtenidos al tener en cuenta las pérdidas menores es ficticia ya que f no se conoce con ese grado de precisión.

(*b*) La altura de presión en *B* puede determinarse estableciendo la ecuación de la energía entre *A* y *B* o entre *B* y *C*. En el primer caso los cálculos son más reducidos; así

$$\left(1{,}62 + \frac{V_{40}^2}{2g} + 0\right) + 39{,}3 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_{40}^2}{2g} + 0\right)$$

Por tanto, $p_B/w = 40{,}92$ m y $p'_B = wh/10^4 = (0{,}861 \times 1000)(40{,}92)/10^4 = 3{,}52$ kg/cm^2.

La línea de alturas piezométricas aparece dibujada en la Figura 7-2.

En *A*, $(30{,}0 + 1{,}62)$ m $= 31{,}62$ m
En *B*, $(30{,}0 + 40{,}92)$ m $= 70{,}92$ m (o $31{,}62 + 39{,}3$)
En *C*, elevación $= 54$ m

21. En el punto *A* de una tubería horizontal de 30 cm ($f = 0{,}020$) la altura de presión es de 60 m. A una distancia de 60 m de *A*, la tubería de 30 cm sufre una contracción brusca hasta un diámetro de 15 cm de la nueva tubería. A una distancia de esta contracción brusca de 30 m la tubería de 15 cm ($f = 0{,}015$) sufre un ensanchamiento brusco, conectándose con una tubería de 30 cm. El punto *F* está 30 m aguas abajo de este cambio de sección. Para una velocidad de 2,41 m/seg en las tuberías de 30 cm, dibujar la línea de alturas piezométricas. Referirse a la Figura 7-3.

Solución:

Las alturas de velocidad son $V_{30}^2/2g = (2{,}41)^2/2g = 0{,}30$ m y $V_{15}^2/2g = 4{,}80$ m.

La línea de alturas totales cae en la dirección del flujo en cantidades iguales a las pérdidas de carga. La línea de alturas piezométricas está por debajo de la de alturas totales en una cantidad igual a la altura de velocidad correspondiente a cada sección. Obsérvese en la Fig. 7-3 que la *línea de alturas piezométricas* puede elevarse cuando tiene lugar un ensanchamiento brusco.

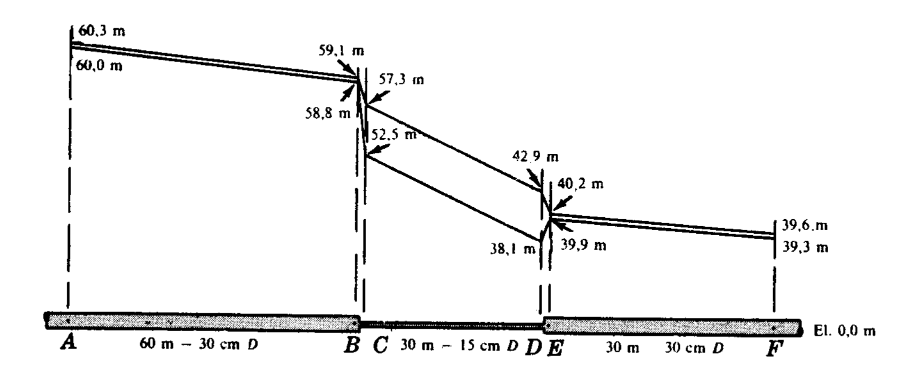


Fig. 7-3

Tabulando los resultados con una aproximación de 0,1 m,

Pérdidas de carga en m			Alturas totales, m	$\frac{V^2}{2g}$ m	Alturas piezométricas, m
En	Desde	Cálculos			
A	(Elev. 0,0)		60,3	0,3	60,0
B	A a B	$0{,}020 \times 60/0{,}3 \times 0{,}3 = 1{,}2$	59,1	0,3	58,8
C	B a C	$K_C{}^* \times 4{,}8 = 0{,}37 \times 4{,}8 = 1{,}8$	57,3	4,8	52,5
D	C a D	$0{,}015 \times 30/0{,}15 \times 4{,}8 = 14{,}4$	42,9	4,8	38,1
E	D a E	$\frac{(V_{15} - V_{30})^2}{2g} = \frac{(9{,}6 - 2{,}4)^2}{19{,}6} = 2{,}7$	40,2	0,3	39,9
F	E a F	$0{,}020 \times 30/0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}6$	39,6	0,3	39,3

* [K_C se ha obtenido de la Tabla 5; el término correspondiente al ensanchamiento brusco (de D a E) se ha tomado de la Tabla 4.]

22. Está fluyendo un aceite desde el depósito A a través de una tubería nueva de fundición asfaltada de 15 cm y 150 m de longitud hasta el punto B, a una elevación de 30,0 m, como se muestra en la Fig. 7-4. ¿Qué presión, en kg/cm², tendrá que actuar sobre A para que circulen 13,0 l/seg de aceite? (Dr = 0,840 y $\nu = 2{,}10 \times 10^{-6}$ m²/seg.) Utilizar $\epsilon = 0{,}012$ cm.

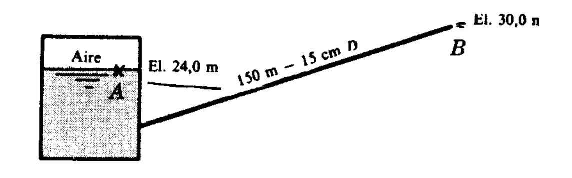


Fig. 7-4

Solución:

$$V_{15} = \frac{Q}{A} = \frac{13{,}0 \times 10^{-3}}{1{,}77 \times 10^{-2}} = 0{,}735 \text{ m/seg} \quad \text{y} \quad R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}735 \times 0{,}15}{2{,}10} \times 10^6 = 52.500.$$

Del Diagrama A-1, $f = 0{,}0235$ y aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y B, con plano de referencia el horizontal que pasa por A, se obtiene

$$\left(\frac{p_A}{w} + 0 + 0\right) - 0{,}50\,\frac{(0{,}735)^2}{2g} - 0{,}0235\,\frac{150}{0{,}15}\,\frac{(0{,}735)^2}{2g} = \left(0 + \frac{(0{,}735)^2}{2g} + 6\right)$$

Despejando, $p_A/w = 6{,}7$ m de aceite y $p'_A = wh/10^4 = (0{,}840 \times 1000)(6{,}7)/10^4 = 0{,}56$ kg/cm².

23. La presión en el punto A de una tubería nueva horizontal de fundición, de 10 cm de diámetro interior, es de 3,50 kg/cm² (ab), cuando el caudal que circula es de 0,34 kg/seg de aire en condiciones isotérmicas. Calcular la presión que reina en el interior de la tubería en la sección B, situada 540 m aguas abajo de la sección A. (Viscosidad absoluta = $1{,}90 \times 10^{-6}$ kg seg/m² y $t = 32°$ C.) Utilizar $\epsilon = 0{,}009$ cm.

Solución:

La densidad del aire varía a lo largo del flujo al ir variando la presión.

En el Capítulo 6 se aplicó el teorema de Bernoulli a fluidos compresibles cuando las condiciones no implicaban pérdidas de carga (flujo ideal). La ecuación de la energía, teniendo en cuenta la pérdida de carga, para una longitud de tubería dL y cuando $z_1 = z_2$ será

$$\frac{dp}{w} + \frac{V\,dV}{g} + f\,\frac{dL}{d}\,\frac{V^2}{2g} = 0$$

Dividiendo por $\frac{V^2}{2g}$

$$\frac{2g}{V^2}\,\frac{dp}{w} + \frac{2\,dV}{V} + \frac{f}{d}\,dL = 0$$

Para un flujo permanente, el número de kg/seg que están fluyendo es constante; por tanto, $W = wQ = wAV$ y puede sustituirse V por W/wA en el término que da la altura de presión, obteniéndose

$$\frac{2gw^2A^2}{W^2w}\,dp + \frac{2\,dV}{V} + \frac{f}{d}\,dL = 0$$

Como las condiciones son isotérmicas, $p_1/w_1 = p_2/w_2 = RT$ o bien $w = p/RT$. Sustituyendo el valor de w,

$$\frac{2gA^2}{W^2RT}\int_{p_1}^{p_2} p\,dp \;+\; 2\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} \;+\; \frac{f}{d}\int_0^L dL \;=\; 0$$

en la que f puede considerarse constante, como se verá más abajo. Integrando y sustituyendo límites,

$$\frac{gA^2}{W^2RT}(p_2^2 - p_1^2) + 2(\ln V_2 - \ln V_1) + f(L/d) = 0 \qquad (A)$$

Para compararla con la forma más común (con $z_1 = z_2$) se pone en la forma

$$(Kp_1^2 + 2 \ln V_1) - f(L/d) = (Kp_2^2 + 2 \ln V_2) \qquad (B)$$

donde $K = \dfrac{gA^2}{W^2RT}$. Ordenando términos,

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{W^2RT}{gA^2}\left[2 \ln \frac{V_2}{V_1} + f\frac{L}{d}\right] \qquad (C)$$

Ahora bien, $W^2/A^2 = w_1^2A_1^2V_1^2/A_1^2 = w_1^2V_1^2$ y $RT = p_1/w_1$; de aquí

$$\frac{W^2RT}{gA^2} = \frac{w_1V_1^2p_1}{g} \qquad (D)$$

Entonces (C) se puede poner $\quad (p_1 - p_2)(p_1 + p_2) = \dfrac{w_1p_1V_1^2}{g}\left[2 \ln \dfrac{V_2}{V_1} + f\dfrac{L}{d}\right]$

$$\frac{(p_1 - p_2)}{w_1} = \frac{2\left[2 \ln \dfrac{V_2}{V_1} + f\dfrac{L}{d}\right]\dfrac{V_1^2}{2g}}{(1 + p_2/p_1)} = \text{Pérdida de carga} \qquad (E)$$

Los límites de las presiones y las velocidades se estudiarán en el Capítulo 11.

Antes de sustituir valores en esta expresión es importante estudiar la posible variación de f ya que la velocidad V no se mantiene constante en los gases cuando su densidad varía.

$$R_E = \frac{Vd}{\mu/\rho} = \frac{Vd\rho}{\mu} = \frac{Wd\rho}{wA\mu}. \qquad \text{Como } g = \frac{w}{\rho}, \text{ luego } R_E = \frac{Wd}{Ag\mu} \qquad (F)$$

Se observará que el número de Reynolds es constante para el flujo permanente ya que μ solo varía cuando lo hace la temperatura. De aquí, el coeficiente de rozamiento f es constante en este problema a pesar de que la velocidad aumentará al disminuir la presión. Sustituyendo valores en (F), utilizando la viscosidad absoluta dada,

$R_E = \dfrac{0{,}34 \times 0{,}10 \times 10^6}{(\pi/4)(0{,}10)^2 \times 9{,}8 \times 1{,}90} = 232.000$. Del Diagrama A-1, para $\epsilon/d = 0{,}0009$, $f = 0{,}0205$.

Mediante la (C) anterior, despreciando $2 \ln V_2/V_1$, que es muy pequeño comparado al término $f(L/d)$,

$$(3{,}50 \times 10^4)^2 - p_2^2 = \frac{(0{,}34)^2 \times 29{,}3(32 + 273)}{9{,}8[(\pi/4)(0{,}10)^2]^2}\left[\text{desp.} + (0{,}0205)\frac{540}{0{,}10}\right]$$

de la cual $p_2 = 3{,}22 \times 10^4$ kg/m² y $p_2' = 3{,}22$ kg/cm² (ab).

En B: $\quad w_2 = \dfrac{3{,}22 \times 10^4}{29{,}3(32 + 273)} = 3{,}61$ kg/m³, $\quad V_2 = \dfrac{W}{w_2A} = \dfrac{0{,}34}{3{,}61 \times 7{,}87 \times 10^{-3}} = 12{,}0$ m/seg.

En A: $\quad w_1 = \dfrac{3{,}50 \times 10^4}{29{,}3(32 + 273)} = 3{,}92$ kg/m³, $\quad V_1 = \dfrac{0{,}34}{3{,}92 \times 7{,}87 \times 10^{-3}} = 11{,}0$ m/seg.

De aquí, $2 \ln V_2/V_1 = 2 \ln (12{,}0/11{,}0) = 2 \times 0{,}077 = 0{,}157$, que es despreciable frente al término $f(L/d) = 111$. Por tanto, la presión en la sección B es $p_2' = 3{,}22$ kg/cm².

Si el aire se supone incompresible, se tiene

$$\frac{p_1 - p_2}{w_1} = f\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g} = 0{,}0205 \times \frac{540}{0{,}10} \times \frac{(11{,}0)^2}{2g} = 687 \text{ m/seg}$$

$$\Delta p = w_1h = 3{,}92 \times 687 = 2680 \text{ kg/m}^2 = 0{,}268 \text{ kg/cm}^2$$

y $p_2' = 3{,}50 - 0{,}27 = 3{,}23$ kg/cm², acuerdo poco frecuente.

24. Una tubería horizontal de hierro forjado, de 15 cm de diámetro interior y algo corroída, transporta 2,00 kg de aire por segundo desde A a B. En A la presión absoluta es 4,90 kg/cm² y en B debe mantenerse una presión absoluta de 4,60 kg/cm². El flujo es isotérmico a 20° C. ¿Cuál es la longitud de la tubería que une A con B? Utilizar $\epsilon = 0{,}039$ cm.

Solución:

Se calculan los valores de partida (véase Apéndice para 20° C y 1,033 kg/cm²),

$$w_1 = 1{,}205(4{,}90/1{,}033) = 5{,}70 \text{ kg/m}^3, \qquad w_2 = 1{,}205(4{,}60/1{,}033) = 5{,}35 \text{ kg/m}^3$$

$$V_1 = \frac{W}{w_1 A} = \frac{2{,}00}{5{,}70 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2} = 19{,}8 \text{ m/seg}, \qquad V_2 = \frac{2{,}00}{5{,}35 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2} = 21{,}2 \text{ m/seg}$$

$$R_E = \frac{19{,}8 \times 0{,}15}{(1{,}033/4{,}90)(1{,}499 \times 10^{-5})} = 943.000.$$ Del Diagrama A-1, $f = 0{,}025$, para $\epsilon/d = 0{,}0026$.

Mediante la ecuación (E) del Problema 23,

$$\frac{(4{,}90 - 4{,}60)10^4}{5{,}70} = \frac{2[2 \ln 21{,}2/19{,}8 + 0{,}025(L/0{,}15)](19{,}8)^2/2g}{(1 + 4{,}60/4{,}90)} \quad \text{y} \quad L = 152 \text{ m}$$

Nota: Para el flujo de gases en tuberías, cuando el valor de p_2 no es menor del 10 % que el valor de p_1, se comete un error menor del 5 % en la pérdida de presión al utilizar la ecuación de Bernoulli en su forma habitual, suponiendo el fluido como incompresible.

25. Las elevaciones de las líneas de alturas totales y de alturas piezométricas en el punto G son, respectivamente, 13,0 m y 12,4 m. Para el sistema mostrado en la Fig. 7-5 calcular (a) la potencia extraída entre G y H, si la altura total en H es de 1,0 m y (b) las alturas de presión en E y F, cuya elevación es de 6,0 m. (c) Dibujar, con aproximación de 0,1 m, las líneas de alturas totales y de alturas piezométricas, suponiendo para la válvula CD $K = 0{,}40$ y $f = 0{,}010$ para las tuberías de 15 cm.

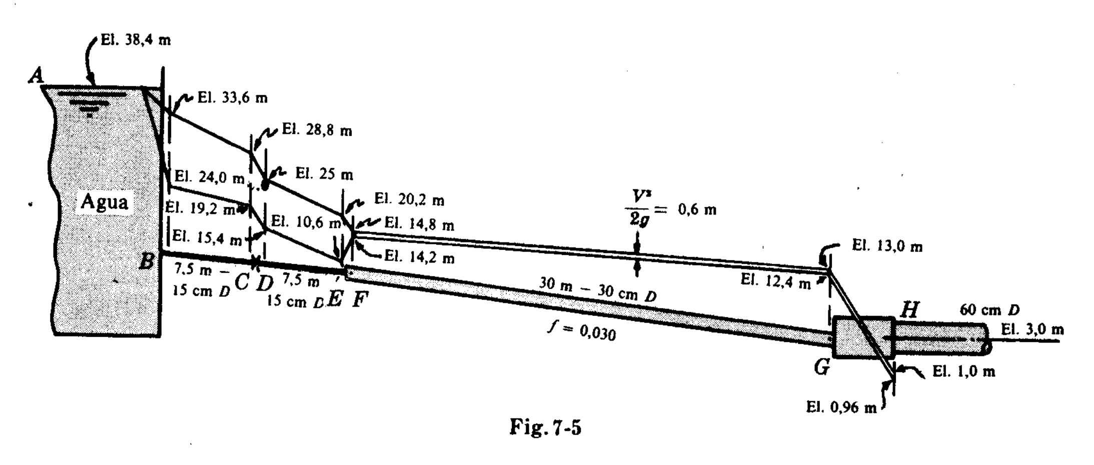


Fig. 7-5

Solución:

La corriente debe de circular hacia G, desde el depósito, ya que la línea de alturas totales en G está por debajo de la superficie libre del depósito. GH es una turbina. Antes de poder determinar la potencia extraída es necesario calcular el caudal Q y la pérdida de altura en la turbina.

(a) En G, $V_{30}^2/2g = 0{,}6$ m (diferencia entre las líneas de alturas totales y piezométricas).

Además $V_{15}^2/2g = 16 \times 0{,}6 = 9{,}6$ m y $V_{60}^2/2g = \frac{1}{16}(0{,}6) = 0{,}04$ m. Para obtener Q,

$$V_{30} = 3{,}43 \text{ m/seg} \qquad \text{y} \qquad Q = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}3)^2 \times 3{,}43 = 0{,}242 \text{ m}^3\text{/seg}$$

$$\text{Potencia (CV)} = wQH_T/75 = 1000(0{,}242)(13{,}0 - 1{,}0)/75 = 38{,}8 \text{ CV extraídos}$$

(b) De F a G, cota cero: (Energía en F) $- 0{,}030(30/0{,}3)(0{,}6) =$ (Energía en $G = 13{,}0$)

$$\text{Energía en } F = 13{,}0 + 1{,}8 = 14{,}8 \text{ m}$$

De E a F, cota cero: (Energía en E) $-$ $(13{,}72 - 3{,}43)^2/2g$ = (Energía en F = 14,8)

Energía en E = 14,8 + 5,4 = 20,2 m

$z + V^2/2g$

Altura de presión en E = 20,2 $-$ (6,0 + 9,6) = 4,6 m de agua.
Altura de presión en F = 14,8 $-$ (6,0 + 0,6) = 8,2 m de agua.

(*c*) Yendo hacia atrás desde E:

Pérdida de altura total de D a E = 0,010(7,5/0,15)(9,6) = 4,8 m
Pérdida de altura total de C a D = 0,40(9,6) = 3,8 m
Pérdida de altura total de B a C = pérdida de D a E = 4,8 m
Pérdida de altura total de A a B = 0,50(9,6) = 4,8 m

(Elev. en D $-$ 4,8) = Elev. en E = 20,2, Elev. D = 25,0 m
(Elev. en C $-$ 3,8) = Elev. en D = 25,0, Elev. C = 28,8 m
(Elev. en B $-$ 4,8) = Elev. en C = 28,8, Elev. B = 33,6 m
(Elev. en A $-$ 4,8) = Elev. en B = 33,6, Elev. A = 38,4 m

La línea de alturas piezométricas está situada por debajo de la línea de alturas totales una cantidad igual a $V^2/2g$: 9,6 m en la tubería de 15 cm, 0,6 m en la de 30 cm y 0,04 m en la de 60 cm. Estos valores se han representado en la figura.

. Un conducto rectangular usado, de 30 cm × 45 cm de sección, y 450 m de longitud transporta aire a 20° C y a una presión en la sección de entrada de 1,07 kg/cm² (ab) con una velocidad media de 2,90 m/seg. Determinar la pérdida de carga y la caída de presión, suponiendo el conducto horizontal y las imperfecciones superficiales de un tamaño igual a 0,054 cm.

Solución:

La fórmula que da la pérdida de carga debe escribirse de forma conveniente para poderla aplicar a conductos de sección recta, no circular. La ecuación resultante se aplica a flujos turbulentos con una precisión razonable. Se sustituye el diámetro, en la fórmula, por el cuádruplo del *radio hidráulico*, que se define por el cociente del área de la sección recta por el perímetro mojado, es decir, $R = a/p$.

Para una tubería circular, $R = \frac{1}{4}\pi d^2/\pi d = d/4$, y la fórmula de Darcy puede escribirse en la forma

$$\text{Pérdida de carga} = \frac{f}{4}\,\frac{L}{R}\,\frac{V^2}{2g}$$

Para f en relación con la rugosidad del conducto y el número de Reynolds se emplea en lugar de d el valor $4R$, así

$$R_E = Vd/\nu = V(4R)/\nu$$

Para el conducto de 30 cm × 45 cm, $R = \dfrac{a}{p} = \dfrac{0{,}30 \times 0{,}45}{2(0{,}30 + 0{,}45)} = 0{,}09$ m . y

$$R_E = \frac{4VR}{\nu} = \frac{4 \times 2{,}90 \times 0{,}09}{(1{,}033/1{,}070)(1{,}499)} \times 10^5 = 72.600$$

Del Diagrama A-1, $f = 0{,}024$ para $\epsilon/d = \epsilon/4R = 0{,}054/(4 \times 9) = 0{,}0015$. Por tanto,

$$\text{Pérdida de carga} = \frac{0{,}024}{4} \times \frac{450}{0{,}09} \times \frac{(2{,}90)^2}{2g} = 12{,}9 \text{ m de aire}$$

y la caída de presión = $wh/10^4 = (1{,}070/1{,}033)(1{,}205)(12{,}9)/10^4 = 1{,}60 \times 10^{-3}$ kg/cm².

Puede observarse que la hipótesis de densidad constante en el aire es satisfactoria.

Problemas propuestos

27. Si la tensión cortante en la pared de una tubería de 30 cm es de 5,0 kg/m^2 y f = 0,040, ¿cuál es la velocidad media (*a*) si fluye agua a 21° C, (*b*) si fluye un líquido de densidad relativa 0,70?
Sol. 3,13 m/seg, 3,74 m/seg

28. ¿Cuáles son las velocidades de corte en el problema precedente? *Sol.* 0,221 m/seg, 0,264 m/seg

29. A través de una tubería de 15 cm y 60 m de longitud está fluyendo agua y la tensión cortante en las paredes es 4,60 kg/m^2. Determinar la pérdida de carga. *Sol.* 7,36 m

30. ¿Qué radio ha de tener una tubería para que la tensión cortante en la pared sea de 3,12 kg/m^2 cuando al fluir agua a lo largo de 100 m de tubería produce una pérdida de carga de 6 m? *Sol.* r = 10,4 cm

31. Calcular la velocidad crítica (inferior) para una tubería de 10 cm que transporta agua a 27° C.
Sol. 1,730 × 10^{-2} m/seg

32. Calcular la velocidad crítica (inferior) para una tubería de 10 cm que transporta un fuel-oil pesado a 43° C.
Sol. 0,892 m/seg

33. ¿Cuál será la caída de la altura de presión en 100 m de una tubería nueva de fundición, horizontal, de 10 cm de diámetro, que transporta un fuel-oil medio a 10° C, si la velocidad es de 7,5 cm/seg? *Sol.* 1,26 × 10^{-2} m

34. ¿Cuál será la caída de la altura de presión en el Problema 33 si la velocidad del fuel-oil es de 1,20 m/seg?
Sol. 2,20 m

35. Considerando únicamente las pérdidas en la tubería, ¿qué altura de carga se necesita para transportar 220 l/seg de un fuel-oil pesado a 38° C a través de 1000 m de una tubería nueva de fundición de 30 cm de diámetro interior? Utilizar ϵ = 0,024 cm. *Sol.* 47,70 m

36. En el Problema 35, ¿qué valor mínimo de la viscosidad cinemática del fuel-oil producirá un flujo laminar?
Sol. 4,67 × 10^{-4} m^2/seg

37. Al considerar las pérdidas en la tubería únicamente, ¿qué diferencia en la elevación de dos depósitos, que distan 250 m, dará un caudal de 30 l/seg de un aceite lubricante medio a 10° C, a través de una tubería de 15 cm de diámetro? *Sol.* 16,60 m

38. Un aceite de densidad relativa 0,802 y viscosidad cinemática 1,86 × 10^{-4} m^2/seg fluye desde el depósito A al depósito B a través de 300 m de tubería nueva, siendo el caudal de 88 l/seg. La altura disponible es de 16 cm. ¿Qué tamaño de tubería deberá utilizarse? *Sol.* 60 cm

39. Mediante una bomba se transporta fuel-oil pesado, a 15° C, a través de 1000 m de tubería de 5 cm de diámetro hasta un depósito 10 m más elevado que el depósito de alimentación. Despreciando las pérdidas menores, determinar la potencia de la bomba en CV si su rendimiento es del 80 % para un caudal de 3,5 l/seg. *Sol.* 78,4 CV

40. Agua a 38° C está fluyendo entre A y B a través de 250 m de tubería de fundición (ϵ = 0,06 cm) de 30 cm de diámetro interior. El punto B está 10 m por encima de A y la presión en B debe mantenerse a 1,4 kg/cm^2. Si por la tubería circulan 220 l/seg, ¿qué presión ha de existir en A? *Sol.* 3,38 kg/cm^2

41. Una tubería comercial usada de 100 cm de diámetro interior y 2500 m de longitud, situada horizontalmente, transporta 1,20 m^3/seg de fuel-oil pesado, de densidad relativa 0,912, con una pérdida de carga de 22,0 m. ¿Qué presión debe mantenerse en la sección de entrada A para que la presión en B sea de 1,4 kg/cm^2? Utilizar ϵ = 1,37 cm.
Sol. 3,41 kg/cm^2

42. Una tubería vieja, de 60 cm de diámetro interior y 1200 m de longitud, transporta un fuel-oil medio a 27° C desde A a B. Las presiones en A y B son, respectivamente, 4,0 kg/cm^2 y 1,4 kg/cm^2, y el punto B está situado 20 m por encima de A. Calcular el caudal en m^3/seg utilizando ϵ = 0,048 cm. *Sol.* 0,65 m^3/seg

43. Desde un depósito A, cuya superficie libre está a una cota de 25 m, fluye agua hacia otro depósito B, cuya superficie está a una cota de 18 m. Los depósitos están conectados por una tubería de 30 cm de diámetro y 30 m de longitud (f = 0,020) seguida por otros 30 m de tubería de 15 cm (f = 0,015). Existen dos codos de 90° en cada tubería (K = 0,50 para cada uno de ellos), K para la contracción es igual a 0,75 y la tubería de 30 cm es entrante en el depósito A. Si la cota de la contracción brusca es de 16 m, determinar la altura de presión en las tuberías de 30 y 15 cm en el cambio de sección. *Sol.* 8,51 m, 5,90 m

44. En la Fig. 7-6 el punto B dista 180 m del recipiente. Si circulan 15 l/seg de agua, calcular (a) la pérdida de carga debida a la obstrucción parcial C y (b) la presión absoluta en B.
Sol. 1,68 m, 0,98 kg/cm² (ab)

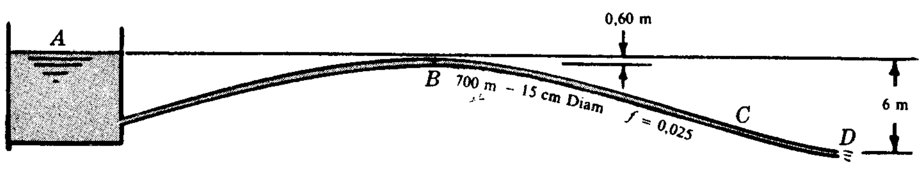


Fig. 7-6

45. Un disolvente comercial a 21° C fluye desde un depósito A a otro B a través de 150 m de una tubería nueva de fundición asfaltada de 15 cm de diámetro. La diferencia de elevación entre las superficies libres es de 7 m. La tubería es entrante en el depósito A y dos codos en la línea producen una pérdida de carga igual a dos veces la altura de velocidad. ¿Cuál es el caudal que tiene lugar? Utilizar $\epsilon = 0{,}0135$ cm. *Sol.* 41,6 l/seg

46. Un conducto de acero de sección rectangular de 5 cm × 10 cm transporta 18 l/seg de agua a una temperatura media de 15° C y a presión constante al hacer que la línea de alturas piezométricas sea paralela al eje del conducto. ¿Qué altura ha de descender el conducto en 100 m al suponer la rugosidad absoluta de la superficie del conducto igual a 0,025 cm? (Utilizar $\nu = 1{,}132 \times 10^{-6}$ m²/seg.) *Sol.* 27,8 m

47. Cuando circulan 40 l/seg de un fuel-oil medio a 15° C entre A y B a través de 1000 m de una tubería nueva de fundición de 15 cm de diámetro, la pérdida de carga es de 40 cm. Las secciones A y B tienen cotas de 0,0 m y 18,0 m, respectivamente, siendo la presión en B de 3,50 kg/cm². ¿Qué presión debe mantenerse en A para que tenga lugar el caudal establecido? *Sol.* 8,48 kg/cm²

48. (a) Determinar el caudal de agua que circula a través de las tuberías nuevas de fundición mostradas en la Fig. 7-7. (b) ¿Cuál es la presión en B si está a 30 m del depósito A? (Utilizar la Tabla 3.) *Sol.* 98 l/seg, 703 kg/m²

49. A través del sistema mostrado en la Fig. 7-8 fluye agua a 38° C. Las tuberías son nuevas de fundición asfaltada y sus longitudes 50 m la de 7,5 cm y 30 m la de 15 cm. Los coeficientes de pérdida de los accesorios y válvulas son: Codos de 7,5 cm, $K = 0{,}40$ cada uno; codo de 15 cm, $K = 0{,}60$ y válvula de 15 cm, $K = 3{,}0$. Determinar el caudal. *Sol.* 13,6 l/seg

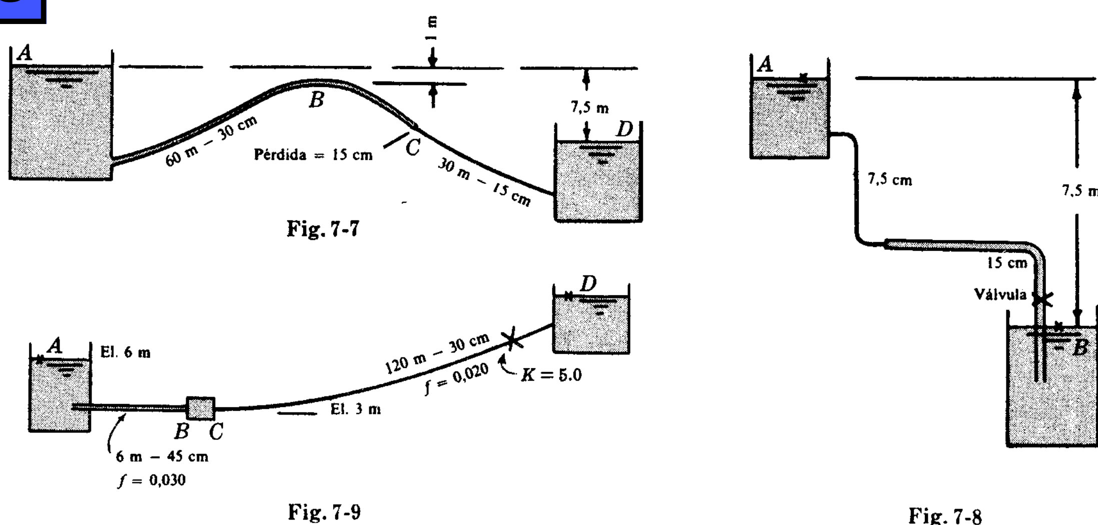


Fig. 7-7

Fig. 7-9

Fig. 7-8

50. Si la bomba B de la Fig. 7-9 transfiere al fluido 70 CV cuando el caudal de agua es de 220 l/seg, ¿a qué elevación puede situarse el depósito D? *Sol.* 21,0 m

51. Una bomba situada a una cota topográfica de 3 m mueve 210 l/seg de agua a través de un sistema de tuberías horizontales hasta un depósito cerrado, cuya superficie libre está a una cota de 6,0 m. La altura de presión en la sección de succión, de 30 cm de diámetro, de la bomba es de $-1{,}20$ m y en la sección de descarga, de 15 cm de diámetro, de 58,0 m. La tubería de 15 cm ($f = 0{,}030$) tiene 30 m de longitud, sufre un ensanchamiento brusco hasta 30 cm, continuando con una tubería de este diámetro ($f = 0{,}020$) y una longitud de 180 m hasta el depósito. Una válvula de 30 cm, $K = 1{,}0$, está situada a 30 m del depósito. Determinar la presión sobre la superficie libre del agua del depósito. Dibujar las líneas de alturas totales y piezométricas. *Sol.* 0,88 kg/cm²

52. ¿Qué diámetro debe de tener una tubería medio nueva de fundición para transportar 30 l/seg de agua a 21° C a través de 1200 m con una pérdida de altura piezométrica de 20 m? (Utilizar la Tabla 3.) *Sol.* 16,5 m

53. La bomba *BC* transporta agua hasta el depósito *F* y en la Fig. 7-10 se muestra la línea de alturas piezométricas. Determinar (*a*) la potencia suministrada al agua por la bomba *BC*, (*b*) la potencia extraída por la turbina *DE* y (*c*) la cota de la superficie libre mantenida en el depósito *F*. *Sol.* 950 CV, 67,3 CV, 89,6 m

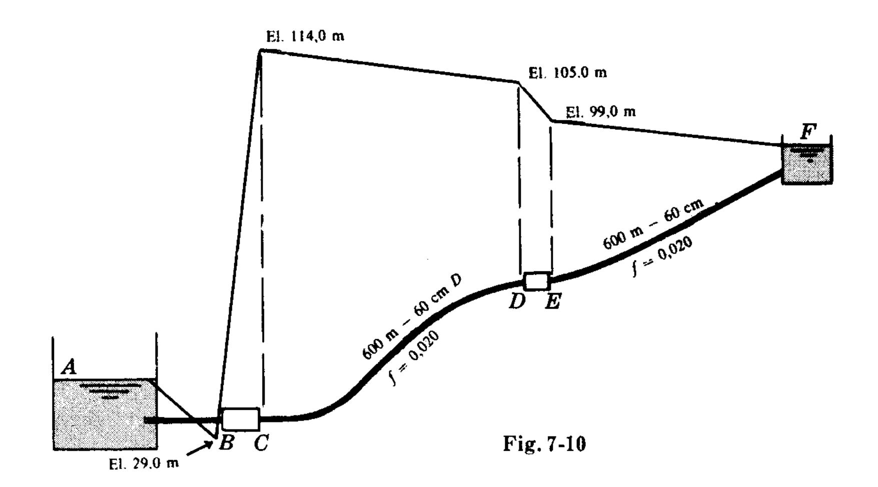


Fig. 7-10

54. A través de una tubería de 5 cm de diámetro circulan 68 g/seg de aire a la temperatura constante de 20° C. La tubería es usada y el material de fundición. En la sección *A* la presión absoluta es de 3,80 kg/cm². ¿Cuál será la presión absoluta 150 m aguas abajo de *A* si la tubería es horizontal? Utilizar $\epsilon = 0{,}0249$ cm.
Sol. 3,68 kg/cm² (ab)

55. A través de un tramo horizontal de 60 m de longitud de una tubería nueva de hierro forjado de 10 cm de diámetro fluye anhídrido carbónico a 38° C. La presión manométrica en la sección *A* de aguas arriba es de 8,40 kg/cm² y la velocidad media de 12 m/seg. Suponiendo las variaciones de densidad despreciables, ¿cuál es la caída de presión en los 60 m de tubería? (La viscosidad absoluta del CO_2 a 38° C es $\mu = 16 \times 10^{-7}$ kg seg/m².)
Sol. 0,123 kg/cm²

56. A través de un conducto de sección rectangular de 20 cm de altura tiene lugar un flujo en régimen laminar. Suponiendo que la distribución de velocidades viene dada por la ecuación $v = 48y(1 - 5y)$, calcular (*a*) el caudal por metro de anchura, (*b*) el coeficiente de corrección de la energía cinética y (*c*) la relación de la velocidad media a la máxima. *Sol.* 320 l/(seg m), $\alpha = 1{,}543$, 0,67

57. En un ensayo de laboratorio se utiliza una tubería de plástico de 25 cm de diámetro interior para demostrar el flujo en régimen laminar. Si la velocidad crítica inferior resultó ser 3,0 m/seg, ¿qué valor tendrá la viscosidad cinemática del líquido utilizado? *Sol.* $3{,}75 \times 10^{-5}$ m²/seg

58. Para el flujo laminar en tuberías $f = 64/R_E$. Mediante esta información, desarrollar una expresión de la velocidad media en función de la pérdida de carga, diámetro y otras magnitudes oportunas.
Sol. $V = gd^2h_L/32\nu L$

59. Determinar el caudal en una tubería de 30 cm de diámetro si la ecuación de la distribución de velocidades es $v^2 = 70(y - y^2)$, con el origen de distancias en la pared de la tubería. *Sol.* 126 l/seg

Capítulo 8

Sistemas de tuberías equivalentes, compuestas, en paralelo y ramificadas

;ISTEMAS DE TUBERIAS

Los sistemas de tuberías que distribuyen el agua en las ciudades o en grandes plantas industriales ueden ser extremadamente complicados. En este capítulo solo se considerarán unos pocos casos bajo ondiciones relativamente sencillas. En la mayoría de los casos, el fluido que circula es el agua, si bien os procedimientos de análisis y resolución pueden aplicarse a otros fluidos. Por lo general, la relación e longitud a diámetro será grande (véase Capítulo 7, Problema 20) y podrán despreciarse las pérdi-as menores.

En los Problemas 18, 19 y 20 se presentará el método de Hardy Cross para analizar los flujos en :des de tuberías. Los caudales y caídas de presión en los sistemas de distribución muy extensos de las .udades pueden analizarse mediante calculadores analógicos.

ISTEMAS DE TUBERIAS EQUIVALENTES

Una tubería es equivalente a otra tubería, o a un sistema de tuberías, si para una pérdida de carga ada tiene lugar el mismo caudal en la tubería equivalente que en el sistema de tuberías dado. Frecuen-mente, es conveniente sustituir un sistema de tuberías complejo por una sola tubería equivalente.

ISTEMAS DE TUBERIAS COMPUESTAS O EN SERIE, EN PARALELO Y RAMIFICADAS

Un sistema compuesto está constituido por varias tuberías en serie.

Un sistema de tuberías en paralelo está constituido por dos o más tuberías que, partiendo de un ınto, vuelven a unirse de nuevo en otro punto, aguas abajo del primero.

Un sistema de tuberías ramificadas está constituido por dos o más tuberías que se ramifican en erto punto y no vuelven a unirse aguas abajo otra vez.

IETODOS DE RESOLUCION

Los métodos de resolución implican el establecimiento en número suficiente de un sistema de ecua-ɔnes simultáneas o el empleo de modificaciones especiales de la fórmula de Darcy en las que el coe-iente de fricción depende únicamente de la rugosidad relativa de la tubería. Para el caso del agua (o otros líquidos de viscosidad parecida), dichas fórmulas han sido obtenidas por Manning, Schoder, obey, Hazen-Williams y otros.

ÍRMULA DE HAZEN-WILLIAMS

En este capítulo se utilizará la fórmula de Hazen-Williams. La resolución se hará con la ayuda del agrama B del Apéndice, en lugar de utilizar, en la mayoría de los casos, procedimientos algebraicos ás laboriosos. La fórmula que da la velocidad es

$$V = 0{,}8494 C_1 R^{0,63} S^{0,54} \qquad (1)$$

nde V = velocidad en m/seg, R = radio hidráulico en m, S = pendiente de la línea de alturas pie-

zométricas y C_1 = coeficiente de la rugosidad relativa de Hazen-Williams. Los valores re dos para C_1 se dan en la Tabla 6 del Apéndice.

La relación entre esta fórmula empírica y la de Darcy se da en el Problema 1. La princip de la fórmula de Hazen-Williams es que el coeficiente C_1 depende únicamente de la rugosida

En el Diagrama B, el caudal Q se expresa en l/seg y en millones de galones por día (mgd tores de conversión son

$$1 \text{ mgd} = 1{,}547 \text{ ft}^3/\text{seg} = 43{,}656 \text{ l/seg}$$

Problemas resueltos

1. Transformar la fórmula de Hazen-Williams en una del tipo de la de Darcy.

Solución:

$$V = 0{.}8494 C_1 R^{0.63} S^{0.54}$$

Se tiene $S = h/L$ y $R = d/4$ (véase Capítulo 7, Problema 26). Despejando h

$$h^{0.54} = \frac{4^{0.63}}{0{,}8494}\,\frac{L^{0.54}}{d^{0.63}}\,\frac{V}{C_1}$$

o

$$h = \frac{2g(4)^{1.165}}{(0{,}8494)^{1.850}}\left(\frac{L}{d}\right)\frac{V^2}{2g}\left[\frac{d^{-0.015}}{V^{0.150}d^{0.150}C_1^{1.850}}\right] = \frac{133{,}4d^{-0.015}}{C_1^{1.850}}\left(\frac{L}{d}\right)\frac{V^2}{2g}\left[\frac{1}{d^{0.150}V^{0.150}}\right]$$

Para incluir el número de Reynolds en la ecuación se multiplica por $(\nu/\nu)^{0.150}$, y se obtiene

$$h = \frac{133{,}4d^{-0.015}}{C_1^{1.850}\nu^{0.150}}\left(\frac{L}{d}\right)\frac{V^2}{2g}\left[\frac{\nu^{0.150}}{V^{0.150}d^{0.150}}\right] = \frac{133{,}4d^{-0.015}}{C_1^{1.850}\nu^{0.150}R_E^{0.150}}\left(\frac{L}{d}\right)\frac{V^2}{2g} = f_1\left(\frac{L}{d}\right)\frac{V^2}{2g}.$$

Se observará que si se omite el factor $d^{-0.015}$, muy próximo a la unidad, el coeficiente de fricción f_1 únicamente del número de Reynolds y del coeficiente de rugosidad C_1 para todos los líquidos cuya vi no varíe apreciablemente (en tanto por ciento) con los cambios de temperatura. En tales casos, se utilizar lor medio (o representativo) de la viscosidad, que se supondrá constante en esta fórmula del tipo de la d

2. Comparar los resultados obtenidos por resolución algebraica y mediante el Diagrama B par caudal que circula por una tubería nueva de 30 cm de diámetro con una pérdida de altura métrica de 4,30 m en 1500 m de tubería y (b) la pérdida de carga que tiene lugar en 1800 m tubería vieja de fundición de 60 cm de diámetro, cuando el caudal que circula es de 250 l/s

Solución:

(a) **Algebraicamente.** $S = 4{,}30/1500 = 0{,}00287$ y $R = d/4 = 7{,}5$ cm.
De la Tabla 6 del Apéndice, $C_1 = 130$. De aquí,

$$Q = AV = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}30)^2[0{,}8494 \times 130(0{,}075)^{0.63}(0{,}00287)^{0.54}] = 0{,}061 \text{ m}^3/\text{seg} = 61 \text{ l/seg}$$

Por el diagrama. El Diagrama B está construido para $C_1 = 100$.
$D = 30$ cm y $S = 0{,}00287$ o $2{,}87$ m/1000 m.

Con estos valores, $Q_{100} = 48$ l/seg (leyendo el nomograma de acuerdo con las instrucciones que en el mismo).

Al observar la fórmula de Hazen-Williams se ve que V y Q son directamente proporcionales a C el caudal para $C_1 = 130$ será

$$Q_{130} = (130/100)(48) \text{ l/seg} = 62{,}3 \text{ l/seg}$$

(*b*) **Algebraicamente.** ($C_1 = 100$). $Q = 250$ l/seg.

$$0{,}250 = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}60)^2[0{,}8494 \times 100(0{,}60/4)^{0{,}63}S^{0{,}54}] \quad \text{y} \quad S = 0{,}00195$$

Por el diagrama. $Q = 250$ l/seg, $D = 60$ cm.
$S = 0{,}002$ m/1000 m $= 0{,}002$ (del diagrama).

3. Una tubería usada de 30 cm de diámetro de fundición transporta 100 l/seg de agua. ¿Cuál será la pérdida de altura en 1200 m de tubería (*a*) mediante la fórmula de Darcy y (*b*) utilizando la fórmula de Hazen-Williams?

Solución:

(*a*) $V_{30} = 0{,}100/[\tfrac{1}{4}\pi(0{,}30)^2] = 1{,}413$ m/seg. De la Tabla 3 del Apéndice, $f = 0{,}0260$.

$$\text{Pérdida de carga} = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = 0{,}0260\,\frac{1200}{0{,}30}\,\frac{(1{,}413)^2}{2g} = 10{,}6 \text{ m}$$

(*b*) $Q = 100$ l/seg y $C_1 = 110$. $Q_{100} = (100/110)100 = 82{,}8$ l/seg.

Del Diagrama *B*, $S = 8{,}4$ m/1000 m y pérdida de carga $= 8{,}4 \times 1{,}2 = 10{,}1$ m.

La coincidencia de resultados es notoria.

La experiencia y buen juicio en la elección de C_1 conducirán a resultados satisfactorios para el caso en que circula agua o bien líquidos de viscosidad parecida.

4. Para una pérdida de carga de 5,0 m/1000 m y utilizando $C_1 = 100$ para todas las conducciones, ¿cuántas tuberías de 20 cm son equivalentes a una de 40 cm?, ¿y a una de 60 cm?

Solución:

Mediante el Diagrama *B*, para $S = 5{,}0$ m/1000 m: Q para tubería de 20 cm = 22 l/seg
Q para tubería de 40 cm = 140 l/seg
Q para tubería de 60 cm = 380 l/seg

Por tanto, tomamos 140/22 o bien 6,4 tuberías de 20 cm, equivalentes hidráulicamente, a una de 40 cm de la misma rugosidad relativa. Del mismo modo, 380/22 ó 17,3 tuberías de 20 cm son equivalentes a una de 60 cm para una pérdida de carga de 5,0 m/1000 m o para cualesquiera otras condiciones de pérdida de carga.

5. Un sistema de tuberías en serie está constituido por un tramo de 1800 m de tubería de 50 cm, otro de 1200 m de 40 cm y 600 m de 30 cm. Todas las tuberías son nuevas de fundición. Hallar a partir del sistema (*a*) la longitud equivalente de una tubería de 40 cm y (*b*) el diámetro equivalente si la longitud de la tubería fuera de 3600 m.

Solución:

Utilícese $C_1 = 130$ para tubería nueva de fundición.

(*a*) Como la magnitud hidráulica común para un sistema de tuberías en serie es el caudal, supóngase que éste es de 130 l/seg (cualquier otro valor serviría). Para utilizar el Diagrama *B*, se cambia Q_{130} en Q_{100}, es decir,

$$Q_{100} = (100/130)(130) = 100 \text{ l/seg}$$

$S_{50} = 0{,}93$ m/1000 m y la	pérdida de carga = $0{,}93 \times 1{,}8$ =	1,675 m	(15,0 %)
$S_{40} = 2{,}62$ m/1000 m	pérdida de carga = $2{,}62 \times 1{,}2$ =	3,141 m	(28,2 %)
$S_{30} = 10{,}60$ m/1000 m	pérdida de carga = $10{,}60 \times 0{,}6$ =	6,360 m	(56,8 %)
	Para $Q = 130$ l/seg: Pérdida de carga total =	11,176 m	(100,0 %)

La tubería equivalente de 40 cm debe transportar 130 l/seg con una pérdida de carga de 11,176 m ($C = 130$).

$$S_{40} = 2{,}62 \text{ m/1000 m} = \frac{\text{pérdida de carga en m}}{\text{longitud equivalente en m}} = \frac{11{,}176}{L_E}$$

y $L_E = 4260$ m.

(*b*) Los 3600 m de tubería, ($C_1 = 130$), deben transportar 130 l/seg con una pérdida de carga de 11,176 m.

$$S_E = \frac{\text{pérdida de carga en m}}{\text{longitud en m}} = \frac{11{,}176}{3600} = 3{,}10 \text{ m/1000 m}$$

Y en el Diagrama *B*, utilizando $Q_{100} = 100$ l/seg, $D = 38$ cm (aproximadamente).

6. Hallar la longitud equivalente, en tubería de 15 cm, del sistema mostrado en la Figura 8-1.

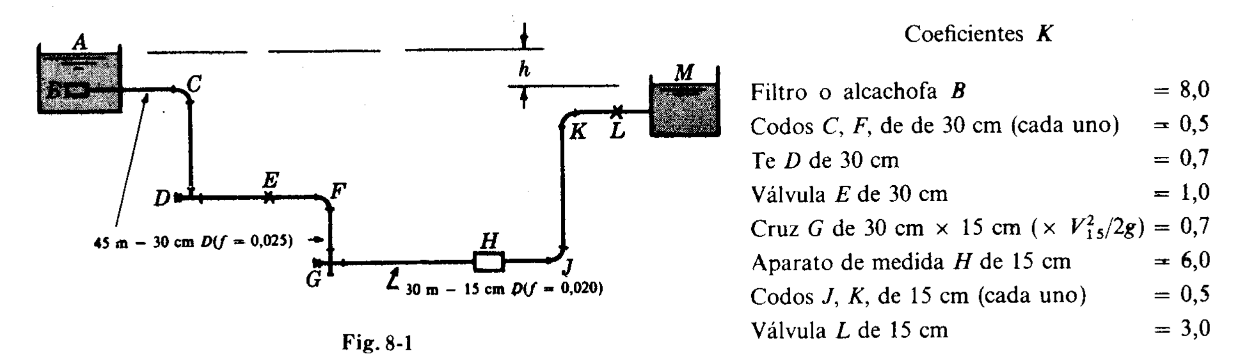


Fig. 8-1

Coeficientes *K*

Filtro o alcachofa *B*	= 8,0
Codos *C*, *F*, de de 30 cm (cada uno)	= 0,5
Te *D* de 30 cm	= 0,7
Válvula *E* de 30 cm	= 1,0
Cruz *G* de 30 cm × 15 cm (× $V_{15}^2/2g$)	= 0,7
Aparato de medida *H* de 15 cm	= 6,0
Codos *J*, *K*, de 15 cm (cada uno)	= 0,5
Válvula *L* de 15 cm	= 3,0

Solución:

Este problema se resolverá aplicando la ecuación de Bernoulli entre *A* y *M*, tomando como plano de referencia de cotas el horizontal que pasa por *M*, como sigue

$$(0 + 0 + h) - (8{,}0 + \overset{\text{Codos}}{2 \times 0{,}5} + 0{,}7 + 1{,}0 + 0{,}025 \times \frac{45}{0{,}30})\frac{V_{30}^2}{2g}$$

$$- (0{,}7 + 6{,}0 + \overset{\text{Codos}}{2 \times 0{,}5} + 3{,}0 + \overset{\text{Desagüe}}{1{,}0} + 0{,}020 \times \frac{30}{0{,}15})\frac{V_{15}^2}{2g} = (0 + 0 + 0)$$

De aquí, $h = 14{,}45\frac{V_{30}^2}{2g} + 15{,}7\frac{V_{15}^2}{2g} = (14{,}45 \times \frac{1}{16} + 15{,}7)\frac{V_{15}^2}{2g} = 16{,}6\frac{V_{15}^2}{2g}$.

Para cualquier valor de *h*, la pérdida de carga es $16{,}6(V_{15}^2/2g)$. La pérdida de carga en L_E m de tubería de 15 cm es $f(L_E/d)(V_{15}^2/2g)$. Igualando los dos valores,

$$16{,}6\frac{V_{15}^2}{2g} = 0{,}020\frac{L_E}{0{,}15}\frac{V_{15}^2}{2g} \quad \text{y} \quad L_E = 124{,}5 \text{ m}$$

La altura de velocidad puede suprimirse en esta igualdad. Debe recordarse que una equivalencia hidráulica exacta depende de *f*, que no se mantiene constante para grandes intervalos de velocidades.

7. Para el sistema de tuberías en serie del Problema 5, ¿cuál será el caudal que circula para una pérdida de carga total de 21,0 m, (*a*) utilizando el método de la tubería equivalente y (*b*) mediante el método del porcentaje?

Solución:

(*a*) Según el Problema 5, 4260 m de tubería de 40 cm son equivalentes al sistema de tuberías en serie. Para una pérdida de carga de 21,0 m

$$S_{40} = 21/4260 = 4{,}93 \text{ m/1000 m} \quad \text{y del Diagrama } B, \quad Q_{100} = 140 \text{ l/seg}$$

De aquí, $Q_{130} = (130/100)140 = 182$ l/seg

(*b*) El método del porcentaje requiere el cálculo de las pérdidas de carga para un caudal supuesto *Q*. Aunque se dispone de estos valores por el Problema 5, se van a calcular de nuevo, lo que servirá para comprobar la solución. Suponiendo $Q_{130} = 65$ l/seg, $Q_{100} = (100/130)65 = 50$ l/seg, y a partir del Diagrama *B*,

$S_{50} =$ 0,27 m/1000 m y pérdida de carga = 0,27 × 1,8 = 0,512 m (15,7 %)
$S_{40} =$ 0,77 m/1000 m y pérdida de carga = 0,77 × 1,2 = 0,922 m (28,5 %)
$S_{30} =$ 10,70 m/1000 m y pérdida de carga = 10,70 × 0,6 = 1,800 m (55,8 %)
Para Q = 65 l/seg: Pérdida de carga total = 3,234 m (100,0 %)

Los porcentajes son del mismo orden que los obtenidos en el Problema 5. Aplicando estos porcentajes a la pérdida total de carga dada de 21,0 m, se obtiene

H_{L50} = 21 × 15,7 % = 3,30 m, S = 3,30/1800 = 1,83 m/1000 m, Q = 130/100 × 142 = 185 l/seg
H_{L40} = 21 × 28,5 % = 6,00 m, S = 6,00/1200 = 5,00 m/1000 m, Q = 130/100 × 140 = 182 l/seg
H_{L30} = 21 × 55,8 % = 11,70 m, S = 11,70/600 = 19,50 m/1000 m, Q = 130/100 × 139 = 181 l/seg

El cálculo con uno de los diámetros es suficiente para calcular el caudal Q, pero los demás sirven de comprobación y dan la seguridad de que no se han cometido equivocaciones.

8. En el sistema mostrado en la Fig. 8-2, cuando el caudal desde el depósito A al nudo principal D es de 140 l/seg, la presión en D es 1,40 kg/cm². Se quiere aumentar el caudal hasta 184 l/seg, con una presión en D de 2,80 kg/cm². ¿Qué diámetro debe de tener la tubería de 1500 m de longitud, que ha de ponerse entre B y C en paralelo (dibujada a trazos en la figura), con la existente de 30 cm de diámetro para satisfacer las condiciones exigidas?

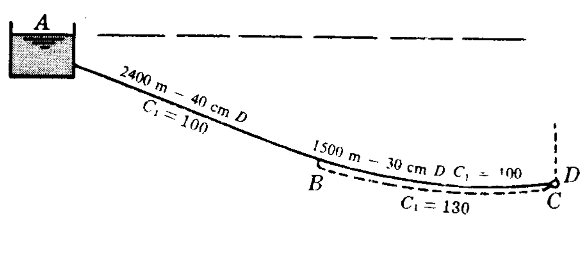


Fig. 8-2

Solución:

La elevación del depósito A puede determinarse a partir de las condiciones iniciales. Del Diagrama B,

para Q = 140 l/seg, S_{40} = 4,8 m/1000 m, pérdida de carga = 4,8 × 2,4 = 11,5 m
S_{30} = 20,0 m/1000 m, pérdida de carga = 20,0 × 1,5 = 30,0 m
Pérdida de carga total = 41,5 m

La línea de alturas piezométricas cae desde 41,5 m hasta una elevación de 14,0 m por encima de D (equivalentes a 1,40 kg/cm²). Por tanto, el depósito A está a (41,5 + 14,0) = 55,5 m por encima de D.

Para una presión de 2,80 kg/cm², la elevación de la línea de alturas piezométricas sobre D será de 28,0 m, de forma que la altura de carga disponible para el caudal de 184 l/seg es de (55,5 − 28,0) = 27,5 m.

En la tubería de 40 cm, Q = 184 l/seg, S = 8,2 m/1000 m, pérdida de carga = 8,2 × 2,4 = 19,7 m. De aquí,

Pérdida de carga entre B y C = 27,5 − 19,7 = 7,8 m

Para la tubería existente de 30 cm, S = 7,8/1500 = 5,2 m/1000 m, Q = 68,0 l/seg y el caudal en la tubería nueva, puesta en paralelo, será (184,0 − 68,0) = 116,0 l/seg con una altura de carga disponible (caída de la línea de alturas piezométricas) de 7,8 m entre B y C.

$$S = 7{,}8/1500 = 5{,}2 \text{ m/1000 m} \quad \text{y} \quad Q_{100} = (100/130)116 = 89{,}3 \text{ l/seg}$$

El Diagrama B da D = 34 cm aproximadamente (se toma la tubería de diámetro normalizado inmediato superior).

. En el sistema de tuberías en paralelo de la Figura 8-3 la altura de presión en A es de 36,0 m de agua y la altura de presión en E de 22,0 m de agua. Suponiendo que las tuberías están en un plano horizontal, ¿qué caudal circula por cada una de las ramas en paralelo?

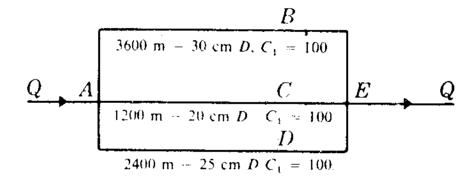


Fig. 8-3

Solución:

La caída de la línea de las alturas piezométricas entre A y E es $(36 - 22) = 14$ m, despreciando los pequeños valores de las diferencias de las alturas de velocidad. Los caudales pueden conocerse, sin más, a partir de las pendientes de las líneas de las alturas piezométricas, que se determinan fácilmente. Así, mediante el Diagrama B,

$$\begin{aligned} S_{30} &= 14/3600 = 3{,}90 \text{ m/1000 m}, & Q_{30} &= 58 \text{ l/seg}, \quad (42{,}0\,\%) \\ S_{20} &= 14/1200 = 11{,}70 \text{ m/1000 m}, & Q_{20} &= 35 \text{ l/seg}, \quad (25{,}4\,\%) \\ S_{25} &= 14/2400 = 5{,}85 \text{ m/1000 m}, & Q_{25} &= 45 \text{ l/seg}, \quad (32{,}6\,\%) \\ & & Q \text{ total} &= 138 \text{ l/seg}, \quad (100{,}0\,\%) \end{aligned}$$

10. Si en el Problema 9 el caudal total Q fuera de 280 l/seg, ¿qué pérdida de carga tiene lugar entre A y E y cómo se reparte el caudal en las ramas del circuito? Utilizar dos métodos, el del porcentaje y el de la tubería equivalente.

Solución:

En un sistema de tuberías en paralelo la magnitud hidráulica común es la pérdida de carga entre los nudos (AE). La resolución se llevará a cabo como si no se hubiera resuelto el Problema 9.

Al suponer una pérdida de carga entre A y E de 8,0 m, los caudales para la pérdida de carga supuesta pueden obtenerse a partir del Diagrama B.

$$\begin{aligned} S_{30} &= 8/3600 = 2{,}22 \text{ m/1000 m}, & Q_{30} &= 45 \text{ l/seg}, \quad (42{,}8\,\%) \\ S_{20} &= 8/1200 = 6{,}67 \text{ m/1000 m}, & Q_{20} &= 27 \text{ l/seg}, \quad (25{,}7\,\%) \\ S_{25} &= 8/2400 = 3{,}33 \text{ m/1000 m}, & Q_{25} &= 33 \text{ l/seg}, \quad (31{,}5\,\%) \\ & & Q \text{ total} &= 105 \text{ l/seg}, \quad (100{,}0\,\%) \end{aligned}$$

(*a*) **Método del porcentaje.**

El caudal en cada rama del circuito será un porcentaje constante del caudal total a través del circuito para un intervalo razonable de las pérdidas de carga entre los nudos. Los porcentajes encontrados coinciden razonablemente con los tabulados en el Problema 9 (dentro de la precisión obtenida en el Diagrama B y con la regla de cálculo). Aplicando los porcentajes al caudal dado de 280 l/seg,

$$\begin{aligned} Q_{30} &= 42{,}8\,\% \times 280 = 120{,}0 \text{ l/seg}, & S_{30} &= 15{,}0 \text{ m/1000 m}, & (H_L)_{A-E} &= 54 \text{ m} \\ Q_{20} &= 25{,}7\,\% \times 280 = 72{,}0 \text{ l/seg}, & S_{20} &= 43{,}0 \text{ m/1000 m}, & (H_L)_{A-E} &= 52 \text{ m} \\ Q_{25} &= 31{,}5\,\% \times 280 = 88{,}0 \text{ l/seg}, & S_{25} &= 22{,}0 \text{ m/1000 m}, & (H_L)_{A-E} &= 53 \text{ m} \\ Q &= 280{,}0 \text{ l/seg} & & & & \end{aligned}$$

Este método da una comprobación de los cálculos, como se deduce de los tres valores de la pérdida de carga obtenidos. Es el método de cálculo recomendado.

(*b*) **Método de la tubería equivalente** (utilizar el diámetro de 30 cm).

Deben calcularse los caudales para una pérdida de carga supuesta, como en el método anterior. Empleando los mismos valores, para una pérdida de carga de 8,0 m, el caudal total a través del sistema de tuberías en paralelo es de 105 l/seg. Una tubería equivalente daría el mismo caudal para una pérdida de carga de 8,0 m, es decir,

$$Q = 105 \text{ l/seg}, \quad H_L = 8{,}0 \text{ m} \quad \text{y} \quad S_{30} = 11{,}8 \text{ m/1000 m, obtenida del Diagrama } B.$$

De $S = h/L$, $11{,}8 = 8{,}0 \text{ m}/L_E$ m, y $L_E = 678$ m (de tubería de 30 cm, $C_1 = 100$).

Para el caudal dado de 280 l/seg, $S_{30} = 80$ m/1000 m y la pérdida de carga entre A-$E = 80 \times 678/1000 = 54$ m. Con esta pérdida de carga pueden obtenerse los valores de los tres caudales.

11. Para el sistema mostrado en la Fig. 8-4, (*a*) ¿cuál es el caudal si la caída de la línea de alturas piezométricas entre A y B es de 60 cm? (*b*) ¿Qué longitud de una tubería de 50 cm ($C_1 = 120$) es equivalente al sistema AB?

Solución:

(*a*) La solución más directa puede obtenerse suponiendo una caída de la línea de alturas piezométricas (pérdida de carga) entre W y Z y sacar de esta hipótesis una conclusión lógica.

Por ejemplo, suponiendo una pérdida de carga entre W y Z de 9 m, a partir del Diagrama B,

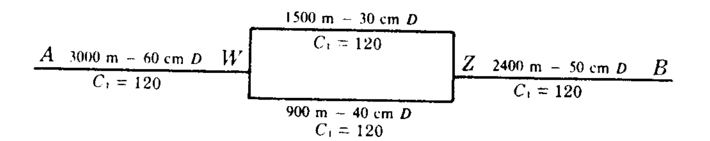


Fig. 8-4

$$S_{30} = 9/1500 = 6{,}0 \text{ m}/1000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q_{30} = (120/100)72 = 86{,}4 \text{ l/seg}, \quad (26{,}4\,\%)$$
$$S_{40} = 9/900 = 10{,}0 \text{ m}/1000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q_{40} = (120/100)200 = 240{,}0 \text{ l/seg}, \quad (73{,}6\,\%)$$
$$Q \text{ total} = 326{,}4 \text{ l/seg}, \quad (100{,}0\,\%)$$

Ahora puede calcularse la pérdida de carga entre A y B para el caudal total de 326,4 l/seg. Al emplear el Diagrama B, se utiliza $Q_{100} = (100/120)326{,}4 = 272{,}0$ l/seg.

$$\text{De } A \text{ a } W, \quad S_{60} = 2{,}6 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad H_L = 2{,}6\,\frac{3000}{1000} = 7{,}8 \text{ m}, \quad (24{,}0\,\%)$$
$$\text{De } W \text{ a } Z, \quad \text{(el supuesto)} \quad = 9{,}0 \text{ m}, \quad (28{,}0\,\%)$$
$$\text{De } Z \text{ a } B, \quad S_{50} = 6{,}5 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad H_L = 6.5\,\frac{2400}{1000} = 15{,}6 \text{ m}, \quad (48{,}0\,\%)$$
$$\text{Pérdida de carga total (para } Q = 326{,}4 \text{ l/seg}) = 32{,}4 \text{ m}, \quad (100{,}0\,\%)$$

Aplicando estos porcentajes a la pérdida de carga dada de 60 m, se obtiene:

$$(H_L)_{A-W} \text{ (real)} = 60 \times 24\,\% = 14{,}4 \text{ m}, \quad S_{60} = \frac{14{,}4}{3000} = 4{,}8 \text{ m}/1000 \text{ m};$$
$$(H_L)_{W-Z} \text{ (real)} = 60 \times 28\,\% = 16{,}8 \text{ m};$$
$$(H_L)_{Z-B} \text{ (real)} = 60 \times 48\,\% = 28{,}8 \text{ m}, \quad S_{50} = \frac{28{,}8}{2400} = 12 \text{ m}/1000 \text{ m}.$$

Del Diagrama B, el caudal en la tubería de 60 cm será (120/100)(380) = 456 l/seg.
Como comprobación, en la tubería de 50 cm el caudal será $Q = (120/100)(380) = 456$ l/seg.
Este caudal se divide en el circuito WZ en los porcentajes calculados antes, es decir, 26,4 % y 73,6 %.

(*b*) Utilizando la información anterior para el sistema entre A y B, un caudal de 326,4 l/seg produce una caída en la línea de alturas piezométricas de 32,4 m. Para este caudal de 326,4 l/seg y en una tubería de 50 cm, $C_1 = 120$

$$S_{50} = 6{,}0 \text{ m}/1000 \text{ m} = 32{,}4/L_E \qquad \text{o bien} \qquad L_E = 5400 \text{ m}$$

12. En el sistema de la Fig. 8-5, determinar las alturas de presión en A y B cuando la bomba manda un caudal de 140 l/seg. Dibujar la línea de alturas piezométricas.

Solución:

Se determina la tubería equivalente al sistema en paralelo entre BC, en tubería de 40 cm de diámetro, $C_1 = 100$. Una vez determinada, se tiene únicamente una tubería de la misma rugosidad relativa, con la que los cálculos son sencillos para cualquier condición de flujo. Suponiendo una caída en la línea de alturas piezométricas de 7 m entre B y C, se obtienen los siguientes valores, mediante el Diagrama B,

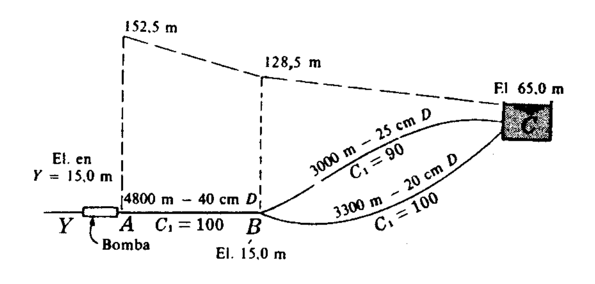


Fig. 8-5

$$S_{25} = 7/3000 = 2{,}23 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad Q_{25} = 27{,}0 \text{ l/seg}$$
$$S_{20} = 7/3300 = 2{,}12 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad Q_{20} = 14{,}0 \text{ l/seg}$$
$$Q \text{ total} = 41{,}0 \text{ l/seg}$$

Para $Q = 41{,}0$ l/seg y $D = 40$ cm ($C_1 = 100$), $S_{40} = 0{,}55$ m/1000 m $= 7{,}0/L_E$ y $L_E = 12.700$ m.

El caudal enviado por la bomba al depósito es de 140 l/seg. Para una longitud de (12.700 + 4800) = 17.500 m de tubería equivalente de 40 cm, la pérdida de carga entre A y C será

$$S_{40} = 5{,}00 \text{ m/1000 m}, \quad H_L = 5{,}00(17.500/1000) = 87{,}5 \text{ m}$$

Por tanto, la altura piezométrica en A será (65,0 + 87,5) = 152,5 m, según se muestra en la figura. La caída de A a B = 5,00(4800/1000) = 24,0 m y la elevación en B será (152,5 − 24,0) = 128,5 m.

$$\text{Altura de presión en } A = 152{,}5 - 15{,}0 = 137{,}5 \text{ m}$$
$$\text{Altura de presión en } B = 128{,}5 - 15{,}0 = 113{,}5 \text{ m}$$

13. En la Fig. 8-6, ¿qué sistema tiene más capacidad, el $ABCD$ o el $EFGH$? ($C_1 = 120$ para todas las tuberías.)

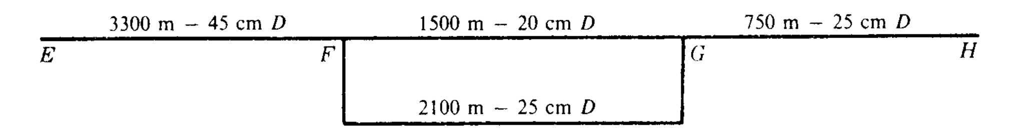


Fig. 8-6

Solución:

Suponiendo $Q = 90$ l/seg en $ABCD$, mediante el Diagrama B, con $Q_{100} = (100/120)90 = 75$ l/seg,

$$S_{40} = 1{,}6 \text{ m/1000 m}, \quad H_L = 1{,}6(2700/1000) = 4{,}3 \text{ m}$$
$$S_{30} = 6{,}5 \text{ m/1000 m}, \quad H_L = 6{,}5(1800/1000) = 11{,}7 \text{ m}$$
$$S_{25} = 15{,}0 \text{ m/1000 m}, \quad H_L = 15{,}0(900/1000) = 13{,}5 \text{ m}$$
$$\text{Para } Q = 90 \text{ l/seg, Pérd. Carga total} = 29{,}5 \text{ m}$$

Para hallar el porcentaje de un caudal cualquiera Q, que circula por cada una de las ramas del circuito FG, en el sistema $EFGH$, se supone una pérdida de carga entre F y G de 8,0 m. Entonces,

$$S_{20} = 8/1500 = 5{,}33 \text{ m/1000 m} \quad \text{y} \quad Q_{20} = 24{,}0 \text{ l/seg}, \quad (40{,}7\,\%)$$
$$S_{25} = 8/2100 = 3{,}81 \text{ m/1000 m} \quad \text{y} \quad Q_{25} = 35{,}0 \text{ l/seg}, \quad (59{,}3\,\%)$$
$$Q_{100} \text{ total} = 59{,}0 \text{ l/seg}, \quad (100{,}0\,\%)$$

Para dictaminar sobre la capacidad de cada uno de los sistemas pueden seguirse varios caminos. Mejor que utilizar tuberías equivalentes se podrían calcular las pérdidas de carga producidas por un caudal de 90 l/seg, por ejemplo, a través de cada uno de los sistemas. El sistema que dé lugar a una pérdida de carga menor sería el de mayor capacidad. O bien podría determinarse el caudal Q que circula por cada uno de los sistemas para la misma pérdida de carga. El sistema por el que circule un caudal mayor sería el de mayor capacidad. En el caso presente, se va a comparar la pérdida de carga de 29,5 m, que tiene lugar en $ABCD$, para $Q = 90$ l/seg ($Q_{100} = 75$ l/seg), con el valor de la pérdida de carga obtenido en el sistema $EFGH$, para el mismo caudal.

(*a*) Para $Q_{45} = 75$ l/seg, $S_{45} = 0{,}90$ m/1000 m, $(H_L)_{EF} = 3{,}0$ m.

(*b*) Para $Q_{20} = 40{,}7\,\% \times 75 = 30{,}5$ l/seg, $S_{20} = 8{,}7$ m/1000 m, $(H_L)_{FG} = 13{,}1$ m,

o para $Q_{25} = 59{,}3\,\% \times 75 = 44{,}5$ l/seg, $S_{25} = 6{,}2$ m/1000 m, $(H_L)_{FG} = 13{,}0$ m.

(*c*) Para $Q_{25} = 75$ l/seg, $S_{25} = 15{,}5$ m/1000 m, $(H_L)_{GH} = 11{,}6$ m.
Luego la pérdida de carga total de E a H = 27,7 m.

Por tanto, el sistema $EFGH$ tiene mayor capacidad.

S

I

14. En la Fig. 8-7 el caudal que sale del depósito A es de 430 l/seg. Determinar la potencia extraída por la turbina DE si la altura de presión en E es de $-3{,}0$ m. Dibujar las líneas de alturas piezométricas.

Solución:

El análisis del sistema ramificado debe concentrarse sobre el punto C. En primer lugar la suma de caudales que llegan a C ha de ser igual a la suma de caudales que salen de C. En segundo lugar, la elevación de la línea de alturas piezométricas en C es, por lo general, la clave de la solución.

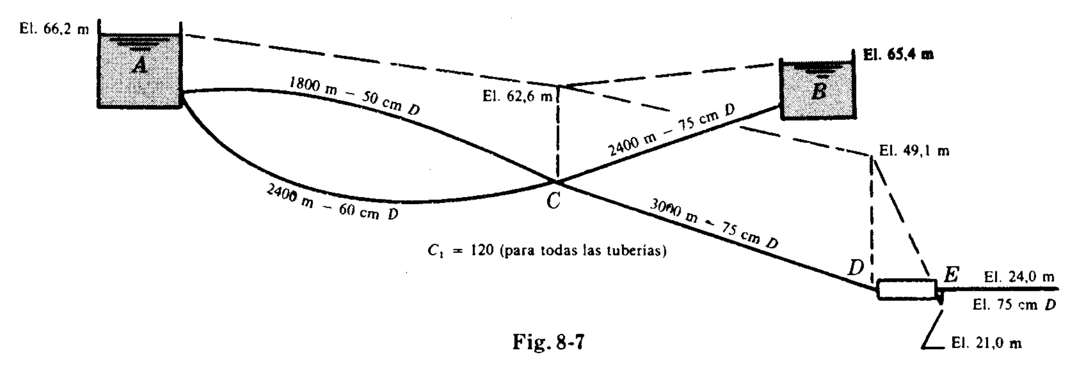


Fig. 8-7

Para calcular la altura de la línea de alturas piezométricas en C se supone que la pérdida de carga de A a C es de 7,0 m. Entonces,

$$S_{50} = 7/1800 = 3{,}90 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad Q_{50} = 216 \text{ l/seg}, \quad (42{,}6\,\%)$$
$$S_{60} = 7/2400 = 2{,}92 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad Q_{60} = 290 \text{ l/seg}, \quad (57{,}4\,\%)$$
$$Q \text{ total} = 506 \text{ l/seg}, \quad (100{,}0\,\%)$$

Aplicando estos porcentajes al caudal dado de 430 l/seg de A a C, teniendo en cuenta que para $C_1 = 100$, $Q = (100/120)430 = 358$ l/seg,

$$Q_{50} = 151 \text{ l/seg}, \quad S_{50} = 2{,}00 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad H_L = 3{,}6 \text{ m}$$
$$Q_{60} = 207 \text{ l/seg}, \quad S_{60} = 1{,}50 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad H_L = 3{,}6 \text{ m (comprobación)}$$

Así, la elevación de la línea de alturas piezométricas en $C = 66{,}2 - 3{,}6 = 62{,}6$ m. Con esta información, la línea de alturas piezométricas cae 2,8 m de B a C y el flujo circulará desde B hacia C. De aquí,

$$S_{75} = 2{,}8/2400 = 1{,}17 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad Q_{(100)} = 340 \text{ l/seg}, \quad Q_{(120)} = (120/100)340 = 408 \text{ l/seg}$$

Además, caudal que sale de C = caudal que entra en C

$$Q_{C-D} = 430 + 408 = 838 \text{ l/seg}$$

para $C_1 = 120$, y para $C_1 = 100$, $Q = 698$ l/seg.
Por tanto, $S_{75} = 4{,}5$ m/1000 m, $(H_L)_{C-D} = 13{,}5$ m, y la elevación de la línea de alturas piezométricas en $D = 62{,}6 - 13{,}5 = 49{,}1$ m.

$$\text{Potencia extraída (CV)} = \frac{1000(0{,}838)(49{,}1 - 21{,}0)}{75} = 314 \text{ CV}.$$

15. En la Fig. 8-8 la válvula F está parcialmente cerrada, lo que produce una pérdida de carga de 1,00 m cuando el caudal que circula a través de ella es de 28 l/seg. ¿Cuál es la longitud de la tubería de 25 cm que parte del depósito A?

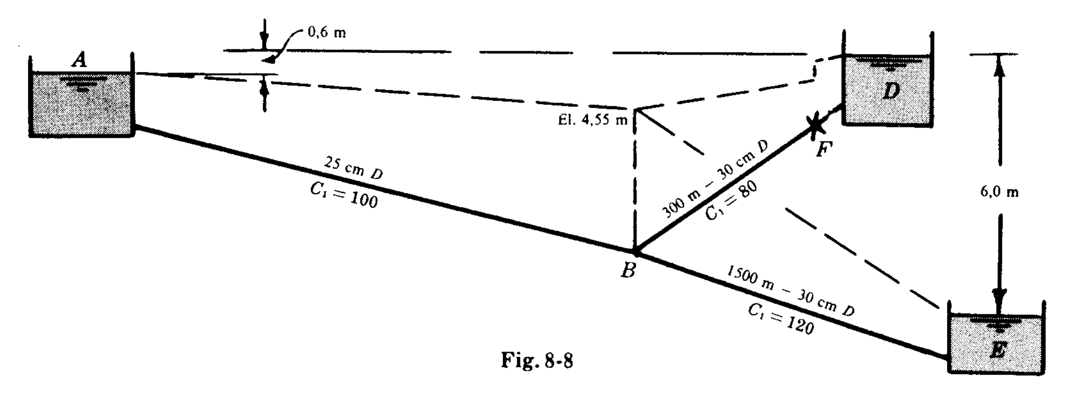


Fig. 8-8

Solución:

Para DB el caudal $Q = 28$ l/seg ($C_1 = 80$) y para $C_1 = 100$, $Q = (100/80)28 = 35{,}0$ l/seg, y $S_{30} = 1{,}5$ m/1000 m.

Pérdida total de carga de D a $B = 1{,}50(300/1000) + 1{,}00 = 1{,}45$ m, lo que da una elevación de la líne de alturas piezométricas en B de 4,55 m (tomando elevación en $E = 0$).

Para BE, $S_{30} = (4{,}55 - 0{,}0)/1500 = 3{,}03$ m/1000 m y $Q = 52$ l/seg ($C_1 = 100$), para $C_1 = 120$, $Q =$ 62,4 l/seg.

Para AB, el caudal $Q = 62{,}4 - 28{,}0 = 34{,}4$ l/seg y $S_{25} = 3{,}50$ m/1000 m (por el Diagrama B).

Por tanto, de $S = h/L$, $L = h/S = (0{,}85/3{,}50)1000 = 243$ m.

16. Se han de bombear 55 l/seg de agua a través de 1200 m de una tubería nueva de fundición hast un recipiente, cuya superficie libre está 36 m sobre el nivel del agua que se bombea. El coste anua del bombeo de 55 l/seg es de 16,40$ por m de carga contra la que se bombea, y el coste anual d la tubería es el 10 % de su precio inicial. Suponiendo que el precio de la tubería de fundición er el lugar de emplazamiento es de 140,00$ por tonelada, para el tipo B (50 m de carga) de tubería que tiene los siguientes pesos por metro de longitud: de 15 cm, 49,5 kg; de 20 cm, 71,0 kg; d 25 cm, 95,0 kg; de 30 cm, 122,0 kg y de 40 cm, 186,0 kg. Determinar el diámetro de tubería má económico para esta instalación.

Solución:

Se hacen con detalle los cálculos para la tubería de 30 cm y los resultados para todas las tuberías se resumen en la tabla que se da más abajo. La pérdida de carga en la tubería de 30 cm, por el Diagrama B, teniendo en cuenta que para $C_1 = 100$, $Q = (100/130)55 = 42{,}3$ l/seg, será 2,10 m/1000 m.

De aquí, altura total contra la que se bombea $= 36 + 1200(2{,}10/10000) = 38{,}5$ m.

Coste de bombeo = 38,5 × 16,40$ = 631$ por año
Coste de la tubería a pie de obra = 140$ × 1200 × 122/1000 = 20.500$
Coste anual de la tubería = 10 % × 20.500$ = 2050$

Tabulando estos resultados para su comparación con los costes de las tuberías de los otros diámetros considerados, se obtiene la siguiente tabla:

D cm	S m/1000 m	Pérd. Carga en m	Altura total de bombeo = 36 + H_L	Coste anual para 55 l/seg Bombeo	+ Coste tubería	= Total
15	65,0	78,0	114,0 m	1870 $	830 $	2700 $
20	16,2	19,5	55,5 m	910	1190	2100
25	5,3	6,4	42,4 m	694	1600	2294
30	2,1	2,5	38,5 m	631	2050	2681
40	0,6	0,7	36,7 m	602	3130	3732

El diámetro más económico es el de 20 cm.

17. Cuando las superficies libres de los depósitos que se muestran en la Fig. 8-9(a) se mantienen a una elevación constante, ¿qué caudales tienen lugar?

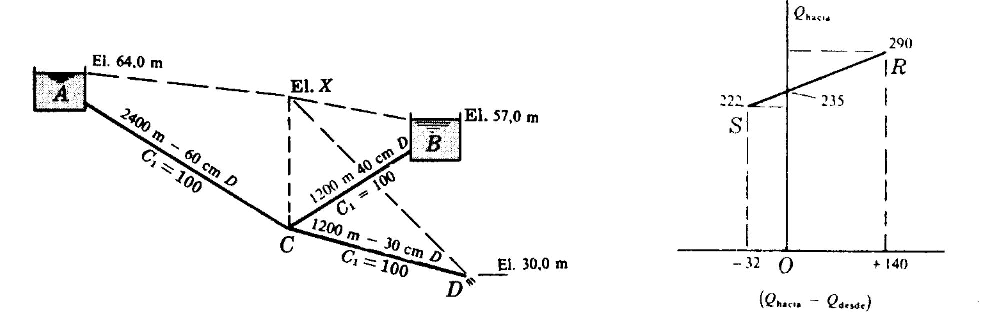


Fig. 8-9(a)

Fig. 8-9(b)

Solución:

Como la elevación de la línea de alturas piezométricas en C no puede determinarse, por ser desconocidos todos los caudales, el problema se resolverá por tanteos. En el primero es conveniente elegir como altura piezométrica en C, 57 m. Con esto, el caudal que sale o entra en el recipiente B será nulo, lo que reduce el número de cálculos.

Para una altura piezométrica en C = 57,0 m,

$$S_{60} = (64 - 57)/2400 = 2{,}91 \text{ m}/1000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q = 290 \text{ l/seg hacia } C$$
$$S_{30} = (57 - 30)/1200 = 22{,}5 \text{ m}/1000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q = 150 \text{ l/seg desde } C$$

De los valores de estos caudales se infiere que la altura piezométrica en C debe ser mayor, de forma que se reduzca el caudal desde A, aumente el que va a D y circule cierto caudal hacia B. Con el fin de «horquillar» la verdadera altura piezométrica de C, se supone ahora igual a 60 m. Así, para una elevación en C = 60,0 m,

$$S_{60} = (64 - 60)/2400 = 1{,}67 \text{ m}/1000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q = 222 \text{ l/seg hacia } C$$
$$S_{40} = (60 - 57)/1200 = 2{,}50 \text{ m}/1000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q = 98 \text{ l/seg desde } C$$
$$S_{30} = (60 - 30)/1200 = 25{,}0 \text{ m}/1000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q = 156 \text{ l/seg desde } C$$

El caudal que sale de C es de 254 l/seg, mientras que el caudal que llega a C es de 222 l/seg. Mediante la Fig. 8-9(b) puede obtenerse una tercera aproximación mucho más cercana a la verdadera, uniendo mediante una recta los puntos R y S. La recta así dibujada corta al eje vertical, trazado por $(Q_{\text{hacia}} - Q_{\text{desde}}) = 0$, en Q_{hacia} = 235 l/seg (apreciado por el dibujo a escala). Como, además, los valores representados no varían en realidad linealmente, puede utilizarse para el caudal que va hacia C un valor ligeramente mayor, por ejemplo, 245 l/seg.

Para Q = 245 l/seg (hacia C), S_{60} = 2,00 m/1000 m y $(H_L)_{A-C}$ = 2,00 × 2400/1000 = 4,8 m y la altura piezométrica en C = (64,0 − 4,8) = 59,2 m. De aquí,

$$S_{40} = 2{,}20/1200 = 1{,}83 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad Q = 80 \text{ l/seg desde } C$$
$$S_{30} = 29{,}2/1200 = 24{,}30 \text{ m}/1000 \text{ m}, \quad Q = 155 \text{ l/seg desde } C$$
$$Q \text{ total desde } C = 235 \text{ l/seg}$$

Estos dos caudales son lo suficiente parecidos para no requerir cálculos posteriores. (Para una altura piezométrica en C de 59,5 m, da para los caudales que entran y salen de C valores iguales aproximadamente a 238 l/seg.)

. Desarrollar la expresión empleada en el estudio de los caudales en redes de tuberías.

Solución:

El método de cálculo, desarrollado por el profesor Hardy Cross, consiste en suponer unos caudales en todas las ramas de la red y a continuación hacer un balance de las pérdidas de carga calculadas. En el lazo o circuito único, mostrado en la Fig. 8-10, para que los caudales en cada rama del lazo sean los correctos se habrá de verificar

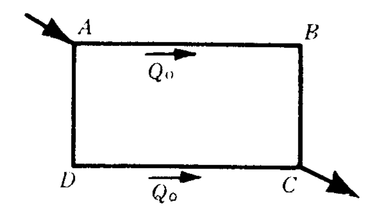


Fig. 8-10

$$(H_L)_{ABC} = (H_L)_{ADC} \quad \text{o} \quad (H_L)_{ABC} - (H_L)_{ADC} = 0 \qquad (1)$$

Para aplicar esta expresión, la pérdida de carga en función del caudal ha de ponerse en la forma $H_L = kQ^n$. En el caso de utilizar la fórmula de Hazen-Williams, la expresión anterior toma la forma $H_L = kQ^{1,85}$.

Como se suponen unos caudales Q_o, el caudal verdadero Q en una tubería cualquiera de la red puede expresarse $Q = Q_o + \Delta$, donde Δ es la corrección que ha de aplicarse a Q_o. Entonces, mediante el desarrollo del binomio,

$$kQ^{1,85} = k(Q_o + \Delta)^{1,85} = k(Q_o^{1,85} + 1{,}85\, Q_o^{1,85-1}\, \Delta + \cdots)$$

Se desprecian los términos a partir del segundo por ser pequeño Δ comparado con Q_o.

Para el lazo o circuito mostrado en la figura, al sustituir en la ecuación (1) se obtiene

$$k(Q_o^{1,85} + 1{,}85\, Q_o^{0,85}\, \Delta) - k(Q_o'^{1,85} + 1{,}85\, Q_o^{0,85}\, \Delta) = 0$$
$$k(Q_o^{1,85} - Q_o'^{1,85}) + 1{,}85k(Q_o^{0,85} - Q_o'^{0,85})\Delta = 0$$

Despejando Δ,
$$\Delta = -\frac{k(Q_o^{1,85} - Q_o^{1,85})}{1{,}85k(Q_o^{0,85} - Q_o'^{0,85})}$$

En general, para un circuito más complicado, se tiene

$$\Delta = -\frac{\Sigma\, kQ_o^{1,85}}{1{,}85\, \Sigma\, kQ_o^{0,85}} \qquad (3)$$

Pero $kQ_o^{1,85} = H_L$ y $kQ_o^{0,85} = H_L/Q_o$. Por tanto,

$$\Delta = -\frac{\Sigma\,(H_L)}{1{,}85\, \Sigma\,(H_L/Q_o)} \quad \text{para cada lazo de la red} \qquad (4)$$

Al utilizar la fórmula (*4*) debe ponerse cuidado en el signo del numerador. La expresión (*1*) pone de manifiesto que los caudales que coinciden con el giro de las agujas de un reloj producen pérdidas de carga en el mismo sentido, y que los caudales no coincidentes con el giro de las agujas de un reloj producen caídas de carga también en sentido contrario. Es decir, el signo menos se asigna a todas las magnitudes hidráulicas cuyo sentido sea contrario al de las agujas de un reloj, o, lo que es lo mismo, al caudal Q y a las pérdidas de carga H_L. Para evitar errores en los cálculos debe observarse siempre este convenio de signos. Por otra parte, el denominador de (*4*) tiene siempre signo positivo.

En los dos problemas siguientes se ilustra el procedimiento de aplicación de la ecuación (*4*)

19. El sistema de tuberías en paralelo, mostrado en la Fig. 8-11, es el mismo que aparece como parte del sistema del Problema 11. Determinar, para $Q = 456$ l/seg (caudal total), los caudales en las dos ramas del circuito utilizando el método de Hardy Cross.

Solución:

Se supone que los caudales Q_{30} y Q_{40} son iguales, respectivamente, a 150 l/seg y 306 l/seg. Los cálculos se realizan en la tabla que sigue (obsérvese que se ha puesto −306 l/seg), procediendo así: se calculan los valores de S mediante el Diagrama B, o por cualquier otro procedimiento, luego $H_L = S \times L$ y a continuación se determinan H_L/Q_o. Se notará que cuanto mayor sea ΣH_L más alejados de los correctos estarán los caudales Q. (Los valores de Q se han elegido deliberadamente distintos de los correctos para que den lugar a valores grandes de $\Sigma\, H_L$ y así ilustrar el procedimiento.)

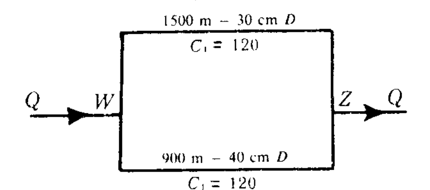


Fig. 8-11

D cm	L m	Q_0 supuesto l/seg	S m/1000 m	H_L, m	H_L/Q_0	Δ	Q_1
30	1500	150	17,0	25,5	0,170	−27,8	122,2
40	900	−306	−16,0	−14,4	0,046	−27,8	−333,8
		Σ = 456		Σ = +11,1	0,216		456,0

$$\Delta = -\frac{\Sigma\, H_L}{1{,}85\, \Sigma\,(H_L/Q)} = -\frac{+11{,}1}{1{,}85(0{,}216)} = -27{,}8 \text{ l/seg}$$

Entonces, los valores de Q_1 serán (150,0 − 27,8) = 122,2 l/seg y (−306,0 − 27,8) = −333,8 l/seg. Repitiendo, de nuevo el proceso de cálculo

S	H_L	H_L/Q_1	Δ	Q_2
11,0	16,5	0,135	+3,2	125,4
−19,0	−17,1	0,051	+3,2	330,6
	Σ = −0,6	0,186		456,0

No es necesario hacer una nueva aproximación ya que en el Diagrama B no puede conseguirse una mayor precisión de 3,0 l/seg aproximadamente. Teóricamente, ΣH_L debería ser igual a cero, pero esta condición se obtiene muy raramente.

Se observará que en el Problema 11 el caudal que fluye por la tubería de 30 cm era el 26,4 % de 456 l/seg, es decir, 120,4 l/seg, lo que cònstituye una comprobación satisfactoria.

20. El agua fluye a través del sistema de tuberías mostrado en la Fig. 8-12, en el que se conocen ciertos caudales, como se indica en la figura. En el punto A, la elevación es de 60,0 m y la altura de presión de 45,0 m. La elevación en I es de 30,0 m. Determinar (a) los caudales a través de la red de tuberías y (b) la altura de presión en I. (Utilizar $C_1 = 100$).

Solución:

(a) El método de cálculo puede resumirse como sigue:

(1) Se suponen una serie de caudales iniciales, procediendo circuito por circuito —en este caso los lazos o circuitos son el I, II, III y IV—. Hay que poner cuidado en que los caudales *que llegan* a cada nudo sean igual en valor a la suma de los caudales *salientes* del mismo (principio de continuidad).

(2) Para cada lazo se calcula la pérdida de carga en cada una de las tuberías del circuito (analíticamente, por el Diagrama B o bien mediante una regla de cálculo hidráulica).

(3) Se suman las pérdidas de carga en cada circuito en el sentido de las agujas de un reloj, teniendo en cuenta la colocación correcta de los signos (si la suma de las pérdidas de carga fuera nula, los caudales Q_1 supuestos serían los correctos).

(4) Se suman los valores de H_L/Q_1, calculando a continuación el término Δ de corrección de los caudales en cada lazo.

(5) Se corrige el caudal en cada una de las tuberías en Δ, con lo que se aumenta o disminuye en esa cantidad cada caudal Q supuesto. Para los casos en que una tubería pertenece a dos circuitos, debe aplicarse como corrección al caudal supuesto en esta tubería la diferencia entre los dos Δ (véase la aplicación siguiente).

(6) Se continúa de forma análoga hasta que los valores de los Δ sean despreciables.

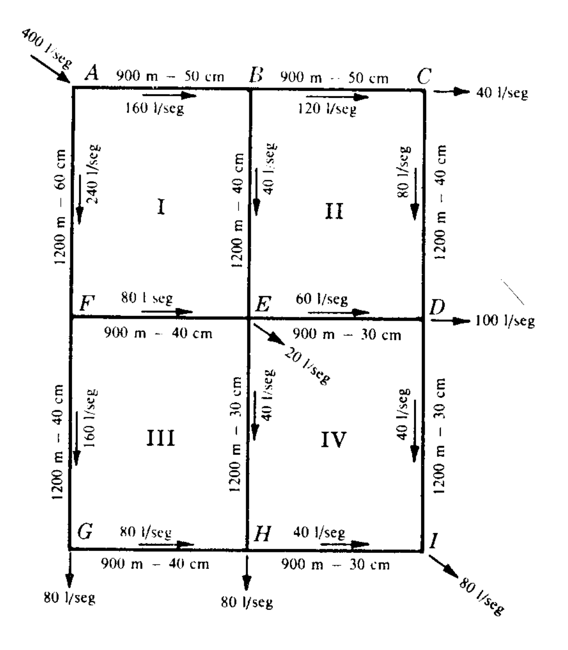


Fig. 8-12

Tramo	D, cm	L, m	Q_1, l/seg (supuesto)	S m/1000 m	H_L, m	$\frac{H_L}{Q_1}$	Δ	Q_2
AB	50	900	160	2,20	1,980	0,0124	+13,3	173,3
BE	40	1200	40	0,50	0,600	0,0150	+13,3 − (5,3) = +8,0	48,0
EF	40	900	−80	−1,90	−1,710	0,0214	+13,3 − (24,2) = −10,9	−90,9
FA	60	1200	−240	−1,92	−2,304	0,0096	+13,3	−226,7
					Σ = −1,434	0,0584		
BC	50	900	120	1,30	1,170	0,0098	+5,3	125,3
CD	40	1200	80	1,90	2,160	0,0270	+5,3	85,3
DE	30	900	−60	−4,30	−3,870	0,0645	+5,3 − (−4,9) = +10,2	−49,8
EB	40	1200	−40	−0,50	−0,600	0,0150	+5,3 − (13,3) = −8,0	−48,0
					Σ = −1,140	0,1163		
FE	40	900	80	1,90	1,710	0,0214	+24,2 − (13,3) = +10,9	90,9
EH	30	1200	40	2,00	2,400	0,0600	+24,2 − (−4,9) = +29,1	69,1
HG	40	900	−80	−1,80	−1,620	0,0203	+24,2	−55,8
GF	40	1200	−160	−6,50	−9,800	0,0613	+24,2	−135,8
					Σ = −7,310	0,1630		
ED	30	900	60	4,30	3,870	0,0645	−4,9 − (5,3) = −10,2	49,8
DI	30	1200	40	2,00	2,400	0,0600	−4,9	35,1
IH	30	900	−40	−2,00	−1,800	0,0450	−4,9	−44,9
HE	30	1200	−40	−2,00	−2,400	0,0600	−4,9 − (24,2) = −29,1	−69,1
					Σ = +2,070	0,2295		

Los pasos de los cálculos resumidos se han desarrollado en forma tabular, utilizando el Diagrama *B* para obtener las pérdidas de cargas en metros por mil metros (S). Los valores de H_L se obtienen por multiplicación de S por la longitud de la tubería que se considere. También se han tabulado los valores del cociente de H_L por el Q correspondiente.

Los términos Δ se calculan [expresión (*4*), Problema 18] como sigue:

$$\Delta_{I} = \frac{-(-1{,}434)}{1{,}85(0{,}0584)} = +13{,}3 \qquad \Delta_{III} = \frac{-(-7{,}310)}{1{,}85(0{,}1630)} = +24{,}2$$

$$\Delta_{II} = \frac{-(-1{,}140)}{1{,}85(0{,}1163)} = +5{,}3 \qquad \Delta_{IV} = \frac{-(+2{,}070)}{1{,}85(0{,}2295)} = -4{,}9$$

Para la tubería *EF* y el lazo I, el término Δ neto es $(\Delta_I - \Delta_{III})$, es decir, $[+13{,}3 - (+24{,}2)] = -10{,}9$. Se observa que el Δ para el circuito I se combina con el Δ del circuito III ya que la tubería *EF* pertenece a los dos lazos. En forma análoga, la tubería *EF* como perteneciente al lazo III, el término Δ neto es $(\Delta_{III} - \Delta_I)$, es decir, $[+24{,}2 - (+13{,}3)] = +10{,}9$. Obsérvese que los valores Δ netos tienen el mismo valor absoluto, pero *signo opuesto*. Esto se comprende fácilmente ya que el flujo en la tubería *EF* es contrario al de las agujas de un reloj en el circuito I, mientras que en el lazo III es del sentido de las agujas de un reloj.

Los valores de los Q_2 para la segunda aproximación se calculan así:

$$Q_{AB} = (160{,}0 + 13{,}3) = 173{,}3 \text{ l/seg}$$

mientras que

$$Q_{EF} = (-80{,}0 - 10{,}9) = -90{,}9 \text{ l/seg} \quad \text{y} \quad Q_{FA} = (-240{,}0 + 13{,}3) = -226{,}7 \text{ l/seg}$$

El método consiste en continuar las aproximaciones hasta que los términos Δ sean lo suficientemente pequeños, de acuerdo con la precisión que se busque, recordando siempre que los valores de C_1 tienen una precisión limitada. En referencia con la columna de la derecha de la última de las tablas, se hace notar que dan los valores finales de Q en las diversas tuberías.

Como las sumas de las pérdidas de carga son pequeñas para todos los circuitos pueden considerarse los valores de los caudales que figuran en la columna de la derecha de la última tabla como los valores correctos, dentro de la precisión esperada. El lector puede practicar, calculando los nuevos valores de Δ, a continuación los Q_5, etc.

(*b*) La altura piezométrica en *A* es (60,0 + 45,0) = 105,0 m. La pérdida de carga de *A* a *I* puede calcularse por cualquiera de las rutas que unen *A* con *I*, sumando las pérdidas de la forma usual, es decir, en la dirección

Tramo	Q_2	S	H_L	H_L/Q	Δ
AB	173,3	2,70	2,430	0,0140	+7,2
BE	48,0	0,70	0,840	0,0175	+7,2 − (−1,2) = +8,4
EF	−90,9	−2,30	−2,070	0,0228	+7,2 − (−6,4) = +13,6
FA	−226,7	−1,70	−2,040	0,0090	+7,2
			Σ = −0,840	0,0633	
BC	125,3	1,40	1,260	0,0101	−1,2
CD	85,3	2,10	2,520	0,0295	−1,2
DE	−49,8	−3,00	−2,700	0,0542	−1,2 − 8,9 = −10,1
EB	−48,0	−0,70	−0,840	0,0175	−1,2 − 7,2 = −8,4
			Σ = +0,240	0,1113	
FE	90,9	2,30	2,070	0,0228	−6,4 − 7,2 = −13,6
EH	69,1	5,50	6,600	0,0955	−6,4 − 8,9 = −15,3
HG	−55,8	−0,91	−0,819	0,0147	−6,4
GF	−135,8	−4,80	−5,760	0,0424	−6,4
			Σ = +2,091	0,1754	
ED	49,8	3,00	2,700	0,0542	+8,9 − (−1,2) = +10,1
DI	35,1	1,61	1,932	0,0550	+8,9
IH	−44,9	−2,50	−2,250	0,0501	+8,9
HE	−69,1	−5,50	−6,600	0,0955	+8,9 − (−6,4) = +15,3
			Σ = −4,218	0,2548	

del flujo. Utilizando el camino *ABEHI* se obtiene $(H_L)_{A\text{-}I}$ = (2,520 + 1,116 + 4,200 + 1,440) = 9,276 m. Como comprobación, al utilizar la ruta *ABEDI*, H_L = (2,520 + 1,116 + 3,780 + 3,000) = 10,416 m. Utilizando el valor 9,8 m, la altura piezométrica en *I* será = (105,0 − 9,8) = 95,2 m. De aquí, la altura de presión en *I* = (95,2 − 30,0) = 65,2 m.

Tramo	Q_3	S	H_L	H_L/Q	Δ	Q_4
AB	180,5	2,80	2,520	0,0140	−1,1	179,4
BE	56,4	0,93	1,116	0,0198	−1,1 − 4,9 = −6,0	50,4
EF	−77,3	−1,76	−1,584	0,0205	−1,1 − 4,8 = −5,9	−83,2
FA	−219,5	−1,60	−1,920	0,0087	−1,1	−220,6
			Σ = +0,132	0,0630		
BC	124,1	1,41	1,269	0,0102	+4,9	129,0
CD	84,1	2,10	2,520	0,0300	+4,9	89,0
DE	−59,9	−4,20	−3,780	0,0631	+4,9 − (−2,5) = +7,4	−52,5
EB	−56,4	−0,93	−1,116	0,0198	+4,9 − (−1,1) = +6,0	−50,4
			Σ = −1,107	0,1231		
FE	77,3	1,76	1,584	0,0205	+4,8 − (−1,1) = +5,9	83,2
EH	53,8	3,50	4,200	0,0781	+4,8 − (−2,5) = +7,3	61,1
HG	−62,2	−1,20	−1,080	0,0174	+4,8	−57,4
GF	−142,2	−5,10	−6,120	0,0430	+4,8	−137,4
			Σ = −1,416	0,1590		
ED	59,9	4,20	3,780	0,0631	−2,5 − 4,9 = −7,4	52,5
DI	44,0	2,50	3,000	0,0682	−2,5	41,5
IH	−35,1	−1,60	−1,440	0,0410	−2,5	−37,6
HE	−53,8	−3,50	−4,200	0,0781	−2,5 − 4,8 = −7,3	−61,1
			Σ = +1,140	0,2504		

Problemas propuestos

21 Mediante el Diagrama *B*, calcular el caudal esperado en una tubería de 40 cm si la línea de alturas piezométricas cae 1,10 m en 1 kilómetro. (Utilizar C_1 = 100.) *Sol.* 62 l/seg

22 Si la tubería del Problema 21 fuera de fundición nueva, ¿cuál sería el caudal? *Sol.* 80,6 l/seg

23 En el ensayo de una tubería de fundición de 50 cm, el caudal en flujo permanente fue de 175 l/seg y la línea de alturas piezométricas cayó 1,20 m en un tramo de tubería de 600 m. ¿Cuál es el valor de C_1? *Sol.* 116

24 ¿Qué diámetro debe de tener una tubería nueva de fundición para transportar, en régimen permanente, 550 l/seg de agua a través de una longitud de 1800 m con una pérdida de carga de 9 m? *Sol.* 62 cm

25 Se quieren transportar 520 l/seg a través de una tubería de fundición vieja (C_1 = 100) con una pendiente de la línea de alturas piezométricas de 1,0 m/1000 m. Teóricamente, ¿qué número de tuberías de 40 cm serán necesarias?, ¿y de 50 cm?, ¿y de 60 cm?, ¿y de 90 cm? *Sol.* 8,97, 5,07, 3,06, 1

26 Comprobar las relaciones del Problema 25 cuando se transportan 520 l/seg para una pendiente cualquiera de la línea de alturas piezométricas.

27 ¿Qué pérdida de carga producirá en una tubería nueva de fundición de 40 cm un caudal que, en una tubería de fundición de 50 cm, también nueva, da lugar a una caída de la línea de alturas piezométricas de 1,0 m/1000 m? *Sol.* 2,90 m/1000 m

28. La tubería compuesta (sistema de tuberías en serie) *ABCD* está constituida por 6000 m de tubería de 40 cr 3000 m de 30 cm y 1500 m de 20 cm (C_1 = 100). (*a*) Calcular el caudal cuando la pérdida de carga entre *A* y es de 60 m. (*b*) ¿Qué diámetro ha de tener una tubería de 1500 m de longitud, colocada en paralelo con la exi tente de 20 cm y con nudos en *C* y *D*, para que la nueva sección *C-D* sea equivalente a la sección *ABC* (utiliz: C_1 = 100). (*c*) Si entre los puntos *C* y *D* se pone en paralelo con la tubería de 20 cm *CD* otra de 30 cm 2400 m de longitud, ¿cuál será la pérdida de carga total entre *A* y *D* para Q = 80 l/seg?
Sol. 58 l/seg, 16,5 cm, 42,8 m

29. Un sistema de tuberías en serie *ABCD* está formado por una tubería de 50 cm y 3000 m de longitud, una c 40 cm y 2400 m y otra de 30 cm y *L* m (C_1 = 120). ¿Qué longitud *L* hará que el sistema *ABCD* sea equivalente una tubería de 37,5 cm de diámetro, 4900 m de longitud y C_1 = 100? Si la longitud de la tubería de 30 cm qu va de *C* a *D* fuera de 900 m, ¿qué caudal circulará para una pérdida de carga entre *A* y *D* de 40 m?
Sol. 1320 m, 180 l/seg

30. Hallar la longitud de una tubería de 20 cm equivalente al sistema de tuberías en serie constituido por una tuberi de 25 cm y 900 m de longitud, una de 20 cm y 450 m y otra de 15 cm y 150 m de longitud (para todas las tu berías C_1 = 120). *Sol.* 1320 m

31. Los depósitos *A* y *D* están conectados por el siguiente sistema de tuberías en serie: la tubería (*A-B*) de 50 cı y 2400 m de longitud, la (*B-C*) de 40 cm y 1800 m y la (*C-D*) de diámetro desconocido y 600 m de longitud. L diferencia de elevación entre las superficies libres de los depósitos es de 25 m. (*a*) Determinar el diámetro de l tubería *CD* para que el caudal que circula entre *A* y *D* sea de 180 l/seg si C_1 = 120 para todas las tubería (*b*) ¿Qué caudal circulará entre *A* y *D* si la tubería *CD* es de 35 cm de diámetro y si, además, conectada entı *B* y *D* existe otra tubería en paralelo con *BCD* de 2700 m de longitud y 30 cm de diámetro?
Sol. 32 cm, 258 l/seg

32. Un sistema de tuberías (C_1 = 120) está constituido por una tubería de 75 cm y 3000 m (*AB*), otra de 60 cm 2400 m (*BC*) y de *C* a *D* dos tuberías en paralelo de 40 cm y 1800 m de longitud cada una. (*a*) Para u caudal entre *A* y *D* de 360 l/seg, ¿cuál es la pérdida de carga? (*b*) Si se cierra la llave en una de las tubería de 40 cm, ¿qué variación se producirá en la pérdida de carga para el mismo caudal anterior?
Sol. 21,2 m, variación = 31,1 m

33. En la Fig. 8-13, para una altura de presión en *D* igual a 30 m (*a*) calcular la potencia comunicada a la turbin *DE*. (*b*) Si se instala la tubería dibujada a trazos en la figura (60 cm y 900 m de longitud), ¿qué potencia podr: comunicarse a la turbina si el caudal es de 540 l/seg? (C_1 = 120). *Sol.* 144 CV, 207 CV

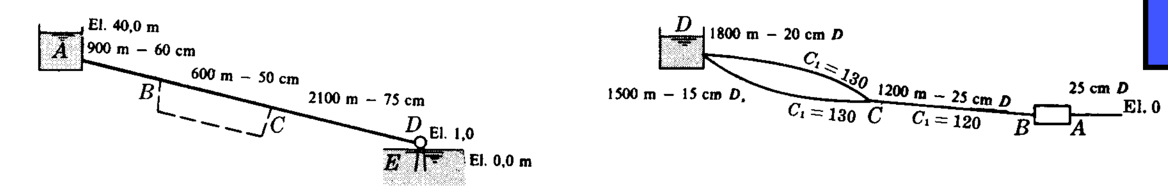


Fig. 8-13

Fig. 8-14

34. En la Fig. 8-14, cuando las alturas de presión en *A* y *B* son de 3,0 m y 90,0 m, respectivamente, la bomb: *AB* está comunicando al sistema una potencia de 100 CV. ¿Qué elevación puede mantenerse en el depósito *D*
Sol. 46,8 m

35. En el sistema de tuberías mostrado en la Fig. 8-15 es necesario transportar 600 l/seg hasta *D*, con una presióı en este punto de 2,80 kg/cm². Determinar la presión en *A* en kg/cm². *Sol.* 3,40 kg/cm²

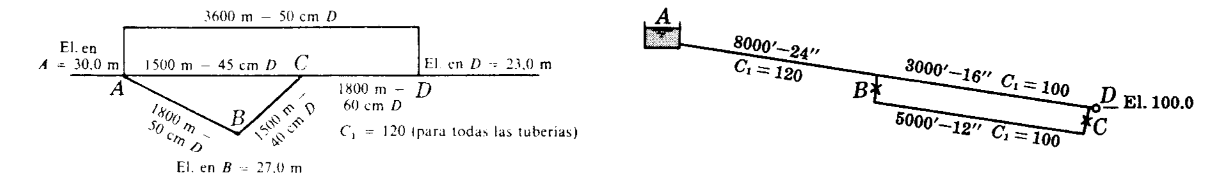


Fig. 8-15

Fig. 8-16

36. (*a*) En la Fig. 8-16, la presión en *D* es de 2,10 kg/cm², cuando el caudal suministrado desde el depósito *A* es dı 250 l/seg. Las válvulas *B* y *C* están cerradas. Determinar la elevación de la superficie libre del depósito *A*. (*b*) E caudal y la presión dados en (*a*) no se cambian, pero la válvula *C* está totalmente abierta y la *B* solo parcialmen

te abierta. Si la nueva elevación del depósito A es de 64 m, ¿cuál es la pérdida de carga a través de la válvula B? *Sol.* El. 68 m, 5,8 m

37. Determinar el caudal que circula a través de cada una de las tuberías del sistema mostrado en la Figura 8-17. *Sol.* 190 l/seg, 140 l/seg, 50 l/seg

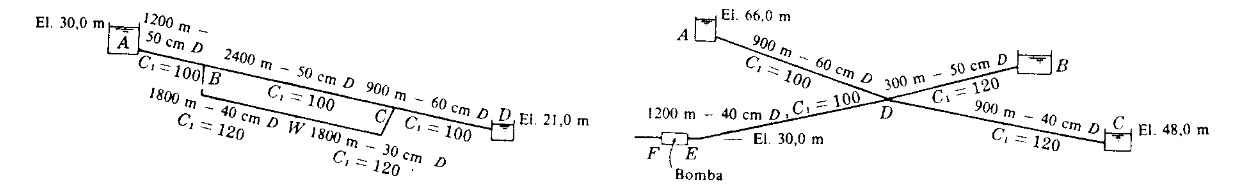


Fig. 8-17

Fig. 8-18

38. La bomba XY, a una elevación de 6,0 m, hace circular 120 l/seg a través de una tubería nueva de fundición YW de 40 cm y 1800 m de longitud. La presión de descarga en Y es de 2,70 kg/cm^2. En el extremo W de la tubería de 40 cm están conectadas dos tuberías, una de 30 cm y 750 m de longitud ($C_1 = 100$), que termina en el depósito A, a una elevación de 30,0 m, y otra de 25 cm y 600 m ($C_1 = 130$), que termina en el depósito B. Determinar la elevación de B y el caudal que llega o sale de cada uno de los depósitos.
Sol. El. 7,1 m, 35 l/seg, 155 l/seg

39. En la Fig. 8-18, cuando $Q_{ED} = Q_{DC} = 280$ l/seg, determinar la presión manométrica en E, en kg/cm^2, y la elevación del depósito B. *Sol.* 5,26 kg/cm^2, 53,9 m

40. En el sistema mostrado en la Fig. 8-19, a través de la tubería de 90 cm, circulan 900 l/seg. Determinar la potencia en CV de la bomba XA (rendimiento igual al 78,5 %) que da lugar a los caudales y elevaciones mostrados en la figura si la altura de presión en X es nula. (Dibujar las líneas de alturas piezométricas.) *Sol.* 272 CV

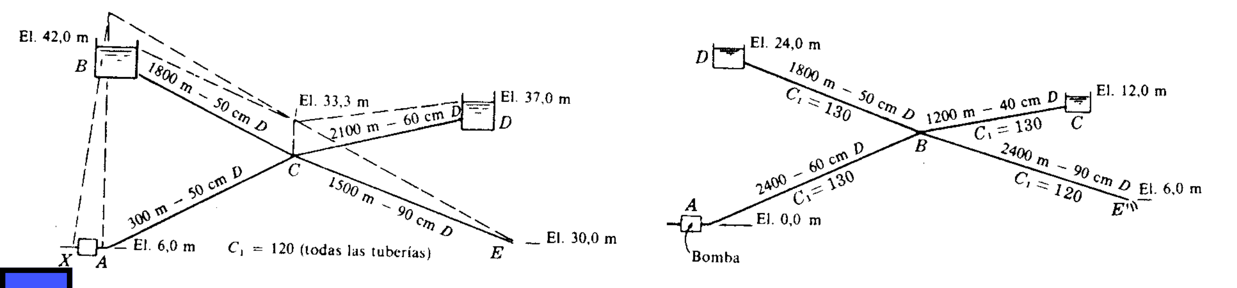


Fig. 8-19

Fig. 8-20

41. ¿Qué caudal debe suministrar la bomba de la Fig. 8-20 cuando el caudal a través de la tubería de 90 cm es de 1200 l/seg y cuál es la altura de presión en A? *Sol.* 984 l/seg, 56,6 m

42. La altura de presión en A, sección de descarga de la bomba AB, es 36,0 m debido a la acción de dicha bomba, de una potencia de 140 CV (véase Fig. 8-21). La pérdida de carga en la válvula Z es de 3,0 m. Determinar todos los caudales y la elevación del depósito T. Dibujar las líneas de alturas piezométricas.
Sol. $Q_{AW} = Q_{SB} = 360$ l/seg, $Q_{SR} = 64$ l/seg, $Q_{TS} = 424$ l/seg, El. en T 27,0 m

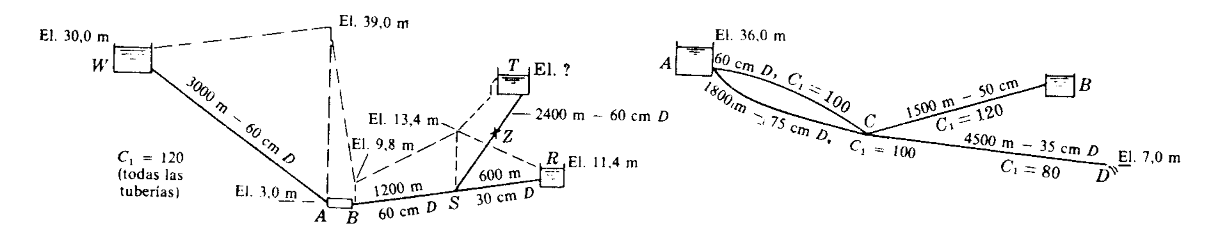


Fig. 8-21

Fig. 8-22

43. El caudal total que sale de A, véase Fig. 8-22, es de 380 l/seg y el caudal que llega a B es de 295 l/seg. Determinar (*a*) la elevación de B y (*b*) la longitud de la tubería de 60 cm. *Sol.* 26,5 m, 7700 m

44. ¿Cuáles son los caudales que llegan o parten de cada uno de los depósitos de la Figura 8-23?
Sol. $Q_{AE} = 140$ l/seg, $Q_{BE} = 3$ l/seg, $Q_{EC} = 79$ l/seg, $Q_{ED} = 64$ l/seg

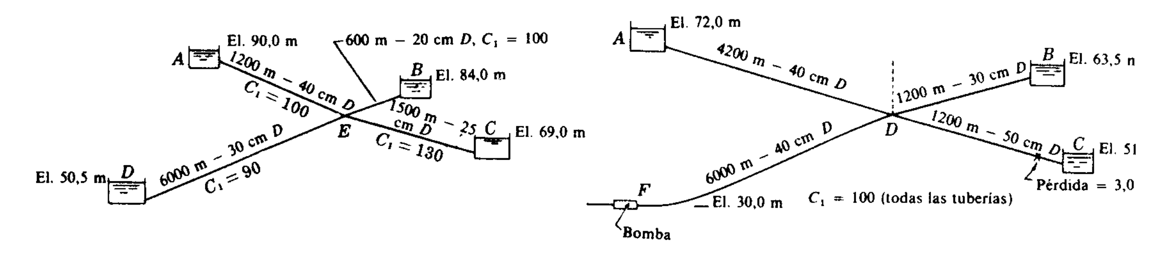


Fig. 8-23 **Fig. 8-24**

45. Si la altura de presión en F es de 45,0 m, determinar los caudales que circulan a través del sistema mostr en la Figura 8-24. *Sol.* $Q_{FD} = 98$ l/seg, $Q_{AD} = 104$ l/seg, $Q_{BD} = 48$ l/seg, $Q_{DC} = 250$ l/seg

46. Si en el sistema de tuberías del Problema 9, $Q = 200$ l/seg, ¿qué caudal circula por cada rama y cuál es la dida de carga? Utilizar el método de Hardy Cross.
Sol. 28,0 m, $Q_{30} = 82$ l/seg, $Q_{20} = 53$ l/seg, $Q_{25} = 65$ l/seg

47. Resolver el Problema 35 mediante el método de Hardy Cross.

48. Se están estudiando tres sistemas de tuberías A, B y C. ¿Cuál es el sistema de mayor capacidad? Utilizar C_1 = para todas las tuberías del dibujo. *Sol.* B

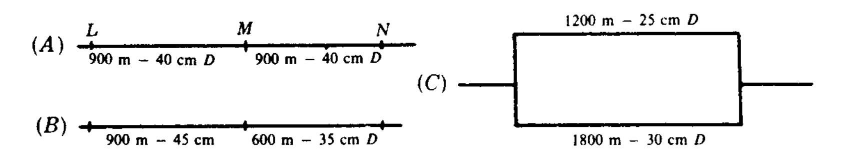


Fig. 8-25

49. En el problema precedente, ¿qué diámetro debe tener una tubería de 900 m de longitud para que puesta en ralelo entre M y N, en el sistema A (de manera que se forme un lazo o circuito de M a N), haga que el siste A modificado tenga el 50 % más de capacidad que el sistema C? *Sol.* 38 cm

S

I

Capítulo 9

Medidas en flujo de fluidos

INTRODUCCION

Para medidas en el flujo de fluidos se emplean en la práctica de ingeniería numerosos dispositivos. Las medidas de velocidad se realizan con tubos de Pitot, medidores de corriente y anemómetros rotativos y de hilo caliente. En estudios de modelos se utilizan con frecuencia métodos fotográficos. Las medidas se llevan a cabo mediante orificios, tubos, toberas o boquillas, venturímetros y canales Venturi, medidores de codo, vertederos de aforo, numerosas modificaciones de los precedentes y varios medidores patentados. A fin de aplicar correctamente estos aparatos, es imperativo emplear la ecuación de Bernoulli y conocer las características y coeficientes de cada aparato. En ausencia de valores seguros de estos coeficientes, un aparato debe calibrarse para las condiciones de operación en que va a emplearse.

Las fórmulas desarrolladas para fluidos incompresibles pueden aplicarse a fluidos compresibles en donde la presión diferencial es pequeña en comparación con la presión total. En muchos casos prácticos se dan tales presiones diferenciales pequeñas. Sin embargo, cuando se debe considerar la compresibidad, se desarrollarán y se emplearán fórmulas especiales (véanse Problemas 5-8 y 23-28).

TUBO DE PITOT

El tubo de Pitot mide la velocidad en un punto en virtud del hecho de que el tubo mide la presión de estancamiento, la cual supera a la presión estática local en $w(V^2/2g)$ kg/m². En una corriente de fluido abierta, como la presión manométrica local es cero, la altura a la cual el líquido asciende en el tubo coincide con la altura de velocidad. Los Problemas 1 y 5 desarrollan expresiones para el flujo de fluidos incompresibles y compresibles, respectivamente.

COEFICIENTE DE DESCARGA

El coeficiente de descarga (c) es la relación entre el caudal real que pasa a través del aparato y el caudal ideal. Este coeficiente se expresa así

$$c = \frac{\text{caudal real } Q \text{ en m}^3/\text{seg}}{\text{caudal ideal } Q \text{ en m}^3/\text{seg}} = \frac{Q}{A\sqrt{2gH}} \qquad (1)$$

Más prácticamente, cuando el coeficiente de descarga c se ha determinado experimentalmente,

$$Q = cA\sqrt{2gH} \qquad \text{en m}^3/\text{seg} \qquad (2)$$

donde A = área de la sección recta del dispositivo en m²
H = carga total que produce el flujo en m del fluido.

El coeficiente de descarga puede escribirse también en función del coeficiente de velocidad y del coeficiente de contracción, o sea,

$$c = c_v \times c_c \qquad (3)$$

El coeficiente de descarga no es constante. Para un dispositivo dado, varía con el número de Reynolds. En el Apéndice se dan los datos siguientes:

(1) La Tabla 7 contiene los coeficientes de descarga para orificios circulares en el caso de agua a 15° C evacuándola en la atmósfera. Para fluidos dentro de amplios márgenes del número de Reynolds, estos datos son utilizables con poca garantía.

(2) El Diagrama *C* indica la variación de c' con el número de Reynolds para tres relaciones diámetro de orificio-diámetro de tubería. Para números de Reynolds aproximadamente inferiores a 10.000, estos datos no ofrecen garantía.

(3) El Diagrama *D* muestra la variación de c con el número de Reynolds para tres relaciones diámetro de boquilla-diámetro de tubería (boquillas de aforo).

(4) El Diagrama *E* indica la variación de c con el número de Reynolds para cinco dimensiones de venturímetros cuya relación de diámetros es de 0,500.

COEFICIENTE DF VELOCIDAD

El coeficiente de velocidad (c_v) es la relación entre la velocidad media real en la sección recta de la corriente (chorro) y la velocidad media ideal que se tendría sin rozamiento. Así, pues,

$$c_v = \frac{\text{velocidad media real en m/seg}}{\text{velocidad media ideal en m/seg}} = \frac{V}{\sqrt{2gH}} \qquad (4)$$

COEFICIENTE DE CONTRACCION

El coeficiente de contracción (c_c) es la relación entre el área de la sección recta contraída de una corriente (chorro) y el área del orificio a través del cual fluye el fluido. Entonces,

$$c_c = \frac{\text{área del chorro}}{\text{área del orificio}} = \frac{A_{\text{ch}}}{A_0} \qquad (5)$$

PERDIDA DE CARGA

La pérdida de carga en orificios, tubos, toberas o boquillas y venturímetros se expresa así:

$$\text{Pérdida de carga en m del fluido} = \left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right)\frac{V_{\text{ch}}^2}{2g} \qquad (6)$$

Cuando esta expresión se aplica a un venturímetro, V_{ch} = velocidad en la garganta y $c_v = c$.

VERTEDEROS DE AFORO

Los vertederos de aforo miden el caudal de líquidos en canales abiertos, corrientemente agua. Un cierto número de fórmulas empíricas se emplean en la literatura técnica, todas ellas con sus limitaciones. A continuación se citan solamente algunas de ellas. La mayoría de los vertederos son rectangulares: el *vertedero sin contracción* lateral de la lámina y generalmente empleado para grandes caudales, y el *vertedero con contracción* lateral de la lámina para caudales pequeños. Otros vertederos son triangulares, trapezoidales, parabólicos y de flujo proporcional. Para obtener resultados precisos un vertedero debe calibrarse en el lugar de utilización bajo las condiciones en que va a ser empleado.

FORMULA TEORICA DE UN VERTEDERO

La fórmula teórica de un vertedero para vertederos rectangulares, desarrollada en el Problema 29, es

$$Q = \frac{2}{3} c b \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} \right] \qquad (7)$$

donde Q = caudal en m^3/seg
c = coeficiente (a determinar experimentalmente)
b = anchura de la cresta del vertedero en m
H = carga sobre el vertedero en m (altura de la superficie del nivel del líquido por encima de la cresta
V = velocidad media de aproximación en m/seg

FORMULA DE FRANCIS

La fórmula de Francis, basada en experiencias sobre vertederos rectangulares de 1,067 m (3,5 ft) a 5,182 m (17 ft) de anchura bajo cargas de 0,183 m (0,6 ft) a 0,488 m (1,6 ft), es:

$$Q = 1{,}84 \left(b - \frac{nH}{10}\right) \left[\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} \right] \qquad (8)$$

donde la notación es la misma que anteriormente y

n = 0 para un vertedero sin contracción
n = 1 para un vertedero con contracción en un extremo
n = 2 para un vertedero con contracción total.

FORMULA DE BAZIN

La fórmula de Bazin (anchuras de 0,5 m a 2 m bajo cargas de 0,05 m a 0,6 m) es:

$$Q = \left(1{,}794 + \frac{0{,}0133}{H}\right) \left[1 + 0{,}55 \left(\frac{H}{H+Z}\right)^2 \right] b H^{3/2} \qquad (9)$$

donde Z = altura de la cresta del vertedero sobre la solera del canal.

El término entre corchetes se hace despreciable para bajas velocidades de aproximación.

FORMULA DE FTELEY Y STEARNS

La fórmula de Fteley y Stearns [anchura de 1,524 m (5 ft) a 5,791 m (19 ft)] bajo cargas de 0,021 m (0,07 ft) a 0,497 m (1,63 ft) para vertederos sin contracción es:

$$Q = 1{,}83\, b \left(H + \alpha \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} + 0{,}00065\, b \qquad (10)$$

donde α = factor dependiente de la altura de cresta Z (se requiere una tabla de valores).

FORMULA DEL VERTEDERO TRIANGULAR (desarrollada en el Problema 30)

Esta fórmula es:

$$Q = \frac{8}{15} c \ \mathrm{tg} \frac{\theta}{2} \sqrt{2g}\, H^{5/2} \qquad (11)$$

o, para un vertedero dado,

$$Q = m H^{5/2} \qquad (12)$$

LA FORMULA DEL VERTEDERO TRAPEZOIDAL (de Cipolletti) es:

$$Q = 1{,}861\, b H^{3/2} \qquad (13)$$

En este vertedero la pendiente de los lados (extremidades) es de 1 horizontal a 4 vertical.

PARA PRESAS EMPLEADAS COMO VERTEDEROS la expresión aproximada del caudal es

$$Q = mbH^{3/2} \quad (14$$

donde m = factor experimental, tomado generalmente de estudios sobre modelos.

En el Capítulo 10, Problema 52, se discute el caso de flujo no uniforme en vertederos de pared gruesa

EL TIEMPO DE VACIADO DE DEPOSITOS por medio de un orificio es (véase Problema 38)

$$t = \frac{2A_T}{cA_o\sqrt{2g}}(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \quad \text{(sección recta constante, sin flujo entrante)} \quad (15$$

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{-A_T\,dh}{Q_{sal} - Q_{en}} \quad \text{(flujo de entrada < flujo de salida, sección recta constante)} \quad (16$$

Para un depósito cuya sección recta no es constante, véase el Problema 41.

EL TIEMPO DE VACIADO DE DEPOSITOS por medio de vertederos se calcula empleando la fórmula (véase Problema 43):

$$t = \frac{2A_T}{mL}(H_2^{-1/2} - H_1^{-1/2}) \quad (17)$$

EL TIEMPO PARA ESTABLECER EL FLUJO en una tubería es (véase Problema 45):

$$t = \frac{LV_f}{2gH}\ln\left(\frac{V_f + V}{V_f - V}\right) \quad (18$$

Problemas resueltos

1. Un tubo de Pitot, teniendo un coeficiente de 0,98, se emplea para medir la velocidad del agua en el centro de una tubería. La altura de presión de estancamiento es 5,58 m y la altura de presión estática en la tubería es de 4,65 m. ¿Cuál es la velocidad?

Solución:

Si el tubo se adapta y posiciona correctamente, un punto de velocidad cero (punto de estancamiento) se desarrolla en B enfrente del extremo abierto del tubo (véase Fig. 9-1). Aplicando el teorema de Bernoulli desde A en el líquido en reposo hasta B se tiene

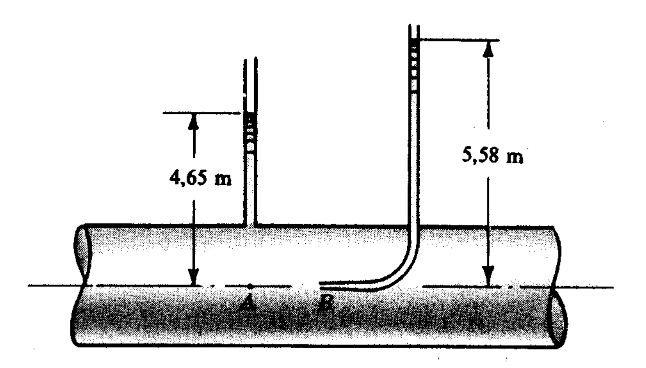


Fig. 9-1

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} + 0\right) - \text{sin pérdidas (supuesto)} = \left(\frac{p_B}{w} + 0 + 0\right) \quad (1)$$

Entonces, para un fluido ideal «desprovisto» de fricción,

$$\frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{w} - \frac{p_A}{w} \quad \text{o} \quad V_A = \sqrt{2g\left(\frac{p_B}{w} - \frac{p_A}{w}\right)} \quad (2)$$

Para el tubo real debe introducirse un coeficiente c que depende de la forma del tubo. La velocidad real para el problema anterior sería

$$V_A = c\sqrt{2g(p_B/w - p_A/w)} = 0{,}98\sqrt{2g(5{,}58 - 4{,}65)} = 4{,}18 \text{ m/seg}$$

La ecuación anterior se aplica a todos los fluidos incompresibles. El valor de c puede tomarse como la mitad en la mayoría de los problemas de ingeniería. Resolviendo (*1*) para la presión de estancamiento en B se tiene

$$p_B = p_A + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \qquad \text{donde } \rho = w/g \tag{3}$$

2. **A través de un conducto fluye aire, y el tubo de Pitot estático que mide la velocidad está conectado a un manómetro diferencial conteniendo agua. Si la desviación del manómetro es 10 cm, calcular la velocidad del aire, suponiendo que el peso específico del aire es contante e igual a 1,22 kg/m³ y que el coeficiente del tubo es 0,98.**

Solución:

Para el manómetro diferencial,

$(p_B - p_A)/w = (10/100)(1000/1{,}22) = 82$ m aire. Entonces, $V = 0{,}98\sqrt{19{,}6(82)} = 39{,}3$ m/seg

(Véanse los Problemas 26-28 y Capítulo 11 para consideraciones sobre velocidad del sonido.)

3. **Por una tubería fluye tetracloruro de carbono (Dr = 1,60). El manómetro diferencial conectado al tubo de Pitot estático indica una desviación de 7,5 cm de mercurio. Suponiendo $c = 1{,}00$, hallar la velocidad.**

Solución:

$p_B - p_A = (7{,}5/100)(13{,}6 - 1{,}6)1000 = 900$ kg/m² $\qquad V = \sqrt{19{,}6[900/(1{,}6 \times 1000)]} = 3{,}31$ m/seg

4. **Fluye agua a una velocidad de 1,4 m/seg. Un manómetro diferencial que contiene un líquido cuya densidad relativa es 1,25 se conecta a un tubo de Pitot estático. ¿Cuál es la diferencia de nivel del fluido en el manómetro?**

Solución:

$V = c\sqrt{2g(\Delta p/w)}$, $\quad 1{,}4 = 1{,}00\sqrt{19{,}6(\Delta p/w)}\quad$ y $\quad \Delta p/w = 0{,}1$ m agua

Aplicando el principio de los manómetros diferenciales, $0{,}1 = (1{,}25 - 1)h$ y $h = 0{,}4$ m de diferencia.

5. **Desarrollar la expresión para medir el flujo de un gas con un tubo de Pitot.**

Solución:

El flujo de A a B en la figura del Problema 1 anterior puede considerarse adiabático y con pérdidas despreciables. Aplicando la ecuación de Bernoulli D del Problema 20 del Capítulo 6, desde A hasta B, obtenemos

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_A}{w_A} + \frac{V_A^2}{2g} + 0\right] - \text{pérdidas despreciables} = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_A}{w_A}\right)\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k} + 0 + 0\right]$$

o

$$\frac{V_A^2}{2g} = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_A}{w_A}\right)\left[\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \tag{1}$$

El término p_B es la presión de estancamiento. Esta expresión (*1*) corrientemente se transforma introduciendo la relación entre la velocidad en A y la velocidad del sonido c del fluido no perturbado.

Del Capítulo 1, la velocidad del sonido $c = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kpg/w}$. Combinando con la ecuación (*1*) precedente,

$$\frac{V_A^2}{2} = \left(\frac{c^2}{k-1}\right)\left[\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \qquad \text{o,} \qquad \frac{p_B}{p_A} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{V_A}{c}\right)^2\right]^{k/(k-1)} \tag{2}$$

Desarrollando en serie,

$$\frac{p_B}{p_A} = 1 + \frac{k}{2}\left(\frac{V_A}{c}\right)^2\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 - \frac{k-2}{24}\left(\frac{V_A}{c}\right)^4 + \cdots\right] \tag{3}$$

A fin de comparar esta expresión con la fórmula (*3*) del Problema 1, se multiplica por p_A y se sustituye kp_A por ρ_A, obteniéndose

$$p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho_A V_A^2\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 - \frac{k-2}{24}\left(\frac{V_A}{c}\right)^4 + \cdots\right]$$

Las expresiones anteriores se aplican a todos los fluidos compresibles para relaciones de V/c menores q la unidad. Para relaciones mayores que la unidad, se producen ondas de choque y otros fenómenos, no tenien suficiente precisión la hipótesis adiabática y, por consiguiente, la aplicación de estas expresiones. La relación I se denomina *número de Mach.*

El término entre corchetes en (*4*) es mayor que la unidad y los dos primeros términos dan suficiente apro mación. El efecto de la compresibilidad es incrementar la presión del punto de estancamiento respecto a la un fluido incompresible [véase expresión (*3*) del Problema 1].

En los Problemas 26-28 y en el Capítulo 11 se discutirá el caso de velocidades del sonido.

6. Mediante un tubo de Pitot se mide un flujo de aire en condiciones atmosféricas (w = 1,221 kg/ı a 15° C) a una velocidad de 90 m/seg. Calcular el error en la presión de estancamiento al supor incompresible el aire.

Solución:

Aplicando la fórmula (*3*) del Problema 1 anterior,

$$p_B = p_A + \tfrac{1}{2}\rho V^2 = 1{,}033(10.000) + \tfrac{1}{2}(1{,}221/9{,}8)(90)^2 = 10.836 \text{ kg/m}^2 \text{ absolutos}$$

Aplicando la fórmula (*4*) del Problema 5 anterior y haciendo $c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1{,}4(9{,}8)(29{,}3)(288)} = 340$ m/se

$$\begin{aligned} p_B &= 1{,}033(10.000) + \tfrac{1}{2}(1{,}221/9{,}8)(90)^2[1 + \tfrac{1}{4}(90/340)^2 \cdots] \\ &= 10.330 + 506[1 + 0{,}0175] = 10.842 \text{ kg/m}^2 \text{ absolutos} \end{aligned}$$

El error en la presión de estancamiento es menor que el 0,1 % y el error en $(p_B - p_A)$ es aproximadamen 1,75 %.

7. La diferencia entre la presión de estancamiento y la presión estática medida por el tubo de Pitc estático es 2000 kg/m². La presión estática es 1 kg/cm² absoluto y la temperatura de la corriente de air es 15° C. ¿Cuál es la velocidad del aire, (*a*) suponiendo que el aire es compresible y (*b*) suponiend que es incompresible?

Solución:

(*a*) $p_A = 1(10.000) = 10.000$ kg/m² absolutos y $c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1{,}4(9{,}8)(28{,}3)(288)} = 340$ m/seg.

De la ecuación (*2*) del Prob. 5, $\dfrac{p_B}{p_A} = \left[1 + \left(\dfrac{k-1}{2}\right)\left(\dfrac{V_A}{c}\right)^2\right]^{k/(k-1)}$

$$\frac{10.000 + 2000}{10.000} = \left[1 + \left(\frac{1{,}4-1}{2}\right)\left(\frac{V_A}{340}\right)^2\right]^{1{,}4/0{,}4}, \qquad V_A = 178 \text{ m/seg}$$

(*b*) $w = \dfrac{1(10.000)}{29{,}3(288)} = 1{,}186$ kg/m³ y $V = \sqrt{2g(p_B/w - p_A/w)} = \sqrt{2g(2000/1{,}186)} = 182$ m/seg.

8. A través de un conducto circula aire a 240 m/seg. En condiciones normales de presión, la presió manométrica de estancamiento es de −1,71 m de columna de agua. La temperatura de estanca miento es de 63° C. ¿Cuál es la presión estática en el conducto?

Solución:

Con dos incógnitas en la ecuación (*2*) del Problema 5, vamos a suponer una velocidad V/c (número de Mach igual a 0,72. Entonces,

$$(-1{,}71 + 10{,}33)1000 = p_A[1 + \tfrac{1}{2}(1{,}4 - 1)(0{,}72)^2]^{1{,}4/0{,}4}$$

y $p_A = 8{,}62(1000)/1{,}4 = 6155$ kg/m² absolutos.

A fin de comprobar la suposición anterior, aplicamos la relación adiabática

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k}, \qquad \frac{273 + 63}{T_A} = \left(\frac{8{,}62 \times 1000}{6155}\right)^{0{,}4/1{,}4}, \qquad T_A = 305° \text{ Kelvin}$$

Por otra parte $c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1{,}4(9{,}8)(29{,}3)(305)} = 350$ m/seg.

Entonces, $V/c = 240/350 = 0{,}686$ y $p_A = \dfrac{8{,}62 \times 1000}{[1 + 0{,}2(0{,}686)^2]^{1{,}4/0{,}4}} = 6285$ kg/m^2 absolutos.

No se precisa nueva aproximación.

9. Un orificio normal de 10 cm de diámetro evacua agua bajo una altura de carga de 6 m. ¿Cuál es el caudal en m^3/seg?

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y B en la figura adjunta, tomando B como plano de referencia,

$$(0 + 0 + 6) - \left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right)\frac{V_{ch}^2}{2g} = \left(\frac{V_{ch}^2}{2g} + \frac{p_B}{w} + 0\right)$$

Pero la altura de presión en B es cero (según se vio en el Cap. 4, Prob. 6). Entonces,

$$V_{ch} = c_v\sqrt{2g \times 6}$$

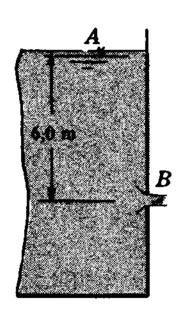


Fig. 9-2

Por otra parte, $Q = A_{ch}V_{ch}$ que, aplicando las definiciones de los coeficientes, da

$$Q = (c_c A_o)c_v\sqrt{2g \times 6} = cA_o\sqrt{2g \times 6}$$

De la Tabla 7, $c = 0{,}594$ para $D = 10$ cm y $h = 6$ m. Por consiguiente, $Q = 0{,}594[\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2]\sqrt{2g \times 6} = 0{,}051$ m^3/seg.

10. La velocidad real en la sección contraída de un chorro de un líquido circulando por un orificio de 5 cm de diámetro es 8,4 m/seg bajo una carga de 4,5 m. (*a*) ¿Cuál es el valor del coeficiente de velocidad? (*b*) Si el desagüe medido es 0,0114 m^3/seg, determinar los coeficientes de contracción y descarga.

Solución:

(*a*) Velocidad real $= c_v\sqrt{2gH}$, $\quad 8{,}4 = c_v\sqrt{19{,}6 \times 4{,}5}$, $\quad c_v = 0{,}895$.

(*b*) Q real $= cA\sqrt{2gH}$, $\quad 0{,}0114 = c[\frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2]\sqrt{19{,}6 \times 4{,}5}$, $\quad c = 0{,}627$.

Como $c = c_v \times c_c$, $\quad c_c = 0{,}627/0{,}895 = 0{,}690$.

11. A través de un orificio normal de 2,5 cm de diámetro circula aceite bajo una carga de 5,4 m a razón de 0,00315 m/seg. El chorro choca contra una pared situada a 1,5 m de distancia horizontal y a 0,12 m verticalmente por debajo del centro de la sección contraída del chorro. Calcular los coeficientes.

Solución:

(*a*) $Q = cA\sqrt{2gH}$, $\quad 0{,}00315 = c[\frac{1}{4}\pi(0{,}025)^2]\sqrt{2g(5{,}4)}$, $\quad c = 0{,}625$.

(*b*) De las ecuaciones cinemáticas, $x = Vt$ e $y = \frac{1}{2}gt^2$, en donde x e y representan las coordenadas medidas del chorro.
Eliminando t se obtiene $x^2 = (2V^2/g)y$.
Sustituyendo, $(1{,}5)^2 = (2V^2/9{,}8)(0{,}12)$ y V real $= 9{,}6$ m/seg en el chorro.

Entonces, $9{,}6 = c_v = \sqrt{2g(5{,}4)}$ y $c_v = 0{,}934$. Finalmente, $c_c = c/c_v = 0{,}670$.

12. El depósito del Problema 9 está cerrado y el aire que ocupa el espacio por encima del agua está bajo presión, aumentando el caudal hasta 0,075 m^3/seg. Hallar la presión del aire en kg/cm^2.

Solución:

$$Q = cA_o\sqrt{2gH} \qquad \text{o} \qquad 0{,}075 = c[\tfrac{1}{4}\pi(0{,}1)^2]\sqrt{2g(6 + p/w)}$$

La Tabla 7 indica que c apenas cambia dentro del margen de carga considerado. Tomando $c = 0{,}593$ y calculando, se tiene $p/w = 7{,}05$ m de agua (el c supuesto se comprueba para la carga total H). Entonces,

$$p' = wh/100^2 = 1000(7{,}05)/10.000 = 0{,}705 \text{ kg/cm}^2$$

13. A través de un orificio de 7,5 m de diámetro, cuyos coeficientes de velocidad y contracción son 0,950 y 0,650, respectivamente, circula aceite de 0,720 de densidad relativa. ¿Qué debe leerse en el manómetro A de la Fig. 9-3 para que la potencia en el chorro C sea 8,00 CV?

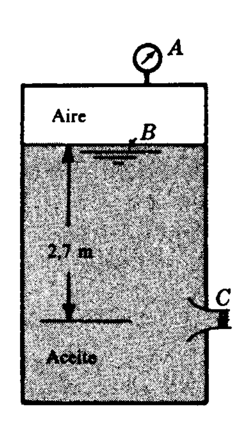


Fig. 9-3

Solución:

La velocidad del chorro puede calcularse a partir del valor de la potencia del chorro:

$$\text{caballos de vapor del chorro} = \frac{wQH_{ch}}{75} = \frac{w(c_c A_o V_{ch})(0 + V_{ch}^2/2g + 0)}{75}$$

$$8{,}00 = \frac{(0{,}720 \times 1000)(0{,}650)[\frac{1}{4}\pi(0{,}075)^2]V_{ch}^3/2g}{75}$$

Despejando, $V_{ch}^3 = 5700$ y $V_{ch} = 17{,}8$ m/seg.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre B y C, tomando C como referencia,

$$\left(\frac{p_A}{w} + \text{despr.} + 2{,}7\right) - \left[\frac{1}{(0{,}95)^2} - 1\right]\frac{(17{,}8)^2}{2g} = \left(0 + \frac{(17{,}8)^2}{2g} + 0\right)$$

y $p_A/w = 15{,}25$ m de aceite. Entonces, $p'_A = wh/10.000 = (0{,}720 \times 1000)15{,}25/10.000 = 1{,}1$ kg/cm^2.

Nota: El lector no debe confundir la altura de carga total H, que origina el flujo, con el valor de H_{ch} en la expresión que nos da la potencia del chorro. Ambos valores *no* son iguales.

14. Para el caso de la boquilla de 10 cm de diámetro indicada en la Fig. 9-4, (*a*) ¿Cuál es el caudal de agua a 24° C bajo una altura de carga de 9 m? (*b*) ¿Cuál es la altura de presión en la sección B? (*c*) ¿Cuál es la máxima carga que puede emplearse si el tubo está completamente lleno? (Utilizar $c_v = 0{,}82$.)

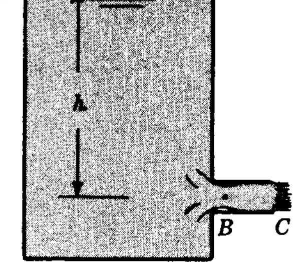
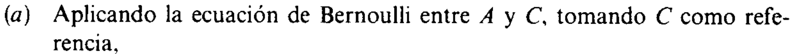


Fig. 9-4

Solución:

Para una boquilla normal, la corriente se contrae en B aproximadamente un 0,62 del área del tubo. La pérdida de carga entre A y B se ha valorado en 0,042 veces la altura de velocidad en B.

(*a*) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y C, tomando C como referencia,



$$(0 + \text{despr.} + 9) - \left[\frac{1}{(0{,}82)^2} - 1\right]\frac{V_{ch}^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_{ch}^2}{2g} + 0\right)$$

y $V_{ch} = 10{,}88$ m/seg. Luego $Q = A_{ch}V_{ch} = [1{,}00 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2](10{,}88) = 0{,}0855$ m^3/seg.

(*b*) Ahora, la ecuación de Bernoulli entre A y B, tomando B como referencia, nos da

$$(0 + \text{despr.} + 9) - 0{,}042\frac{V_B^2}{2g} = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_B^2}{2g} + 0\right) \qquad (A)$$

Por otra parte, $Q = A_B V_B = A_C V_C$ o $c_c A V_B = A V_C$ o $V_B = V_{ch}/c_c = 10{,}88/0{,}62 = 17{,}6$ m/seg.

Sustituyendo en la ecuación (A), $9 = \dfrac{p_B}{w} + 1{,}042\dfrac{(17{,}6)^2}{2g}$ y $\dfrac{p_B}{w} = -7{,}5$ m de agua.

(*c*) Como la carga que produce el flujo a través de la boquilla se incrementa, la altura de presión en B irá decreciendo. Para un flujo estacionario (y con el tubo completamente lleno), la altura de presión en B no debe ser menor que la de la presión de vapor para líquidos a la temperatura considerada. De la Tabla 1 en el Apéndice, para el agua a 24° C este valor es de 0,030 kg/cm² absolutos o 0,3 m absolutos aproximadamente al nivel del mar (−10,0 m).

De (A) se tiene
$$h = \frac{p_B}{w} + 1{,}042\frac{V_B^2}{2g} = -10{,}0 + 1{,}042\frac{V_B^2}{2g} \qquad (B)$$

Por otra parte,
$$c_c A V_B = A V_C = A c_v\sqrt{2gh}$$

De donde
$$V_B = \frac{c_v}{c_c}\sqrt{2gh} \quad \text{o} \quad \frac{V_B^2}{2g} = \left(\frac{c_v}{c_c}\right)^2 h = \left(\frac{0{,}82}{0{,}62}\right)^2 h = 1{,}75h$$

Sustituyendo en (B), $h = -10{,}0 + 1{,}042(1{,}75h)$ y $h = 12{,}15$ m de agua (24° C).

Toda carga superior a 12 m hará que la corriente salga sin tocar las paredes del tubo. El tubo funciona entonces como un orificio.

En condiciones de presión de vapor resultarían fenómenos de cavitación (véase Capítulo 12).

15. **A través de una tubería de 10 cm circula agua a razón de 0,027 m³/seg y de ahí a través de una boquilla conectada al final de la tubería. La boquilla tiene 5 cm de diámetro interior y los coeficientes de velocidad y contracción para la boquilla son 0,950 y 0,930, respectivamente. ¿Qué altura de presión debe mantenerse en la base mayor de la boquilla si la presión que rodea al chorro es la atmosférica?**

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la base mayor de la boquilla y el chorro,

$$\left(\frac{p}{w} + \frac{V_{10}^2}{2g} + 0\right) - \left[\frac{1}{(0{,}950)^2} - 1\right]\frac{V_{ch}^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_{ch}^2}{2g} + 0\right)$$

y las velocidades se calculan de $Q = AV$: $0{,}027 = A_{10}V_{10} = A_{ch}V_{ch} = (c_c A_5)V_{ch}$. Así, pues,

$$V_{10} = \frac{0{,}027}{\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2} = 3{,}44 \text{ m/seg} \quad \text{y} \quad V_{ch} = \frac{0{,}027}{0{,}930[\frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2]} = 14{,}8 \text{ m/seg}$$

Sustituyendo y operando, $p/w = 12{,}4 - 0{,}6 = 11{,}8$ m de agua.

Aplicando la fórmula $V_{ch} = c_v\sqrt{2gH}$ y siendo $H = (p/w + V_{10}^2/2g)$, se tiene

$$14{,}8 = 0{,}950\sqrt{2g[p/w + (3{,}44)^2/2g]}$$

de donde $\sqrt{p/w + 0{,}6} = 3{,}51$ y $p/w = 11{,}8$ m de agua, como antes.

16. **Una boquilla de 10 cm de diámetro en la base mayor por 5 cm de diámetro en el extremo de salida apunta hacia abajo y la altura de presión en la base mayor de la boquilla es 7,8 m de agua. La base mayor de la boquilla dista 0,9 m de la sección de salida y el coeficiente de velocidad es 0,962. Determinar la potencia en el chorro de agua.**

Solución:

Para una boquilla, salvo si se da c_c, este coeficiente se toma como la unidad. Por consiguiente, $V_{ch} = V_5$.

Antes de calcular la potencia deben hallarse V y Q. Usando la ecuación de Bernoulli entre la base mayor y la sección de salida de la boquilla, tomando como referencia esta última, tenemos

$$\left(7{,}8 + \frac{V_{10}^2}{2g} + 0{,}9\right) - \left[\frac{1}{(0{,}962)^2} - 1\right]\frac{V_5^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_5^2}{2g} + 0\right)$$

y $A_{10}V_{10} = A_5V_5$ o $V_{10}^2 = (5/10)^4V_5^2$. Operando, $V_5 = 12{,}95$ m/seg.

$$\text{Potencia en el chorro} = \frac{wQH_{ch}}{75} = \frac{1000[\frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2(12{,}95)][0 + (12{,}95)^2/2g + 0]}{75} = 2{,}91 \text{ CV}$$

17. Por un venturímetro de 30 cm × 15 cm circula agua a razón de 0,0395 m³/seg y el manómetro diferencial indica una desviación de 1,0 m, como muestra la Fig. 9-5. La densidad relativa del líquido del manómetro es 1,25. Determinar el coeficiente del venturímetro.

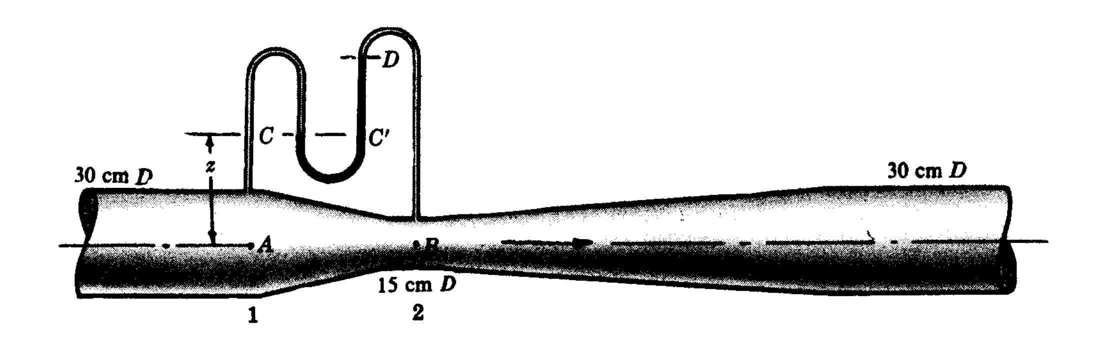


Fig. 9-5

Solución:

El coeficiente de un venturímetro es el mismo que el de descarga ($c_c = 1{,}00$ y, por consiguiente, $c = c_v$). El coeficiente de flujo K no debe confundirse con el coeficiente c del medidor. Al final de este problema se hace una aclaración.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y B, caso ideal, se tiene

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 0\right) - \text{sin pérdidas} = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0\right)$$

y $V_{30}^2 = (A_{15}/A_{30})^2 V_{15}^2$. Operando, $V_{15} = \sqrt{\dfrac{2g(p_A/w - p_B/w)}{1 - (A_{15}/A_{30})^2}}$ (sin pérdidas).

La velocidad real (y, por tanto, el valor real del caudal Q) se obtendrá multiplicando el valor ideal por el coeficiente c del medidor. Así, pues,

$$Q = A_{15}V_{15} = A_{15}c\sqrt{\frac{2g(p_A/w - p_B/w)}{1 - (A_{15}/A_{30})^2}} \qquad (1)$$

Para obtener la altura de presión diferencial indicada anteriormente, se emplearán los principios del manómetro diferencial.

$$p_C = p_{C'}$$
$$(p_A/w - z) = p_B/w - (z + 1{,}0) + 1{,}25(1{,}0) \qquad \text{o} \qquad (p_A/w - p_B/w) = 0{,}25 \text{ m}$$

Sustituyendo en (1), $0{,}0395 = \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 c\sqrt{2g(0{,}25)/(1 - 1/16)}$ y $c = 0{,}980$.

Nota: La ecuación (1) suele escribirse así: $Q = KA_2\sqrt{2g(\Delta p/w)}$ donde K es el llamado coeficiente de flujo. Está claro que

$$K = \frac{c}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \quad \text{o} \quad \frac{c}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}}$$

Para obtener, si se desea, c se utilizan tablas o ábacos en los que puede leerse el coeficiente K. Los factores de conversión para obtener los valores de K para ciertas relaciones de diámetros de instrumentos se indican en el Apéndice en varios diagramas.

18. Circula agua hacia arriba a través de un venturímetro vertical de 30 cm × 15 cm cuyo coeficiente es 0,980. La desviación del manómetro diferencial es 1,16 m de líquido de densidad relativa 1,25, como se muestra en la figura adjunta. Determinar el caudal en m^3/seg.

Solución:

Aplicando la ecuación de Berñoulli como en el Problema 17 y teniendo en cuenta que en este caso $z_A = 0$ y $z_B = 0{,}45$ m, se tiene

$$Q = cA_{15}\sqrt{\frac{2g[(p_A/w - p_B/w) - 0{,}45]}{1 - (1/2)^4}}$$

Aplicando los principios del manómetro diferencial para obtener $\Delta p/w$,

$$p_C/w = p_D/w \quad \text{(en m de agua)}$$
$$p_A/w + (n + 1{,}16) = p_B/w + m + 1{,}25(1{,}16)$$

$$[(p_A/w - p_B/w) - (m - n)] = 1{,}16(1{,}25 - 1{,}00)$$
$$[(p_A/w - p_B/w) - 0{,}45] = 2{,}29 \text{ m de agua}$$

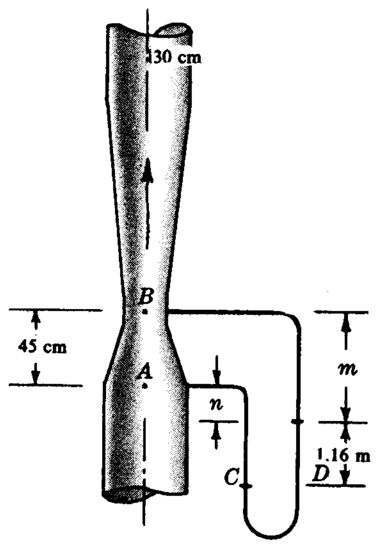


Fig. 9-6

Sustituyendo en la ecuación que da el caudal, se tiene $Q = 0{,}980(\frac{1}{4}\pi)(0{,}15)^2\sqrt{2g(0{,}29)/(1 - 1/16)} =$ 0,0426 m^3/seg.

19. Agua a 37° C circula a razón de 0,0142 m^3/seg a través de un orificio de 10 cm de diámetro instalado en un tubo de 20 cm. ¿Cuál es la diferencia de altura de presión entre la sección aguas arriba y la sección contraída (sección de «vena contracta»)?

Solución:

En el Diagrama C del Apéndice se observa que c' varía con el número de Reynolds. Hay que advertir que el número de Reynolds debe calcularse para la sección recta del orificio y no para la sección contraída del chorro ni tampoco para la sección de la tubería. Este valor es

$$R_E = \frac{V_o D_o}{\nu} = \frac{(4Q/\pi D_o^2)D_o}{\nu} = \frac{4Q}{\nu \pi D_o} = \frac{4(0{,}0142)}{\pi(6{,}87 \times 10^{-7})(0{,}1)} = 263.000$$

El Diagrama C para $\beta = 0{,}500$ da $c' = 0{,}605$.

Aplicando el teorema de Bernoulli entre la sección de la tubería y la sección del chorro se obtiene la siguiente ecuación general para fluidos incompresibles:

$$\left(\frac{p_s}{w} + \frac{V_8^2}{2g} + 0\right) - \left[\frac{1}{c_v^2} - 1\right]\frac{V_{ch}^2}{2g} = \left(\frac{p_{ch}}{w} + \frac{V_{ch}^2}{2g} + 0\right)$$

y

$$Q = A_{20}V_{20} = (c_c A_{10})V_{ch}$$

Sustituyendo V_{20} por V_{ch} y operando,

$$\frac{V_{ch}^2}{2g} = c_v^2\left(\frac{p_{20}/w - p_{ch}/w}{1 - c^2(A_{10}/A_{20})^2}\right) \quad \text{o} \quad V_{ch} = c_v\sqrt{\frac{2g(p_{20}/w - p_{ch}/w)}{1 - c^2(D_{10}/D_{20})^4}}$$

Luego
$$Q = A_{ch}V_{ch} = (c_c A_{10}) \times c_v\sqrt{\frac{2g(p_{20}/w - p_{ch}/w)}{1 - c^2(D_{10}/D_{20})^4}} = cA_{10}\sqrt{\frac{2g(p_{20}/w - p_{ch}/w)}{1 - c^2(D_{10}/D_{20})^4}}.$$

Para un orificio con velocidad de aproximación y un chorro contraído, es más conveniente escribir la ecuación de la forma

$$Q = \frac{c'A_{10}}{\sqrt{1 - (D_{10}/D_{20})^4}}\sqrt{2g(\Delta p/w)} \qquad (1)$$

o

$$Q = KA_{10}\sqrt{2g(\Delta p/w)} \qquad (2)$$

donde K es el llamado coeficiente de flujo. El coeficiente del medidor c' puede determinarse experimentalmente para una relación de diámetro de orificio a diámetro de tubería dada, o bien puede preferirse el coeficiente de flujo K.

Sustituyendo en la anterior expresión (*1*), se obtiene

$$0{,}0142 = \frac{0{,}605 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2}{\sqrt{1-(1/2)^4}}\sqrt{2g(\Delta p/w)} \quad \text{y} \quad \Delta p/w = (p_{20}/w - p_{ch}/w) = 0{,}428 \text{ m de agua.}$$

20. Para el orificio y tubería del Problema 19, ¿qué diferencia de presión en kg/cm² causaría el mismo caudal de trementina a 20° C? (Véase Apéndice para densidad relativa y ν.)

Solución:

$$R_E = \frac{4Q}{\pi\nu D_o} = \frac{4(0{,}0142)}{\pi(0{,}00000173)(0{,}1)} = 104{,}500. \text{ Del Diagrama } C, \text{ para } \beta = 0{,}500,\ c' = 0{,}607.$$

Entonces, $$0{,}0142 = \frac{0{,}607 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2}{\sqrt{1-(1/2)^4}}\sqrt{2g(\Delta p/w)},$$ de donde

$$\Delta\frac{p}{w} = \left(\frac{p_{20}}{w} - \frac{p_{ch}}{w}\right) = 0{,}426 \text{ m de trementina} \quad \text{y} \quad \Delta p' = \frac{wh}{10.000} = \frac{(0{,}862 \times 1000)(0{,}426)}{10.000} = 0{,}0367 \text{ kg/cm}^2.$$

21. Determinar el caudal de agua a 21° C a través de un orificio de 15 cm instalado en una tubería de 25 cm si la altura de presión diferencial entre la sección aguas arriba y la sección contraída es 1,10 m de agua.

Solución:

Este tipo de problema ha sido tratado en el capítulo dedicado al flujo de fluidos en tuberías. El valor de c' no puede hallarse puesto que el número de Reynolds no puede calcularse. Refiriéndose al Diagrama C, para $\beta = 0{,}600$, se supondrá un valor de c' igual a 0,610. Empleando este valor,

$$Q = \frac{0{,}610 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2}{\sqrt{1-(0{,}60)^4}}\sqrt{19{,}6(1{,}10)} = 0{,}0536 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Entonces, $$R_E = \frac{4(0{,}0536)}{(0{,}000000985)(0{,}15)} = 462.000 \text{ (valor de tanteo)}$$

Del Diagrama C, para $\beta = 0{,}600$, se deduce $c' = 0{,}609$. Recalculando el caudal para $c' = 0{,}609$ nos da $Q = 0{,}0532$ m³/seg (el número de Reynolds apenas queda afectado).

Nota especial: El profesor R. C. Binder, de la Universidad de Purdue, sugiere en las páginas 132-3 de su obra *Fluid Mechanics* (segunda edición) que este tipo de problema necesita no ser una proposición de tanteo. Propone que se dibujen líneas especiales sobre el diagrama coeficiente-número de Reynolds. En el caso de orificio en tubería, la ecuación (*1*) del Problema 19 puede escribirse así

$$\frac{Q}{A_{10}} = \frac{c'\sqrt{2g(\Delta p/w)}}{\sqrt{1-(D_{10}/D_{20})^4}} = V_{10} \qquad \text{ya que } Q = AV$$

Pero $$R_E = \frac{V_{10}D_{10}}{\nu} = \frac{c'\sqrt{2g(\Delta p/w)} \times D_{10}}{\nu\sqrt{1-(1/2)^4}} \quad \text{o} \quad \frac{R_E}{c'} = \frac{D_{10}\sqrt{2g(\Delta p/w)}}{\nu\sqrt{1-(1/2)^4}}$$

o, en general, $$\frac{R_E}{c'} = \frac{D_o\sqrt{2g(\Delta p/w)}}{\nu\sqrt{1-(D_o/D_p)^4}}$$

En el Diagrama C se han trazado dos líneas rectas llamadas líneas T, una para $R_E/c' = 700.000$ y otra para $R_E/c' = 800.000$. En el caso del Problema 21

$$\frac{R_E}{c'} = \frac{(0{,}15)\sqrt{19{,}6(1{,}10)}}{0{,}000000985\sqrt{1-(0{,}60)^4}} = 760.000$$

Con la exactitud que puede leerse, la línea 760.000 corta a la curva $\beta = 0{,}600$ en $c' = 0{,}609$. El flujo Q se calcula, pues, rápidamente.

22. Una boquilla cuya sección de salida tiene 10 cm de diámetro se instala en una tubería de 25 cm. A través de la boquilla fluye fuel-oil medio a 27° C y a razón de 0,094 m^3/seg. Se supone que la calibración de la boquilla está representada por la curva $\beta = 0{,}4$ del Diagrama D. Calcular la presión diferencial leída si el líquido del manómetro tiene una densidad relativa de 13,6.

Solución:

La ecuación de Bernoulli, entre la sección de la tubería y la sección del chorro, conduce a la misma ecuación que se obtuvo en el Problema 17 para el venturímetro, puesto que la boquilla se diseña para un coeficiente de contracción igual a la unidad.

$$Q = A_{10}V_{10} = A_{10}c\sqrt{\frac{2g(p_A/w - p_B/w)}{1 - (10/25)^4}} \qquad (1)$$

El Diagrama D indica que c varía con el número de Reynolds.

$$V_{10} = \frac{Q}{A_{10}} = \frac{0{,}094}{\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2} = 11{,}25 \text{ m/seg} \qquad \text{y} \qquad R_E = \frac{11{,}95 \times 0{,}1}{3{,}39 \times 10^{-6}} = 353.000$$

La curva da, para $\beta = 0{,}40$, $c = 0{,}993$. Entonces,

$$0{,}094 = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}1)^2 \times 0{,}993\sqrt{\frac{2g(p_A/w - p_B/w)}{1 - (10/25)^4}}$$

y $(p_A/w - p_B/w) = 7{,}25$ m de fuel-oil.

Empleando la Dr del fuel-oil = 0,851, tomada del Apéndice y por aplicación de los principios del manómetro diferencial, tenemos

$$7{,}25 = h(13{,}6/0{,}851 - 1) \qquad \text{y} \qquad h = 0{,}483 \text{ m (lectura en el manómetro)}$$

Si se da la lectura del manómetro diferencial, el procedimiento empleado en el precedente problema sería utilizar, por ejemplo, un valor supuesto de c con el que se calcularía Q y con el número de Reynolds obtenido se leería sobre la curva apropiada del Diagrama D un nuevo c. Si c difiere del valor supuesto, el cálculo se repite hasta encontrar el coeficiente adecuado.

23. Deducir una expresión para el caudal de un fluido compresible a través de un caudalímetro de tobera y un venturímetro.

Solución:

Puesto que el cambio de velocidad se produce en un corto periodo de tiempo, se sustraerá poco calor, por lo que se supondrán unas condiciones adiabáticas. El teorema de Bernoulli para un flujo compresible se ha expuesto en el Capítulo 6, ecuación (D) del Problema 20, y se expresa así:

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{w_1} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{w_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right]$$

Para un medidor de tobera y un venturímetro horizontal, $z_1 = z_2$ y la pérdida de carga será considerada mediante el coeficiente de descarga. También, puesto que $c_c = 1{,}00$,

$$W = w_1A_1V_1 = w_2A_2V_2 \quad \text{(kg/seg)}$$

Luego V_1 aguas arriba $= W/w_1A_1$, V_2 aguas abajo $= W/w_2A_2$. Sustituyendo y operando,

$$\frac{W^2}{w_2^2A_2^2} - \frac{W^2}{w_1^2A_1^2} = 2g\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_1}{w_1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right]$$

o

$$\text{(ideal)} \quad W = \frac{w_2A_2}{\sqrt{1-(w_2/w_1)^2(A_2/A_1)^2}}\sqrt{\frac{2gk}{k-1}(p_1/w_1) \times [1-(p_2/p_1)^{(k-1)/k}]}$$

Es más práctico eliminar w_2 bajo el radical. Puesto que $w_2/w_1 = (p_2/p_1)^{1/k}$,

$$\text{(ideal)} \quad W = w_2A_2\sqrt{\frac{\frac{2gk}{k-1}(p_1/w_1) \times [1-(p_2/p_1)^{(k-1)/k}]}{1-(A_2/A_1)(p_2/p_1)^{2/k}}} \qquad (1)$$

El valor real de W en kg/seg se obtiene multiplicando la expresión anterior por el coeficiente c.

A efectos de comparación, la ecuación (*1*) del Problema 17 y la ecuación (*1*) del Problema 22 (para fl incompresibles) pueden escribirse de la forma

$$W = wQ = \frac{wA_2c}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}}\sqrt{2g(\Delta p/w)}$$

o

$$W = wKA_2\sqrt{2g(\Delta p/w)}$$

La ecuación anterior puede expresarse de una forma más general de manera que sea aplicable a fl compresibles e incompresibles. Se introduce un factor de expansión (adiabático) Y y se especifica el valor a la entrada. La relación fundamental es entonces

$$W = w_1KA_2Y\sqrt{2g(\Delta p/w_1)}$$

Para fluidos incompresibles, $Y = 1$. Para fluidos compresibles, igualando las expresiones (*1*) y (*2*) y c jando Y, se tiene

$$Y = \sqrt{\frac{1-(A_2/A_1)^2}{1-(A_2/A_1)^2(p_2/p_1)^{2/k}} \times \frac{[k/(k-1)][1-(p_2/p_1)^{(k-1)/k}](p_2/p_1)^{2/k}}{1-p_2/p_1}}$$

Este factor de expansión Y es una función de tres relaciones adimensionales. La Tabla 8 da algunos v típicos para medidores de tobera y venturímetros.

Nota: Para orificios y medidores de orificio los valores de Y' se determinarán experimentalmente valores difieren del anterior valor de Y porque el coeficiente de contracción no es la unidad ni es una cons Conociendo Y', las soluciones son idénticas a las que resultan para boquillas y venturímetros. Como fu bibliográficas se remite al lector a los experimentos realizados por H. B. Reynolds y J. A. Perry.

24. Circula aire a la temperatura de 27° C a través de una tubería de 10 cm de diámetro y de tobera de 5 cm. La presión diferencial es de 0,160 m de aceite (Dr = 0,910). La presión man trica aguas arriba de la tobera es de 2,0 kg/cm². ¿Cuántos kilogramos por segundo circulan una lectura barométrica de 1,03 kg/cm², (*a*) suponiendo que la densidad del aire es consta (*b*) suponiendo unas condiciones adiabáticas?

S I

Solución:

(*a*)
$$w_1 = \frac{(2,0+1,03)10.000}{29,3(273+27)} = 3,45 \text{ kg/m}^3$$

Aplicando los principios del manómetro diferencial y expresando la altura de presión en metr aire, se tiene

$$\frac{\Delta p}{w_1} = 0,160(\frac{w_{ac}}{w_{air}} - 1) = 0,160(\frac{0,910 \times 1000}{3,45} - 1) = 42,0 \text{ m de aire}$$

Suponiendo $c = 0,980$ y empleando la ecuación (*1*) del Problema 22 después de multiplicar pc tenemos

$$W = w_1Q = 3,45 \times \tfrac{1}{4}\pi(5/100)^2(0,980)\sqrt{\frac{2g(42,0)}{1-(5/10)^4}} = 0,196 \text{ kg/seg}$$

Para comprobar el valor de c se calcula el número de Reynolds y se utiliza la curva apropiada Diagrama *D*. [En este caso, $w_1 = w_2$ y $\nu = 1,57 \times 10^{-3}$ a la presión normal, dato tomado de la Tabla

$$V_2 = \frac{W}{A_2w_2} = \frac{W}{(\pi d_2^2/4)w_2}$$

Entonces,
$$R_E = \frac{V_2d_2}{\nu} = \frac{4W}{\pi d_2\nu w_2} = \frac{4(0,196)}{\pi(5/100)(1,57 \times 1,03/3,03)10^{-5}(3,45)} = 271.500$$

Del Diagrama *D* se deduce $c = 0,986$. Recalculando, $W = 0,197$ kg/seg.

No es necesaria mayor precisión en el cálculo puesto que tanto el número de Reynolds como el de c, leído en el Diagrama *D*, prácticamente no varían.

(*b*) En primer lugar se calcula la presión y los pesos específicos.

$$p_1 = (2{,}00 + 1{,}03)10.000 = 30.300 \text{ kg/m}^2, \quad p_2 = (30.300 - 42{,}0 \times 3{,}45) = 30.152 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{30.152}{30.300} = 0{,}995 \quad \text{y} \quad \left(\frac{w_2}{w_2}\right)^k = 0{,}995 \text{ (véase Cap. 1). Luego } w_2 = 3{,}44 \text{ kg/m}^3$$

La Tabla 8 da algunos valores del coeficiente de expansión Y definido en el Problema 23. En este caso se debe interpolar entre las relaciones de presiones 0,95 y 1,00 a fin de obtener Y para $p_2/p_1 = 0{,}995$. Para $k = 1{,}40$ y $d_2/d_1 = 0{,}50$, obtenemos $Y = 0{,}997$.

Suponiendo $c = 0{,}980$, del examen del Diagrama D y observando que $K = 1{,}032c$, la ecuación (*2*) del Problema 23 da

$$W = w_1 K A_2 Y \sqrt{2g(\Delta p/w_1)}$$
$$= (3{,}45)(1{,}032 \times 0{,}980) \times \tfrac{1}{4}\pi(0{,}05)^2 \times 0{,}997\sqrt{19{,}6(42{,}0)} = 0{,}195 \text{ kg/seg}$$

Para comprobar c, $$R_E = \frac{4W}{\pi d_2 v w_2} = \frac{4(0{,}195)}{\pi(0{,}05)(1{,}57 \times 1{,}03/3{,}03)10^{-5}(3{,}44)} = 271.000$$

y $c = 0{,}986$ (Diagrama D, curva $\beta = 0{,}50$).

Recalculando, $W = 0{,}196$ kg/seg. No es preciso afinar más. Se observa que apenas se introduce error en la parte (*a*) al suponer constante la densidad del aire.

25. Se utiliza un venturímetro de 20 cm × 10 cm para medir el caudal de dióxido de carbono a 20° C. La diferencia de lecturas en la columna de agua del manómetro diferencial es de 179,5 cm y el barómetro indica 76,0 cm de mercurio. Para una presión de entrada de 1,26 kg/cm² absolutos, calcular el caudal en kg/seg.

Solución:

La presión absoluta a la entrada es $p_1 = 1{,}26 \times 10^4$ kg/m² y el peso específico w_1 del dióxido de carbono es

$$w_1 = \frac{1{,}26 \times 10^4}{19{,}2(273 + 20)} = 2{,}24 \text{ kg/m}^2$$

La presión diferencial $= (179{,}5/100)(1000 - 2{,}24) = 1790$ kg/m² y, por consiguiente, la presión en la garganta $= p_2 = 12.600 - 1790 = 10.810$ kg/m² absolutos.

Para obtener el peso específico w_2 utilizamos $\frac{p_2}{p_1} = \frac{10.810}{12.600} = 0{,}860$ y $\frac{w_2}{w_1} = (0{,}860)^{1/k}$ (véase Cap. 1). Así, pues, $w_2 = 2{,}24(0{,}860)^{1/1{,}3} = 2{,}00$ kg/m³.

$$W = w_1 K A_2 Y \sqrt{2g(\Delta p/w_1)} \quad \text{en kg/seg}$$

Usando $k = 1{,}30$, $d_2/d_1 = 0{,}50$ y $p_2/p_1 = 0{,}860$, Y (Tabla 8) $= 0{,}910$ por interpolación. Suponiendo $c = 0{,}985$, del Diagrama E, y teniendo en cuenta que $K = 1{,}032c$, tenemos

$$W = (2{,}24)(1{,}032 \times 0{,}985) \times \tfrac{1}{4}\pi(10/100)^2 \times 0{,}910\sqrt{2g(1790/2{,}24)} = 2{,}05 \text{ kg/seg}$$

Para comprobar el valor supuesto de c, se determina el número de Reynolds y se emplea la curva adecuada en el Diagrama E. Del Problema 24,

$$R_E = \frac{4W}{\pi d_2 v w_2} = \frac{4(2{,}05)}{\pi(10/100)(0{,}846 \times 1{,}033/1{,}260 \times 10^{-5})(2{,}00)} = 1{,}89 \times 10^6$$

Del Diagrama E, $c = 0{,}984$. Recalculando, $W = 2{,}046$ kg/seg.

26. Establecer la relación que limita la velocidad de un fluido compresible en pasos convergentes (velocidad del sonido).

Solución:

Despreciando la velocidad de aproximación en la ecuación de Bernoulli (*D*) del Problema 20, Capítulo 6, para un fluido ideal obtenemos

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_1}{w_1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right] \qquad (1)$$

Además, si se sustituye $(p_2/w_2)^{1/k}$ por $(p_1/w_1)^{1/k}$ antes de la integración que conduce a la ecuación (, altura de velocidad sería

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{w_2}\right)\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

Si el fluido alcanza la velocidad del sonido c_2 en la Sección 2, entonces $V_2 = c_2$ y $V_2^2 = c_2^2 = kp_2g/w_2$ se Capítulo 1). Sustituyendo en la ecuación (2),

$$\frac{kp_2g}{2gw_2} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{w_2}\right)\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

y simplificando $$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

Esta relación p_2/p_1 se denomina *relación de la presión crítica* y depende del fluido que fluye. Para va de p_2/p_1 iguales o menores que la relación de la presión crítica, un gas circulará a la velocidad del sonidc presión en un chorro libre circulando a la velocidad del sonido será *igual o mayor* que la presión que lo rc

27. Sale dióxido de carbono a través de un orificio de un depósito en el que la presión manomét es de 7,733 kg/cm² y la temperatura 20° C. ¿Cuál es la velocidad en el chorro (presión barom ca normal)?

Solución:

De la Tabla 1(*A*), $R = 19{,}2$ y $k = 1{,}30$.

$$w_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(7{,}733 + 1{,}033)10.000}{19{,}2(273 + 20)} = 1{,}56 \text{ kg/m}^3$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \text{crítica} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k/k-1)} = \left(\frac{2}{2{,}30}\right)^{1{,}30/0{,}30} = 0{,}542$$

$$\text{Relación } \left(\frac{\text{atmósfera}}{\text{presión depósito}}\right) = \frac{1{,}033}{8{,}766} = 0{,}118$$

Puesto que esta última relación es menor que la relación de presión crítica, la presión de escape del ga $0{,}542 \times p_1$. Por consiguiente, $p_2 = 0{,}542 \times 8{,}733 = 4{,}74$ kg/cm² absolutos.

$$V_2 = c_2 = \sqrt{1{,}3 \times 9{,}8 \times 19{,}2 \times T_2} = \sqrt{245T_2}$$

donde $T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{(k-1)/k} = (0{,}542)^{0{,}30/1{,}30} = 0{,}868$, $T_2 = 254°$ K. Entonces, $V_2 = \sqrt{245 \times 25}$ 24,9 m/seg.

28. Circula nitrógeno a través de un conducto en el que existen cambios de sección. En una secc recta particular la velocidad es de 360 m/seg, la presión 0,84 kg/cm² absolutos y la temperat 32° C. Suponiendo que no hay pérdidas por rozamiento y que se dan condiciones adiabátic (*a*) hallar la velocidad en una sección donde la presión es 1,26 kg/cm² y (*b*) determinar el núm de Mach en esa sección.

Solución:

Para el nitrógeno, $R = 30{,}25$ y $k = 1{,}40$ [de la Tabla 1(*A*) del Apéndice].

(*a*) La ecuación (*D*) del Problema 20, Capítulo 6, para condiciones adiabáticas puede escribirse de la for

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_1}{w_1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right]$$

en donde no se ha considerado la pérdida de carga y $z_1 = z_2$.

El peso específico del nitrógeno en la sección 1 es

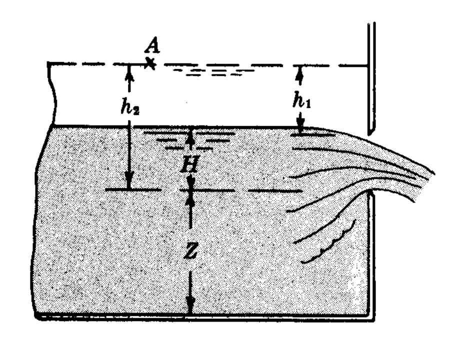
$$w_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{0{,}84 \times 10^4}{30{,}25(273 + 32)} = 0{,}91 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{o usar } p_1/w_1 = RT_1)$$

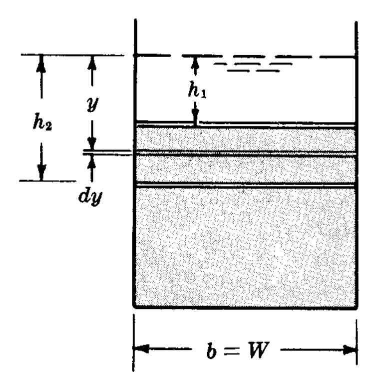
Entonces, $\frac{V_2^2}{2g} - \frac{(360)^2}{2g} = \frac{1{,}40}{0{,}40}(\frac{0{,}84 \times 10^4}{0{,}91})[1 - (\frac{1{,}26}{0{,}84})^{0{,}40/1{,}40}]$ de donde $V_2 = 227$ m/seg.

(*b*) Número de Mach $= \frac{V_2}{c_2} = \frac{227}{\sqrt{kgRT_2}}$, donde $\frac{T_2}{T_1} = (\frac{p_2}{p_1})^{(k-1)/k}$ o $\frac{T_2}{305} = (\frac{1{,}26}{0{,}84})^{2/7} = 1{,}123$.

Luego $T_2 = 342°$ K y número de Mach $= \frac{227}{\sqrt{1{,}4 \times 9{,}8 \times 30{,}25 \times 342}} = 0{,}605$.

29. Desarrollar la fórmula teórica que da el caudal para un vertedero rectangular.





S I

Fig. 9-7

Solución:

Consideremos la abertura rectangular de la Fig. 9-7, que se extiende a toda la anchura W del canal ($b = W$). Con la superficie del líquido en la posición dibujada a trazos, la aplicación del teorema de Bernoulli entre A y una banda elemental de dy de altura en el chorro conduce, para condiciones ideales, a

$$(0 + V_A^2/2g + y) - \text{sin pérdidas} = (0 + V_{ch}^2/2g + 0)$$

donde V_A representa la velocidad media de las partículas que se aproximan a la abertura.

Así, la V_{ch} ideal $= \sqrt{2g(y + V_A^2/2g)}$

y $$(\text{ideal})dQ = dA\, V_{ch} = (b\, dy)V_{ch} = b\sqrt{2g}\,(y + V_A^2/2g)^{1/2}\, dy$$

$$(\text{ideal})Q = b\sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} (y + V_A^2/2g)^{1/2}\, dy$$

Un vertedero existe cuando $h_1 = 0$. Sustituyendo h_2 por H e introduciendo un coeficiente de descarga c para obtener el caudal real se tiene

$$Q = cb\sqrt{2g}\int_0^H (y + V_A^2/2g)^{1/2}\, dy$$
$$= \tfrac{2}{3}cb\sqrt{2g}\,[(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V_A^2/2g)^{3/2}]$$
$$= mb[(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V_A^2/2g)^{3/2}] \qquad (1)$$

Notas:

(1) En un vertedero rectangular con contracciones laterales de la lámina, éstas originan una reducción del caudal. La longitud b se corrige para tener en cuenta esta condición y la fórmula se transforma en

$$Q = m(b - \tfrac{2}{10}H)[(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V_A^2/2g)^{3/2}] \qquad (2)$$

(2) En vertederos grandes y en la mayor parte de los vertederos con contracción lateral de la lámina, altura de velocidad es despreciable y entonces

$Q = m(b - \frac{2}{10}H)H^{3/2}$ para vertederos con contracción (

o $Q = mbH^{3/2}$ para vertederos sin contracción (

(3) El coeficiente de descarga c no es constante. Comprende numerosos factores no incluidos en la der vación, tales como la tensión superficial, viscosidad, distribución no uniforme de la velocidad, flujos secund rios y otros.

30. Deducir la fórmula teórica del caudal a través de un vertedero triangular. Véase la figura adjunta.

Solución:

Del Problema 29 anterior,

$$V_{ch} = \sqrt{2g(y + \text{despreciable } V^2/2g)}$$

y (ideal) $dQ = dA\,V_{ch} = x\,dy\sqrt{2gy}$

Por semejanza de triángulos,

$$\frac{x}{b} = \frac{H-y}{H} \quad \text{y} \quad b = 2H \text{ tg}\frac{\theta}{2}$$

Luego (real) $Q = (b/H)c\sqrt{2g}\int_0^H (H-y)y^{1/2}\,dy$.

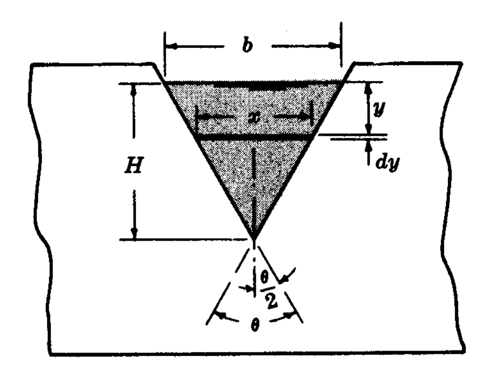


Fig. 9-8

Integrando y sustituyendo $Q = \frac{8}{15}\,c\sqrt{2g}\,H^{5/2}\text{ tg }\frac{1}{2}\theta$ (1

Un vertedero en V corriente es el que tiene una abertura de 90°. En este caso, la expresión (*1*) se transform en $Q = 2{,}36cH^{5/2}$, en donde, para alturas de carga superiores a 0,3 m, un valor *medio* de c es 0,60 aproxima damente.

31. Durante un ensayo sobre un vertedero sin contracciones de 2,4 m de ancho y 0,9 m de altura, l altura de carga se mantuvo constante e igual a 0,300 m. En 36 seg se recogieron 27.000 litros de agua Hallar el factor m del vertedero en las ecuaciones (*1*) y (*4*) del Problema 29.

Solución:

(*a*) Caudal en m³/seg. $Q = 27.000/(1000 \times 36) = 0{,}75$ m³/seg.

(*b*) Velocidad de aproximación. $V = Q/A = 0{,}75/(2{,}4 \times 1{,}2) = 0{,}260$ m/seg. Luego

$$V^2/2g = (0{,}26)^2/2g = 0{,}00345 \text{ m}$$

(*c*) Aplicando (*1*), $Q = mb[(H + V^2/2g)^{3/2} - (V^2/2g)^{3/2}]$

o $$0{,}75 = m \times 2{,}4[(0{,}300 + 0{,}00345)^{3/2} - (0{,}00345)^{3/2}]$$

y $m = 1{,}87$.

Aplicando (*4*), $Q = 0{,}75 = mbH^{3/2} = m \times 2{,}4 \times (0{,}300)^{3/2}$

y $m = 1{,}90$ (aproximadamente 1,6 % mayor al despreciar el término de la velocidad de aproximación)

32. Determinar el caudal a través de un vertedero sin contracciones de 3,0 m de largo y 1,2 m de alto bajo una altura de carga de 0,900 m. El valor de m es 1,90.

Solución:

Puesto que el término de la altura de velocidad no puede calcularse, un caudal aproximado es

$$Q = mbH^{3/2} = 1{,}90(3)(0{,}900)^{3/2} = 4{,}867 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Para este caudal, $V = 4{,}867/(3 \times 2{,}1) = 0{,}772$ m/seg y $V^2/2g = 0{,}030$ m. Aplicando la ecuación (*1*) del Problema 29,

$$Q = 1{,}90(3)[(0{,}900 + 0{,}030)^{3/2} - (0{,}030)^{3/2}] = 5{,}082 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Este segundo cálculo muestra un incremento de 0,215 m³/seg, o sea, aproximadamente un 4,4 % sobre el primer cálculo. Generalmente no están justificados cálculos más finos, es decir, más allá de la exactitud de la propia fórmula. Sin embargo, y a título ilustrativo, la velocidad de aproximación revisada sería

$$V = 5{,}082/(3 \times 2{,}1) = 0{,}807 \text{ m/seg} \quad \text{y} \quad V^2/2g = 0{,}033 \text{ m}$$

y

$$Q = 1{,}90(3)[(0{,}900 + 0{,}033)^{3/2} - (0{,}033)^{3/2}] = 5{,}102 \text{ m}^3\text{/seg}$$

33. Un vertedero sin contracciones de 7,5 m de largo desagua 10 m³/seg a un canal. El factor del vertedero es $m = 1{,}88$. ¿Qué altura Z (precisión de 1 cm) debe tener el vertedero si la profundidad del agua detrás del vertedero no excede de 1,8 m?

Solución:

Velocidad de aproximación $V = Q/A = 10/(7{,}5 \times 1{,}8) = 0{,}74$ m/seg.

Entonces, $$10 = 1{,}88 \times 7{,}5\left[\left(H + \frac{(0{,}74)^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{(0{,}74)^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \quad \text{y} \quad H = 0{,}77 \text{ m.}$$

Altura del vertedero $Z = 1{,}80 - 0{,}77 = 1{,}03$ m.

34. Se va a instalar en un canal de 2,4 m de ancho un vertedero con contracciones de 1,2 m de altura. El caudal máximo a través del vertedero es de 1,62 m³/seg cuando la profundidad total detrás del vertedero es 2,1 m. ¿Cuál será la anchura del vertedero a instalar si $m = 1{,}87$?

Solución:

Velocidad de aproximación $V = Q/A = 1{,}62/(2{,}4 \times 2{,}1) = 0{,}321$ m/seg. Como en este caso la altura de velocidad es despreciable, se tiene

$$Q = m(b - \tfrac{2}{10}H)(H)^{3/2}, \qquad 1{,}62 = 1{,}87(b - \tfrac{2}{40} \times 0{,}90)(0{,}90)^{3/2}, \qquad b = 1{,}20 \text{ m.}$$

35. El agua evacuada a través de un orificio de 15 cm de diámetro ($c = 0{,}600$), bajo una altura de carga de 3,0 m, pasa a un canal rectangular y por un vertedero con contracciones. El canal tiene 1,8 m de ancho y, para el vertedero, $Z = 1{,}50$ m y $b = 0{,}30$ m. Determinar la profundidad de agua en el canal si $m = 1{,}84$.

Solución:

La descarga a través del orificio es

$$Q = cA\sqrt{2gh} = 0{,}600 \times \tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2\sqrt{2g(3{,}0)} = 0{,}081 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Para el vertedero, $$Q = m(b - \tfrac{2}{10}H)(H)^{3/2} \quad \text{(se desprecia la altura de velocidad)}$$

o $$0{,}081 = 1{,}84(0{,}30 - 0{,}20H)H^{3/2} \quad \text{y} \quad 1{,}5H^{3/2} - H^{5/2} = 0{,}220$$

Por tanteos sucesivos, $H = 0{,}33$ m; y la profundidad $= Z + H = 1{,}50 + 0{,}33 = 1{,}83$ m.

36. El caudal de agua a través de un vertedero triangular de 45° es de 0,020 m³/seg. Determinar la altura de carga sobre el vertedero para $c = 0{,}580$.

Solución:

$$Q = \tfrac{8}{15}c\sqrt{2g}\,(\text{tg } \tfrac{1}{2}\theta)H^{5/2}, \qquad 0{,}020 = \tfrac{8}{15}(0{,}580)\sqrt{2g}\,(\text{tg } 22{,}5°)H^{5/2}, \qquad H = 0{,}263 \text{ m}$$

37. ¿Cuál deberá ser la longitud de un vertedero trapezoidal (Cipolletti) de manera que la altura de carga sea 0,47 m para un caudal de 3,45 m³/seg?

Solución:

$$Q = 1{,}861bH^{3/2}, \qquad 3{,}45 = 1{,}861b(0{,}47)^{3/2}, \qquad b = 5{,}75 \text{ m}$$

38. Establecer la fórmula para determinar el tiempo de descenso del nivel de un líquido en un depósito de sección recta constante mediante un orificio. Véase la figura adjunta.

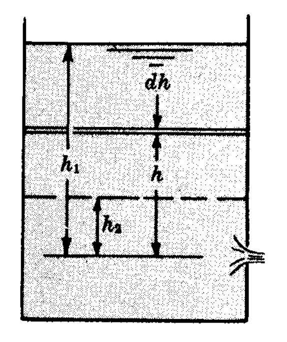


Fig. 9-9

Solución:

Puesto que la altura de carga varía con el tiempo, sabemos que $\partial V/\partial t \neq 0$, es decir, el flujo no es estacionario. Esto significa que la ecuación de energía debe corregirse introduciendo un término de aceleración, que complica mucho la solución. En tanto que la altura de carga no varíe demasiado rápidamente, no se introducirá un apreciable error al suponer el flujo estacionario y, por consiguiente, despreciar el término de carga de aceleración. En el Problema 39 se da una comprobación aproximada sobre el error introducido.

CASO A.

Si *no existe* flujo de entrada, el caudal instantáneo será

$$Q = cA_o\sqrt{2gh} \quad \text{m}^3/\text{seg}$$

En un intervalo de tiempo dt, el pequeño volumen dV evacuado será $Q\,dt$. En el mismo intervalo de tiempo la altura de carga disminuirá dh m y el volumen evacuado será el área del depósito A_T por dh. Igualando esto valores,

$$(cA_o\sqrt{2gh})\,dt = -A_T\,dh$$

donde el signo negativo indica que h disminuye al aumentar t. Despejando t, se obtiene

$$t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{-A_T}{cA_o\sqrt{2g}}\int_{h_1}^{h_2} h^{-1/2}\,dh$$

o

$$t = t_2 - t_1 = \frac{2A_T}{cA_o\sqrt{2g}}(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \qquad (1$$

Al aplicar esta expresión puede emplearse un valor medio del coeficiente de descarga c sin que ello produzca un error significativo en el resultado. Como h_2 es próximo de cero, se formará un vórtice y el orificio dejará de dar un flujo completo. Sin embargo, haciendo $h_2 = 0$ no se originará en la mayoría de los casos un error importante.

La ecuación (*1*) puede escribirse también, al multiplicar y dividir por $(h_1^{1/2} + h_2^{1/2})$, de la forma

$$t = t_2 - t_1 = \frac{A_T(h_1 - h_2)}{\frac{1}{2}(cA_o\sqrt{2gh_1} + cA_o\sqrt{2gh_2})} \qquad (2$$

Teniendo en cuenta que el volumen evacuado en el tiempo $(t_2 - t_1)$ es $A_T(h_1 - h_2)$, esta ecuación se simplifica a

$$t = t_2 - t_1 = \frac{\text{volumen evacuado}}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)} = \frac{\text{volumen evacuado en m}^3}{\text{caudal medio } Q \text{ en m}^3/\text{seg}} \qquad (3$$

El Problema 14 ilustrará un caso en que la sección recta del depósito no es constante aunque pueda expresarse como una función de h. Otros casos, tales como recipientes vaciándose, se salen del objeto de este libro (véanse los textos de Water Supply Engineering).

Caso B.

Con un flujo de entrada constante menor que el flujo a través del orificio,

$$-A_T\,dh = (Q_{sal} - Q_{en})dt \qquad \text{y} \qquad t = t_2 - t_1 = \int_{h_1}^{h_2}\frac{-A_T\,dh}{Q_{sal} - Q_{en}}$$

Si Q_e es superior a Q_s, la altura de carga aumentaría como es lógico.

39. Un depósito de 1,2 m de diámetro contiene aceite de 0,75 de densidad relativa. Cerca del fondo del depósito se instala un corto tubo de 7,5 cm de diámetro ($c = 0{,}85$). ¿Cuánto tiempo tardará en bajar el nivel del aceite de 1,8 m a 1,2 m por encima del tubo?

Solución:

$$t = t_2 - t_1 = \frac{2A_T}{cA_o\sqrt{2g}}(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) = \frac{2 \times \frac{1}{4}\pi(1{,}2)^2}{0{,}85 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}075)^2\sqrt{2g}}(1{,}8^{1/2} - 1{,}2^{1/2}) = 33{,}3 \text{ seg}$$

A fin de evaluar el efecto aproximado al suponer el flujo estacionario, el cambio de velocidad con el tiempo t es

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cong \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2g(1{,}8)} - \sqrt{2g(1{,}2)}}{33{,}3} = \frac{4{,}425(1{,}340 - 1{,}095)}{33{,}3} = 0{,}0325 \text{ m/seg}^2$$

Esto representa aproximadamente $\frac{1}{3}$% de g, o sea, una despreciable adición a la aceleración g. Una tal precisión no está justificada en estos ejemplos de flujo estacionario, particularmente cuando los coeficientes de los orificios no se conocen con tanta exactitud.

40. La altura de carga inicial sobre un orificio era 2,7 m y cuando el flujo se detuvo la altura de carga medida era 1,2 m. ¿Bajo qué altura de carga H constante evacuaría el mismo orificio el mismo volumen de agua en el mismo intervalo de tiempo? Se supone constante el coeficiente c.

Solución:

Volumen bajo carga decreciente = volumen bajo carga constante

$$\tfrac{1}{2}cA_o\sqrt{2g}\,(h_1^{1/2} + h_2^{1/2}) \times t = cA_o\sqrt{2gH} \times t$$

Sustituyendo y operando, $\frac{1}{2}(\sqrt{2{,}7} + \sqrt{1{,}2}) = \sqrt{H}$ y $H = 1{,}88$ m.

41. Un depósito tiene la forma de un cono truncado con 2,4 m de diámetro en la base superior y 1,2 m de diámetro en la base inferior. El fondo contiene un orificio cuyo coeficiente medio de descarga es 0,60. ¿Cuál deberá ser el diámetro del orificio para vaciar el depósito en 6 minutos si la altura de carga inicial es de 3,0 m? Véase la figura adjunta.

Solución:

Del Problema 38,

$$Q\,dt = -A_T\,dh$$
$$cA_o\sqrt{2gh}\,dt = -\pi x^2\,dh$$

y, por semejanza de triángulos, $x/1{,}2 = (3 + h)/6$. Entonces,

$$(0{,}60 \times \tfrac{1}{4}\pi d_o^2\sqrt{2g})dt = -\pi\frac{(3+h)^2}{25}h^{-1/2}\,dh$$

$$d_o^2\int dt = \frac{-4\pi}{25\pi \times 0{,}60\sqrt{2g}}\int_3^0 (3+h)^2 h^{-1/2}\,dh$$

Puesto que $\int dt = 360$ segundos,

$$d_o^2 = \frac{+4}{360 \times 25 \times 0{,}60\sqrt{2g}}\int_0^3 (9h^{-1/2} + 6h^{1/2} + h^{3/2})dh$$

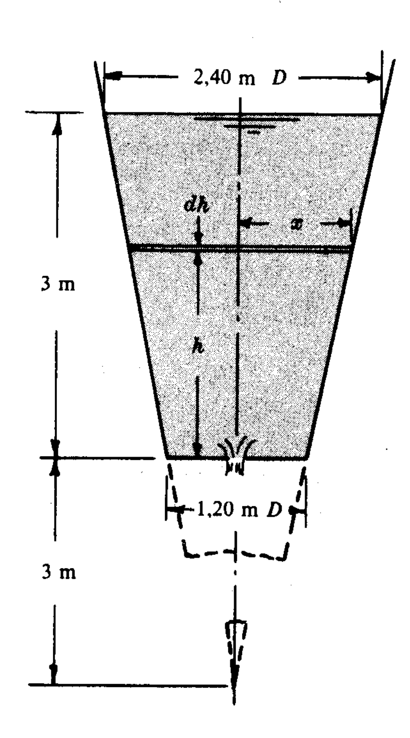


Fig. 9-10

Integrando y operando, obtenemos $d^2 = 0{,}00975$ y $d = 0{,}0987$ m. Emplear $d = 10$ cm.

42. Dos depósitos cuadrados tienen una pared común en la que está dispuesto un orificio que tiene 230 cm^2 de área y un coeficiente igual a 0,80. El depósito A tiene 2,4 m de lado y el nivel inicial de agua está a 3 m por encima del orificio. El tanque B tiene 1,2 m de lado y el nivel inicial de agua está a 0,9 m por encima del orificio. ¿Cuánto tiempo tardará el agua en alcanzar el mismo nivel en los dos depósitos?

Solución:

En un instante dado la diferencia de nivel de las superficies puede tomarse como altura de carga h. Entonces,

$$Q = 0{,}80 \times 0{,}023\sqrt{2gh}$$

y la variación de volumen $dv = Q\,dt = 0{,}0814\sqrt{h}\,dt$.

En este intervalo de tiempo dt la variación de la altura de carga es dh. Considérese que el nivel en el depósito A desciende dy; entonces el correspondiente ascenso de nivel en el depósito B será la relación de las área por dy, o sea, $(5{,}76/1{,}44)dy$. La variación de la altura de carga es, pues,

$$dh = dy + (5{,}76/1{,}44)dy = 5dy$$

La variación de volumen es $dv = 2{,}4 \times 2{,}4 \times dy \quad [= 1{,}2 \times 1{,}2 \times (5{,}76/1{,}44)dy]$

o, en función de dh, $dv = (5{,}76/5)dh = 1{,}152dh$

Igualando los valores de dv, $0{,}0814\sqrt{h}\,dt = -1{,}1520dh$, $dt = \dfrac{-1{,}1520}{0{,}0814}\displaystyle\int_{2,1}^{0} h^{-1/2}\,dh$, $t = 41{,}0$ seg.

El problema puede resolverse también aplicando el caudal medio expresado en la ecuación (3) del Problema 38.

$$Q_m = \tfrac{1}{2}[0{,}80 \times 0{,}023\sqrt{2g(2{,}1)}] = 0{,}059 \text{ m}^3\text{/seg}$$

El depósito A baja y metros mientras el B sube $(5{,}76/1{,}44)y$ metros con la variación total de nivel de 2,1 m; entonces, $y + 4y = 2{,}1$ e $y = 0{,}42$ m. Así, pues, variación en volumen $= 2{,}4 \times 2{,}4 \times 0{,}42 = 2{,}42$ m^3 y

$$t = \frac{\text{variación en volumen}}{Q \text{ medio}} = \frac{2{,}42}{0{,}059} = 41{,}0 \text{ seg}$$

43. Desarrollar la expresión que da el tiempo de descenso del nivel de un líquido en un depósito, tanque o canal mediante un vertedero sin contracciones.

Solución:

$Q\,dt = -A_T\,dH$ (como antes) o $(mLH^{3/2})dt = -A_T\,dH$.

Luego $t = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{-A_T}{mL}\int_{H_1}^{H_2} H^{-3/2}\,dH$ o $t = t_2 - t_1 = \dfrac{2A_T}{mL}(H_2^{-1/2} - H_1^{-1/2})$.

44. Un canal rectangular de 15 m de largo y 3 m de ancho alimenta un vertedero sin contracciones bajo una altura de carga de 0,300 m. Si la alimentación del canal se corta, ¿cuánto tiempo tardará en descender la altura de carga sobre el vertedero a 10 cm? Emplear $m = 1{,}83$.

Solución:

Del Problema 43, $t = \dfrac{2(15 \times 3)}{1{,}83 \times 3}\left[\dfrac{1}{\sqrt{0{,}100}} - \dfrac{1}{\sqrt{0{,}300}}\right] = 21{,}9$ seg.

45. Determinar el tiempo necesario para establecer el flujo en una tubería de longitud L bajo una altura de carga H constante descargando en la atmósfera, suponiendo una tubería inelástica, un fluido incompresible y un factor de fricción f constante.

Solución:

La velocidad final V_f puede determinarse a partir de la ecuación de Bernoulli

$$H - f\frac{L}{d}\frac{V_f^2}{2g} - k\frac{V_f^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_f^2}{2g} + 0\right)$$

En esta ecuación, las pérdidas menores se representan por el término $kV_f^2/2g$, y la energía en el chorro al final de la tubería es energía cinética representada por $V_f^2/2g$. Esta ecuación puede escribirse de la forma

$$\left[H - f\frac{L_E}{d}\frac{V_f^2}{2g}\right] = 0 \qquad (1)$$

donde L_E es la longitud equivalente de la tubería para el sistema (véase Problema 6, Capítulo 8).

De la ecuación del movimiento de Newton, en un instante dado

$$w(AH_e) = M\frac{dV}{dt} = \frac{w}{g}(AL)\frac{dV}{dt}$$

donde H_e es la altura de carga efectiva en ese instante y V es una función del tiempo y no de la longitud. Reagrupando la ecuación,

$$dt = \left(\frac{wAL}{gwAH_e}\right)dV \qquad \text{o} \qquad dt = \frac{L\,dV}{gH_e} \qquad (2)$$

En la ecuación (*1*), para todos los valores intermedios de V el término entre corchetes no es cero, sino la altura de carga efectiva utilizable para causar la aceleración del líquido. Por consiguiente, la expresión (*2*) puede escribirse de la forma

$$\int dt = \int \frac{L\,dV}{g\left(H - f\frac{L_E}{d}\frac{V^2}{2g}\right)} = \int \frac{L\,dV}{g\left(f\frac{L_E}{d}\frac{V_f^2}{2g} - f\frac{L_E}{d}\frac{V^2}{2g}\right)} \qquad (3A)$$

Puesto que de (*1*), $\dfrac{fL_E}{2gd} = \dfrac{H}{V_f^2}$, $\displaystyle\int dt = \int \frac{L\,dV}{g(H - HV^2/V_f^2)}$ (*3B*)

o

$$\int_0^t dt = \frac{L}{gH}\int_0^{V_f} \frac{V_f^2}{V_f^2 - V^2}\,dV$$

Integrando,

$$t = \frac{LV_f}{2gH}\ln\left(\frac{V_f + V}{V_f - V}\right) \qquad (4)$$

Se observará que cuando V se aproxima a V_f, $(V_f - V)$ tiende a cero y, por tanto, matemáticamente, t tiende a infinito.

Empleando el símbolo ϕ para la relación V/V_f, la ecuación (*3B*) puede reagruparse de la forma

$$\frac{dV}{dt} = \frac{gH}{L}(1 - V^2/V_f^2) = \frac{gH}{L}(1 - \phi^2) \qquad (5)$$

Haciendo $V = V_f\phi$ y $\dfrac{dV}{dt} = V_f(d\phi/dt)$, obtenemos

$$\frac{d\phi}{1 - \phi^2} = \frac{gH\,dt}{V_f L}$$

Integrando,

$$\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \phi}{1 - \phi}\right) = \frac{gHt}{V_f L} + C$$

y cuando $t = 0$, $C = 0$. Luego

$$\frac{1 + \phi}{1 - \phi} = e^{2gHt/V_f L}$$

Utilizando las funciones hiperbólicas, $\phi = \text{Th}\,(gHt/V_f L)$, y puesto que $\phi = V/V_f$,

$$V = V_f\ \text{Th}\,\frac{gHt}{V_f L} \qquad (6)$$

La ventaja de la expresión (*6*) es que el valor de la velocidad V en función de la velocidad final V_f puede calcularse para cualquier tiempo.

46. Simplificar la ecuación (*4*) del problema anterior que da el tiempo necesario para establecer el flujo en los casos en los que la velocidad V sea igual a (*a*) 0,75, (*b*) 0,90, (*c*) 0,99 veces la velocidad final V_f.

Solución:

$$(a)\quad t = \frac{LV_f}{2gH}\ln\left[\frac{V_f + 0{,}75V_f}{V_f - 0{,}75V_f}\right] = \left(\frac{LV_f}{2gH}\right)(2{,}3026)\ \lg\frac{1{,}75}{0{,}25} = 0{,}973\,\frac{LV_f}{gH}$$

$$(b)\quad t = \frac{LV_f}{2gH}\ln\frac{1{,}90}{0{,}10} = \left(\frac{LV_f}{2gH}\right)(2{,}3026)\ \lg\frac{1{,}90}{0{,}10} = 1{,}472\,\frac{LV_f}{gH}$$

$$(c)\quad t = \frac{LV_f}{2gH}\ln\frac{1{,}99}{0{,}01} = \left(\frac{LV_f}{2gH}\right)(2{,}3026)\ \lg\frac{1{,}99}{0{,}01} = 2{,}647\,\frac{LV_f}{gH}$$

47. De un depósito sale agua a través de una tubería ($f = 0{,}02$) de 600 m de longitud y 30 cm de diámetro. La altura de carga es constante e igual a 6 m. Las válvulas y conexiones en la línea producen unas pérdidas evaluadas en $21(V^2/2g)$. Después de abrir una válvula, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzarse una velocidad equivalente al 90 % de la velocidad final?

Solución:

La aplicación de la ecuación de Bernoulli entre la superficie del depósito y el extremo de la tubería da

$$(0 + 0 + H) - [f(L/d) + 21{,}0]V^2/2g = (0 + V^2/2g + 0)$$

o sea, $H = [0{,}02(600/0{,}3) + 22]V^2/2g = 62(V^2/2g)$. Aplicando el procedimiento empleado en el Problema 6 del Capítulo 8,

$$62(V^2/2g) = 0{,}02(L_E/0{,}3)(V^2/2g) \qquad \text{o} \qquad L_E = 930\ \text{m}$$

Puesto que la ecuación (*4*) del Problema 45 no contiene el término L_E, la velocidad final debe calcularse como sigue:

$$H = f\frac{L_E}{d}\frac{V_f^2}{2g} \qquad \text{o} \qquad V_f = \sqrt{\frac{2gdH}{fL_E}} = \sqrt{\frac{19{,}6(0{,}3)(6)}{0{,}02(930)}} = 1{,}38\ \text{m/seg}$$

Sustituyendo en (*b*) en el Problema 46, se obtiene $t = 1{,}472\,\dfrac{(600)(1{,}38)}{(9{,}8)(6)} = 20{,}7$ segundos.

48. En el Problema 47, ¿qué velocidad alcanzará en 10 segundos y en 15 segundos?

Solución:

En la ecuación (*6*) del Problema 45, se calcula gHt/V_fL.

$$\text{Para 10 seg,}\quad \frac{9{,}8 \times 6 \times 10}{1{,}38 \times 600} = 0{,}710. \qquad \text{Para 15 seg,}\quad \frac{9{,}8 \times 6 \times 15}{1{,}38 \times 600} = 1{,}065.$$

Empleando una tabla de funciones hiperbólicas y la ecuación (*6*), $V = V_f\ \text{Th}\ gHt/V_fL$, obtenemos

para 10 seg, $V = 1{,}38\ \text{Th}\ 0{,}710 = 1{,}38 \times 0{,}611 = 0{,}843$ m/seg
para 15 seg, $V = 1{,}38\ \text{Th}\ 1{,}065 = 1{,}38 \times 0{,}788 = 1{,}087$ m/seg

Se observará que el valor de V/V_f está representado por el valor de la tangente hiperbólica. En la solución anterior, el 61 % y el 79 % de la velocidad final se alcanzan en 10 y 15 segundos, respectivamente.

Problemas propuestos

49 A través de una tubería en la que está centrado un tubo de Pitot estático, que tiene un coeficiente de 0,97, circula trementina a 20° C. El manómetro diferencial de mercurio indica una diferencia de lecturas de 10 cm. ¿Cuál es la velocidad en el centro? *Sol.* 5,22 m/seg

50 Por un tubo de Pitot estático circula aire a 49° C a la velocidad de 18 m/seg. Si el coeficiente del tubo es 0,95, calcular la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial de agua, suponiendo que el peso específico del aire a la presión atmosférica es constante. *Sol.* 2,0 cm

51 La pérdida de carga a través de un orificio de 5 cm de diámetro bajo una cierta altura de carga es 0,162 m y la velocidad del agua en el chorro es 6,75 m/seg. Si el coeficiente de descarga es 0,61, determinar la carga que produce el flujo, el diámetro del chorro y el coeficiente de velocidad. *Sol.* 2,49 m, 3,97 cm, 0,967

52 ¿Qué diámetro de orificio normal se requiere para evacuar 0,0151 m^3/seg de agua bajo una altura de carga de 8,55 m? *Sol.* 5 cm

53 Un orificio aguzado tiene un diámetro de 2,5 cm y unos coeficientes de velocidad y contracción de 0,98 y 0,62, respectivamente. Si el chorro cae 0,924 m en una distancia horizontal de 2,457 m, determinar el caudal en m^3/seg y la altura de carga sobre el orificio. *Sol.* 0,0017 m^3/seg, 1,666 m

54 A través de un orificio de 7,5 cm de diámetro circula, desde un depósito cerrado, aceite de densidad relativa 0,800 a razón de 0,025 m^3/seg. El diámetro del chorro es 5,76 cm. El nivel del aceite es 7,35 m por encima del orificio y la presión de aire es equivalente a −15 cm de mercurio. Determinar los tres coeficientes del orificio. *Sol.* 0,584, 0,590, 0,990

55 Con referencia a la Fig. 9-11, el orificio de 7,5 cm de diámetro tiene coeficientes de velocidad y contracción de 0,950 y 0,632, respectivamente. Determinar (*a*) el caudal para la lectura manométrica de mercurio indicada y (*b*) la potencia del chorro. *Sol.* 0,0281 m^3/seg, 1,94 CV

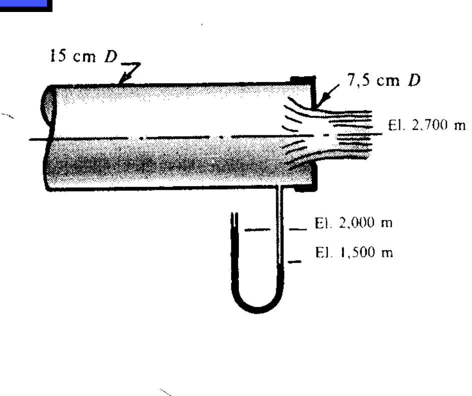


Fig. 9-11

Fig. 9-12

56 Con referencia a la Fig. 9-12, fuel-oil pesado a 15,5° C circula a través de un orificio de 7,5 cm al final de la tubería, originando la diferencia de nivel de mercurio en el tubo manométrico. Determinar la potencia del chorro. *Sol.* 2,8 CV

57 En algunos casos, las locomotoras de vapor toman agua por medio de una cuchara que se sumerge en un largo y estrecho canal situado entre los raíles. Si la elevación sobre el canal es de 2,7 m, calcular la velocidad en km/h a que debe marchar el tren (despreciando el rozamiento). *Sol.* 26,2 km/h

58 Circula aire a 15,5° C a través de un amplio conducto y de ahí a través de un orificio de 7,5 cm de diámetro practicado en capa fina (c = 0,62). Un tubo manométrico conteniendo agua da una lectura de 3,1 cm. Considerando que el peso específico del aire se mantiene constante, ¿cuál es el caudal, en kg/min, a través del orificio? *Sol.* 4,48 kg/min

59 Un aceite de 0,926 de densidad relativa y viscosidad de 350 Saybolt-segundos circula a través de un orificio de 7,5 cm de diámetro situado en una tubería de 12,5 cm de diámetro. El manómetro diferencial registra una caída de presión de 1,5 kg/cm^2. Determinar el caudal Q. *Sol.* 0,05235 m^3/seg

60. Una boquilla de 5 cm de diámetro en la sección de salida, se conecta en la extremidad de una tubería horizontal de 20 cm de diámetro. Los coeficientes de velocidad y contracción son, respectivamente, 0,976 y 0,909. Un manómetro conectado en la base mayor de la boquilla y situado a 2,15 m sobre su línea central da una lectura de 2,25 kg/cm^2. Determinar el caudal de agua en m^3/seg. *Sol.* 0,0384 m^3/seg

61. Cuando el caudal de agua que atraviesa un venturímetro horizontal (c = 0,95) de 30 cm × 15 cm es de 0,111 m^3/seg, hallar la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial de mercurio conectado al medidor. *Sol.* 16,6 cm

62. Cuando el caudal de agua que pasa a través de un venturímetro de 30 cm × 15 cm es de 0,115 m^3/seg, el manómetro diferencial indica una diferencia de lecturas de 2,20 m. ¿Cuál es el coeficiente de descarga del venturímetro? *Sol.* 0,960

63. La pérdida de carga a la entrada de la garganta de un venturímetro de 25 cm × 12,5 cm es 1/16 la altura de velocidad en la garganta. Cuando el manómetro diferencial de mercurio señala una diferencia de lecturas de 10 cm, ¿cuál es el caudal? *Sol.* 0,061 m^3/seg

64. Por un venturímetro de 30 cm × 15 cm (c = 0,985) pasan 0,0547 m^3/seg de agua, siendo la diferencia de lecturas del manómetro diferencial 0,63 m. ¿Cuál es la densidad relativa del líquido del manómetro? *Sol.* 1,75

65. A través de un venturímetro de 30 cm × 15 cm circula metano a 15,5° C a razón de 7,5 kg/seg. La presión a la entrada del medidor es 3,5 kg/cm^2 absolutos. Empleando k = 1,31, R = 52,8, ν = 1,8 × 10^{-5} m^2/seg a 1 atmósfera y W = 0,666 kg/m^3 a 20° C y 1 atmósfera, calcular la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial de mercurio. *Sol.* 0,354 m

66. Circula agua por una tubería de 15 cm en la que se ha instalado una boquilla de aforo del Problema 66 a 27° C a razón de 0,045 m^3/seg. ¿Cuál será la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial? (Emplear Diagrama D.) *Sol.* 0,403 m

67. Por la boquilla de aforo del Problema 66 circula agua a 27° C a razón de 0,045 m^3/seg. ¿Cuál será la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial? (Emplear el Diagrama D.) *Sol.* 0,403 m

68. Si en el Problema 67 circula un aceite impermeable al polvo a 27° C a razón de 0,045 m^3/seg, ¿cuál será la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial de mercurio? *Sol.* 0,382 m

69. Si circula aire a 20° C por la misma tubería y boquilla del Problema 66, ¿cuántos kilogramos por segundo circularán si las presiones absolutas en la tubería y en el chorro son 2,10 kg/cm^2 y 1,75 kg/cm^2, respectivamente? *Sol.* 1,662 kg/seg

70. ¿Qué profundidad de agua debe existir aguas arriba de un vertedero sin contracciones de cresta viva de 1,5 m de largo y 1,2 m de alto cuando pasa a través de un canal de 0,27 m^3/seg? (Aplicar la fórmula de Francis.) *Sol.* 1,414 m

71. Un caudal de 0,85 m^3/seg circula en un canal rectangular de 1,20 m de profundidad y 1,8 m de anchura. Hallar la altura a la que debería colocarse la cresta de un vertedero sin contracciones de cresta viva para que el agua no rebose los bordes del canal. (m = 1,84.) *Sol.* 0,80 m

72. Un caudal de 10,5 m^3/seg pasa a través de un vertedero sin contracciones cuya longitud es 4,8 m. La profundidad total aguas arriba del vertedero no debe exceder de 2,4 m. Determinar la altura a que debería situarse la cresta del vertedero para transportar este caudal. (m = 1,84.) *Sol.* 1.326 m

73. Un vertedero sin contracciones (m = 1,84) bajo una carga constante de 0,10 m alimenta un depósito que tiene un orificio de 7,5 cm de diámetro. El vertedero, de 0,60 m de largo y 0,80 m de alto, se instala en un canal rectangular. La pérdida de carga a través del orificio es 0,60 m y c_c = 0,65. Determinar la altura de carga a la cual asciende el agua en el depósito y el coeficiente de velocidad para el orificio.
Sol. h = 8,28 m, c_v = 0,96

74. Un vertedero con contracciones de 1,2 m de largo está situado en un canal rectangular de 2,7 m de ancho. La altura de la cresta del vertedero es 1,10 m y la altura de carga 37,5 cm. Determinar el caudal, empleando m = 1,87. *Sol.* 0,483 m^3/seg

75. Un vertedero triangular tiene un ángulo de 90°. ¿Qué altura de carga producirá 4800 l/min? *Sol.* 0,322 m

76. Una tubería de 90 cm de diámetro, que contiene un venturímetro de 90 cm × 30 cm, suministra agua a un canal rectangular. La presión a la entrada del venturímetro es 2,10 kg/cm^2 y en la garganta 0,60 kg/cm^2. Un vertedero sin contracciones (m = 1,84), de 0,90 m de alto, situado en el canal, descarga bajo una altura de carga de 22,5 cm. ¿Cuál es la anchura probable del canal? *Sol.* 6,20 m

77. Circula agua a través de un vertedero sin contracciones (m = 1,84) de 3,6 m de largo y 0,6 m de alto. Para una carga de 0,360 m, hallar el caudal en m^3/seg. *Sol.* 1,477 m^3/seg

78. Un depósito de 3,6 m de largo y 1,2 m de ancho contiene 1,2 m de agua. ¿Cuánto tiempo tardará en bajar el agua a 0,3 m de profundidad si en el fondo del depósito se abre un orificio (c = 0,60) de 7,5 cm de diámetro? *Sol.* 404 seg

79. Un depósito rectangular de 4,8 m por 1,2 m contiene 1,2 m de aceite de 0,75 de densidad relativa. Si tarda 10 minutos y 5 segundos en vaciarse el depósito a través de un orificio de 10 cm de diámetro situado en el fondo, determinar el valor medio del coeficiente de descarga. *Sol.* 0,60

80. En el Problema 79, para un coeficiente de descarga de 0,60, ¿a qué altura quedará el aceite en el depósito después de estar fluyendo por el orificio durante 5 minutos? *Sol.* 0,305 m

81. Un depósito de sección recta trapezoidal tiene una longitud constante e igual a 1,5 m. Cuando el agua está a una altura de 2,4 por encima de un orificio (c = 0,65) de 5 cm de diámetro, la anchura de la superficie de agua es 1,8 m y, a 0,9 m de altura, la anchura de la superficie de agua es 1,2 m. ¿Cuánto tiempo tardará en bajar el nivel del agua de 2,4 m a 0,9 m? *Sol.* 470 seg

82. Al final de un depósito de sección cuadrada de 3 m de lado está situado un vertedero sin contracciones. Si la altura de carga sobre el vertedero es 0,6 m, ¿cuánto tiempo tardarán en salir 3,6 m^3 de agua del depósito? (m = 1,84.) *Sol.* 3,08 seg

83. Un canal rectangular de 18 m de largo por 3 m de ancho desagua su flujo a través de un vertedero sin contracciones de 3 m de largo bajo una altura de carga de 0,3 m. Si la alimentación se corta instantáneamente, ¿cuál será la altura de carga sobre el vertedero a los 36 segundos? (m = 1,84.) *Sol.* 0,074 m

84. Dos orificios situados en la pared de un depósito están distanciados 1,8 m verticalmente uno de otro. La profundidad total del agua en el depósito es 4,2 m y la altura de carga sobre el orificio superior es 1,2 m. Para los mismos valores de c_v, demostrar que los chorros chocan en el mismo punto del plano horizontal sobre el que reposa el depósito.

85. Un orificio de 15 cm de diámetro evacua 0,34 m^3/seg de agua bajo una altura de carga de 44 m. Este caudal pasa un canal rectangular de 3,6 m de ancho alcanzando una altura de 0,9 m, y de ahí a un vertedero con contracciones. La altura de carga sobre el vertedero es 0,3 m. ¿Cuál es la longitud del vertedero y el coeficiente del orificio? *Sol.* 1,186 m, c = 0,655

86. La altura de carga sobre un vertedero sin contracciones G de 3,6 m de largo es 0,33 m y la velocidad de aproximación puede despreciarse. Para el sistema indicado en la Fig. 9-13, ¿cuál es la altura de presión en B? Dibujar las líneas de alturas piezométricas. *Sol.* 63,6 m

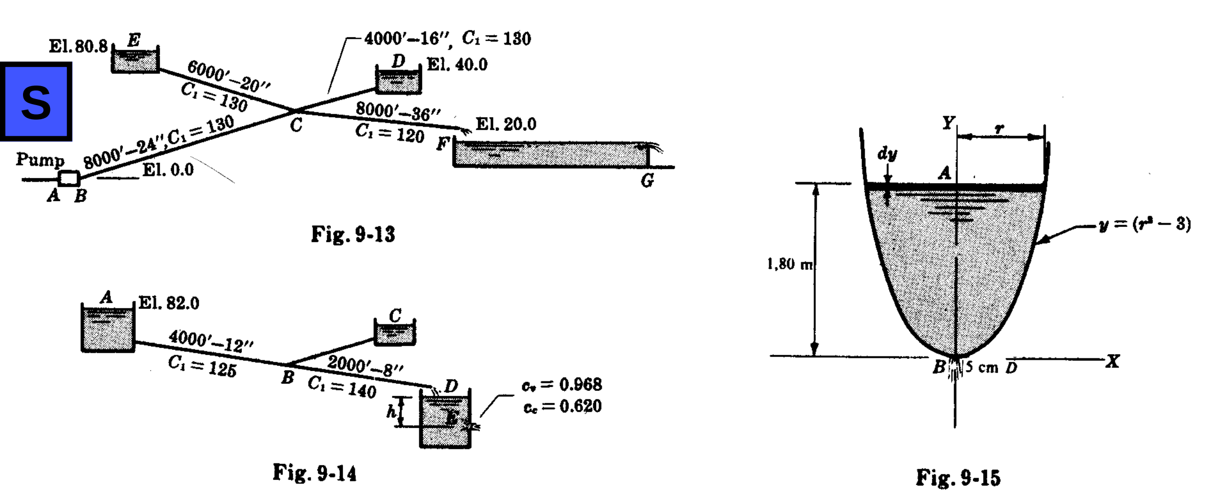


Fig. 9-13

Fig. 9-14

Fig. 9-15

87. En la Fig. 9-14 la elevación de la línea de alturas piezométricas en B es 15 m y las tuberías BC y BD están dispuestas de modo que el caudal se divida por igual a partir de B. ¿Cuál es la elevación de la extremidad de la tubería en D y cuál es la altura de carga que habrá sobre el orificio E de 10 cm de diámetro? *Sol.* El. 7,2 m, h = 6,33 m

88. Para el depósito representado en la Fig. 9-15, empleando un coeficiente medio de descarga de 0,65 para el orificio de 5 cm de diámetro, ¿cuánto tiempo tardará en bajar el nivel del líquido 1,2 m? *Sol.* 660 seg

Capítulo 10

Flujo en canales abiertos

CANAL ABIERTO

Un canal abierto es un conducto en el que el líquido fluye con una superficie sometida a la presión atmósferica. El flujo se origina por la pendiente del canal y de la superficie del líquido. La solución exacta de los problemas de flujo es difícil y depende de datos experimentales que deben cumplir una amplia gama de condiciones.

FLUJO UNIFORME Y PERMANENTE

El flujo uniforme y permanente comprende dos condiciones de flujo. El flujo permanente, como se define para flujo en tuberías, se refiere a la condición según la cual las características del flujo en un punto no varían con el tiempo ($\partial V/\partial t = 0$, $\partial y/\partial t = 0$, etc.). El flujo uniforme se refiere a la condición según la cual la profundidad, pendiente, velocidad y sección recta permanecen constantes en una longitud dada del canal ($\partial y/\partial L = 0$, $\partial V/\partial L = 0$, etc.).

La línea de alturas totales es paralela a la superficie del líquido (línea de alturas piezométricas) y $V^2/2g$ por encima de ella. Esto no se cumple en el caso de flujo no uniforme y permanente.

FLUJO NO UNIFORME

El flujo no uniforme ocurre cuando la profundidad del liquido varía a lo largo de la longitud del canal abierto, o sea, $\partial y/\partial L \neq 0$. El flujo no uniforme puede ser permanente o no permanente. También puede clasificarse en tranquilo, rápido o crítico.

FLUJO LAMINAR

El flujo laminar en canales abiertos se dará para valores del número de Reynolds R_E de 2000 o menores. El flujo *puede* ser laminar por encima de $R_E = 10.000$. Para el flujo en canales abiertos, $R_E = 4RV/\nu$, donde R es el radio hidráulico.

LA FORMULA DE CHEZY para *flujo uniforme y permanente*, desarrollada en el Problema 1, es

$$V = C\sqrt{RS} \qquad (1)$$

donde V = velocidad media en m/seg, C = coeficiente,
R = radio hidráulico, S = pendiente de la superficie del agua o de la línea de energía o de la solera del canal; estas líneas son paralelas para el flujo uniforme y permanente.

EL COEFICIENTE C puede obtenerse aplicando cualquiera de las expresiones siguientes:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \qquad \text{(Véase Problema 1)} \qquad (2)$$

$$C = \frac{23 + \dfrac{0{,}00155}{S} + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{n}{\sqrt{R}}\left(23 + \dfrac{0{,}00155}{S}\right)} \qquad \text{(Kutter)} \qquad (3)$$

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \qquad \text{(Manning)*} \qquad (4)$$

$$C = \frac{87}{1 + m/\sqrt{R}} \qquad \text{(Bazin)} \qquad (5)$$

$$C = -23{,}2 \ \lg\left(1{,}811 \frac{C}{R_E} + \frac{\epsilon}{R}\right) \qquad \text{(Powell)} \qquad (6)$$

En las expresiones (*3*), (*4*) y (*5*), n y m son factores de rugosidad determinados experimentalmente solo para el agua. Algunos valores se dan en la Tabla 9 del Apéndice. En general, se prefiere el empleo de la fórmula de Manning. La fórmula de Powell se discutirá en los Problemas 9 y 10.

EL CAUDAL (Q) para flujo uniforme y permanente, aplicando la fórmula de Manning, es

$$Q = AV = A\left(\frac{1}{n}\right) R^{2/3} S^{1/2} \qquad (7)$$

Las condiciones ligadas al flujo uniforme y permanente se llaman normales. De ahí los términos profundidad normal y pendiente normal.

LA PERDIDA DE CARGA (h_L), expresada en términos de la fórmula de Manning, es

$$h_L = \left[\frac{Vn}{R^{2/3}}\right]^2 L, \text{ haciendo } S = h_L/L \qquad (8)$$

En el caso de flujo no uniforme pueden emplearse los valores medios de V y R con aceptable precisión. Para un canal largo se emplearán longitudes cortas en las que los cambios en profundidad sean de la misma magnitud.

DISTRIBUCION VERTICAL DE LA VELOCIDAD

La distribución vertical de la velocidad en un canal abierto puede suponerse parabólica para flujo laminar y logarítmica para flujo turbulento.

Para un flujo *laminar* uniforme en canales abiertos amplios de profundidad media y_m, la distribución de velocidad puede expresarse así

$$v = \frac{gS}{\nu}(yy_m - \tfrac{1}{2}y^2) \quad \text{o} \quad v = \frac{wS}{\mu}(yy_m - \tfrac{1}{2}y^2) \qquad (9)$$

La velocidad media V, deducida de esta ecuación en el Problema 3, es

$$V = \frac{gSy_m^2}{3\nu} \quad \text{o} \quad V = \frac{wSy_m^2}{3\mu} \qquad (10)$$

Para un flujo *turbulento* uniforme en canales abiertos anchos la distribución de velocidad (desarrollada en el Problema 4) puede expresarse así

$$v = 2{,}5\sqrt{\tau_0/\rho} \ \ln(y/y_0) \quad \text{o} \quad v = 5{,}75\sqrt{\tau_0/\rho} \ \lg(y/y_0) \qquad (11)$$

ENERGIA ESPECIFICA

La energía específica (E) se define como la energía por unidad de peso (m kg/kg) con relación a la solera del canal, o sea,

$$E = \text{profundidad} + \text{altura de velocidad} = y + V^2/2g \qquad (12A)$$

Una expresión más exacta del término de energía cinética sería $\alpha V^2/2g$. Véase el Capítulo 6 para la discusión del factor de corrección de la energía cinética α.

En función del caudal q por unidad de anchura b del canal (o sea, $q = Q/b$),

$$E = y + (1/2g)(q/y)^2 \quad \text{o} \quad q = \sqrt{2g(y^2E - y^3)} \qquad (12B)$$

* En la literatura técnica en castellano se conserva n en unidades inglesas ($ft^{1/6}$), por lo que la constante 1,486, que aparece en la literatura técnica en inglés, se reduce a la unidad. *N. del T.*

Para un flujo uniforme, la energía específica permanece constante de una sección a otra. Para flujo no uniforme, la energía específica a lo largo del canal puede aumentar o disminuir.

PROFUNDIDAD CRITICA

La profundidad crítica (y_c) para un caudal unidad constante q en un canal rectangular es ac lla para la cual la energía específica es mínima. Como se demuestra en los Problemas 27 y 28,

$$y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \tfrac{2}{3}E_c = V_c^2/g$$

Esta expresión puede transformarse en

$$V_c = \sqrt{gy_c} \quad \text{o} \quad V_c/\sqrt{gy_c} = 1 \quad \text{para flujo crítico}$$

Por consiguiente, si el número de Froude $N_F = V_c/\sqrt{gy_c} = 1$, existe el flujo crítico. Si N_F hay flujo supercrítico (flujo rápido); y si $N_F < 1$, el flujo es subcrítico (flujo tranquilo).

CAUDAL UNITARIO MAXIMO

El caudal unitario máximo (q_{max}) en un canal rectangular, para una energía específica dada E como se demuestra en el Problema 28,

$$q_{max} = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{g(\tfrac{2}{3}E)^3}$$

EN CANALES NO RECTANGULARES Y PARA UN FLUJO CRITICO, como se ha desarroll en el Problema 27,

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b'} \quad \text{o} \quad \frac{Q^2 b'}{gA_c^3} = 1$$

donde b' es la anchura de la superficie de agua. La expresión (*16*) la podemos transformar, dividiei por A_c^2, en la forma

$$V_c^2/g = A_c/b' \quad \text{o} \quad V_c = \sqrt{gA_c/b'} = \sqrt{gy_m}$$

donde el término A_c/b' se denomina profundidad media y_m.

FLUJO NO UNIFORME

Para estudiar el flujo no uniforme en canales abiertos, éstos suelen dividirse en longitudes L madas tramos. Para calcular las curvas de perfil, la ecuación de energía (véase Problema 39) conduc

$$L \text{ en m} = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_o - S} = \frac{E_2 - E_1}{S_o - S} = \frac{E_1 - E_2}{S - S_o}$$

donde S_0 = la pendiente de la solera del canal y S = la pendiente de la línea de energía.

Para sucesivos tramos, donde los cambios en profundidad son aproximadamente los mismos gradiente de energía S puede escribirse así

$$S = \left(\frac{n\,V_{\text{media}}}{R_{\text{medio}}^{2/3}}\right)^2 \quad \text{o} \quad \frac{V_{\text{media}}^2}{C^2 R_{\text{medio}}}$$

Los perfiles superficiales para condiciones de flujo gradualmente variable en canales rectangu res anchos pueden analizarse empleando la expresión

$$\frac{dy}{dL} = \frac{S_o - S}{(1 - V^2/gy)}$$

El término dy/dL representa la pendiente de la superficie del agua en relación con la solera del ca Así, pues, si dy/dL es positivo, la profundidad aumenta aguas abajo. Los Problemas 44 y 45 desarro rán la ecuación y un sistema de clasificación de los perfiles superficiales.

LOS VERTEDEROS DE AFORO DE PARED GRUESA pueden emplearse para medir el caudal en un canal.

El caudal unitario es $q = \sqrt{g}(\frac{2}{3}E)^{3/2}$, donde E es la energía específica referida a la cresta del vertedero o la altura de carga aguas arriba más la altura de velocidad de aproximación. Debido al rozamiento, el caudal real es del 90 al 92 % del valor dado por esta fórmula. La ecuación aproximada es $q = 1{,}67H^{3/2}$ (véase Problema 52).

RESALTO HIDRAULICO

El resalto hidráulico se produce cuando un flujo supercrítico cambia a flujo subcrítico. En tales casos, la elevación de la superficie líquida aumenta súbitamente en la dirección del flujo. En el caso de un flujo constante en un canal rectangular, como se ha deducido en el Problema 46,

$$\frac{q^2}{g} = y_1 y_2\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \qquad (21)$$

Problemas resueltos

1 Desarrollar la ecuación general (Chezy) para el flujo uniforme y permanente en un canal abierto.

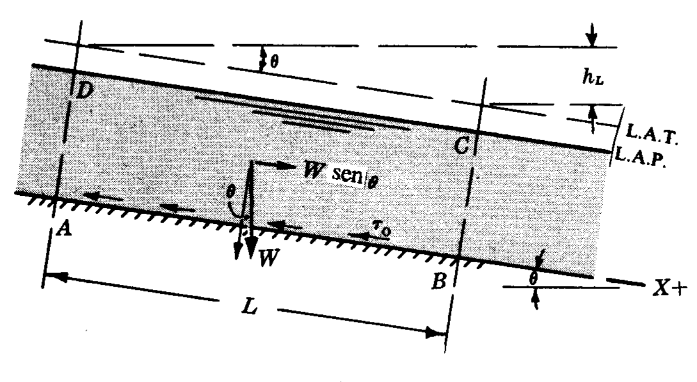


Fig. 10-1

Solución:

En la Fig. 10-1, considérese el volumen de líquido $ABCD$ de sección recta constante A y de longitud L. El volumen puede considerarse en equilibrio puesto que el flujo es permanente (aceleración nula). Sumando las fuerzas que actúan en la dirección X,

$$\text{fuerza sobre superficie } AD - \text{fuerza sobre superficie } BC + W \text{ sen } \theta - \text{fuerzas resistentes} = 0$$

$$w\bar{h}A - w\bar{h}A + wAL \underset{(h_L)}{\text{sen } \theta} - \tau_o pL = 0$$

donde τ_o es la tensión cortante en la pared (kg/m²) que actúa sobre una superficie de L m de longitud y p m de ancho, siendo p el perímetro mojado. Entonces,

$$wAL \text{ sen } \theta = \tau_o pL \qquad \text{y} \qquad \tau_o = (wA \text{ sen } \theta)/p = wRS \qquad (A)$$

ya que $R = A/p$ y sen θ = tg $\theta = S$ para pequeños valores de θ.

En el Problema 5 del Capítulo 7 se ha visto que $\tau_o = (w/g)f(V^2/8)$. Luego

$$wRS = (w/g)f(V^2/8) \qquad \text{o} \qquad V = \sqrt{(8g/f)RS} = C\sqrt{RS} \qquad (B)$$

Para un flujo *laminar*, f puede tomarse igual a $64/R_E$. De donde

$$C = \sqrt{(8g/64)R_E} = 1{,}107\sqrt{R_E} \qquad (C)$$

2. Demostrar que la distribución vertical de velocidad es parabólica en un canal abierto ancho p un flujo laminar uniforme (y_m = profundidad media del canal).

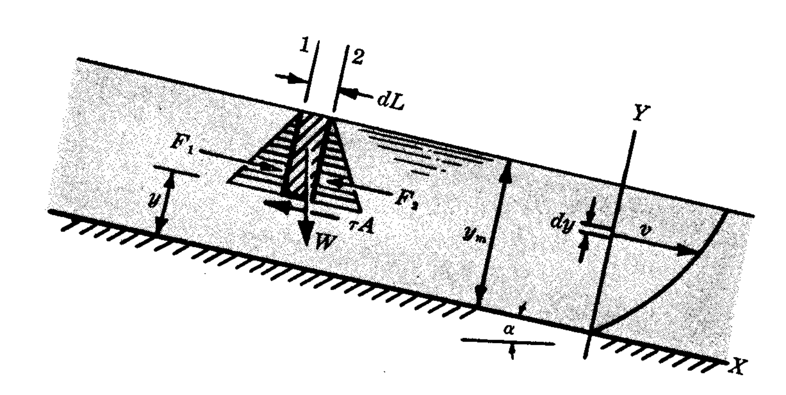


Fig. 10-2

Solución:

Cuando la velocidad y la profundidad son pequeñas, reflejando un número de Reynolds < 2000, la visco dad se convierte en el factor de flujo dominante. El flujo resultante es laminar. (Para canales abiertos, R_E se de fine como $4RV/\nu$.) Para el volumen libre representado en la figura por la sección rayada, aplicando $\Sigma F_x =$ obtenemos

$$F_1 - F_2 + w(y_m - y)dL\,dz \text{ sen } \alpha - \tau\, dL\, dz = 0$$

Puesto que $F_1 = F_2$, se tiene

$$\tau = w(y_m - y) \text{ sen } \alpha$$

Para un flujo laminar, $\tau = \mu\, dv/dy$, de donde obtenemos

$$dv = \frac{w}{\mu}(y_m - y)\text{sen }\alpha\, dy = \frac{wS}{\mu}(y_m - y)\, dy \qquad (A)$$

Para pequeños valores del ángulo α, asociado a la pendiente de canales abiertos, sen α = tg α = pendie te S. Integrando (A), se obtiene

$$v = \frac{wS}{\mu}(yy_m - \tfrac{1}{2}y^2) + C \qquad (B)$$

Como $v = 0$ cuando $y = 0$, el valor de la constante $C = 0$. La ecuación (B) es una ecuación cuadrática que r presenta una parábola.

3. ¿Cuál es la velocidad media V en el Problema 2?

Solución:

$$(\text{Velocidad media})V = \frac{Q}{A} = \frac{\int dQ}{\int dA} = \frac{\int v\, dA}{\int dA} = \frac{(wS/\mu)\int (yy_m - \frac{1}{2}y^2)dy\, dz}{\int dy\, dz = y_m\, dz}$$

donde dz es una constante (dimensión perpendicular al plano del papel).

$$V = \frac{wS\, dz}{\mu y_m\, dz}\int_0^{y_m}(yy_m - \tfrac{1}{2}y^2)dy = \frac{wSy_m^2}{3\mu}$$

4. Para un flujo uniforme y permanente en canales abiertos anchos, establecer una ecuación teóric que dé la velocidad media para superficies lisas.

Solución:

Para flujo turbulento, en general, la tensión cortante τ puede expresarse de la forma

$$\tau = pl^2(dv/dz)^2$$

donde l es la longitud de mezcla y una función de z (véase Capítulo 7).

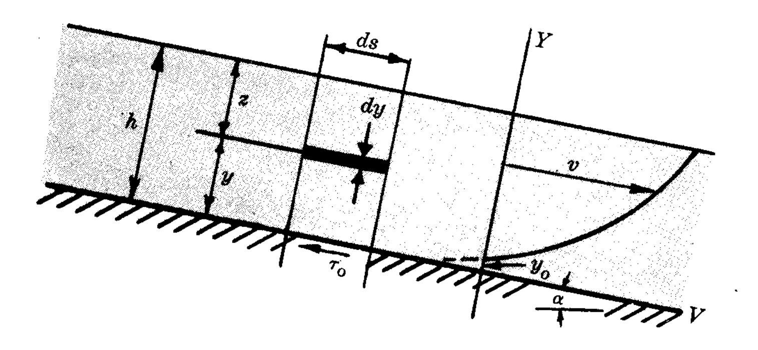


Fig. 10-3

Por otra parte, de la expresión (A) del Problema 1, $\tau_o = wRS = whS$, ya que el radio hidráulico R para canales anchos es igual a la profundidad.

En la capa límite, puesto que y es muy pequeño, $z \cong h$ y $\tau \cong \tau_o$. Luego podemos igualar los valores de τ_o,

$$\rho l^2 (dv/dz)^2 = wzS \qquad \text{o} \qquad dv/dz = \pm\sqrt{gzS/l^2}$$

Para integrar esta expresión se ensaya un valor de $l = k(h - z)(z/h)^{1/2}$. Entonces,

$$-\frac{dv}{dz} = \sqrt{gS}\left[\frac{z^{1/2}}{k(h-z)(z/h)^{1/2}}\right] = \frac{\sqrt{gSh}}{k}\left(\frac{1}{h-z}\right)$$

Se tiene $y = (h - z)$ y $dy = -dz$; luego

$$+\, y\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{\sqrt{gSh}}{k} \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{\sqrt{gSh}}{k}\left(\frac{dy}{y}\right)$$

Como $\tau_o/\rho = whS/\rho = gSh$,

$$dv = \frac{1}{k}\sqrt{\tau_o/\rho}\left(\frac{dy}{y}\right) \qquad \text{o} \qquad v = \frac{1}{k}\sqrt{\tau_o/\rho}\,\ln y + C$$

Para $y = y_o$, $v \cong 0$; luego $C = (-1/k)\sqrt{\tau_o/\rho}\,\ln y_o$ y

$$v = \frac{1}{k}\sqrt{\tau_o/\rho}\,\ln(y/y_o) \qquad (A)$$

Nota: Al despreciar la curva logarítmica a la izquierda de y_o, lo que introduce una aproximación, se consiguen resultados satisfactorios dentro de los límites de precisión esperados, ya que y_o es muy pequeño. Véase Problema 5 para el valor de y_o.

En esta expresión (A), $k \cong 0{,}40$ y se llama constante de Von Karman. Puesto que el término $\sqrt{\tau_o/\rho}$ tiene las dimensiones de m/seg, este término se denomina velocidad de corte y se designa por v_*. Así, pues,

$$v = 2{,}5 v_* \ln(y/y_o) \qquad (B)$$

De $Q = AV = (h \times 1)V = \int v(dy \times 1)$, obtenemos el valor de la velocidad media V. Así, pues,

$$V = \frac{\int v(dy \times 1)}{(h \times 1)} = \frac{2{,}5 v_*}{h}\int_0^h (\ln y - \ln y_o)\,dy$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, la velocidad media en el caso de superficies lisas donde existe una capa límite puede evaluarse en

$$V = 2{,}5 v_* [\ln h - \ln y_o - 1] \qquad (C)$$

En el Problema 5 se demostrará que y_o es igual a $\nu/9_*$. Por consiguiente, las ecuaciones (B) y (C) pueden escribirse de la forma

$$v = 2{,}5 v_* \ln(9 v_* y/\nu) \qquad (D)$$

y

$$V = 2{,}5 v_* [\ln h - \ln(\nu/9 v_*) - 1] \qquad (E)$$

Frecuentemente la velocidad media en un canal abierto se toma como la velocidad observada en un punto situado a 0,6 de la profundidad (medida desde la superficie). Si aceptamos este valor de $\bar{y}$, entonces podemos escribir la velocidad media, a partir de la ecuación (B) anterior, de la forma

$$V = 2{,}5v_* \ \ln\ (0{,}4h/y_o)$$

Del Problema 5, $y_o = \delta/103$. Entonces, para los canales anchos, puesto que el radio hidráulico $R = h$, la velocidad media es

$$V = 2{,}5v_* \ \ln\ 41{,}2R/\delta \qquad (F)$$

5. Determinar el valor de y_0 en el problema anterior.

Solución:

Para superficies lisas, en una capa límite (laminar),

$$\tau_o = \mu(dv/dy) = \nu\rho(dv/dy) \qquad \text{o} \qquad dv/dy = (\tau_o/\rho)/\nu = v_*^2/\nu \ \text{(constante)}$$

Designando por δ el espesor de la capa límite,

$$\int dv = (v_*^2/\nu)\int_o^\delta dy \qquad \text{o} \qquad v_\delta = v_*^2\delta/\nu = R_{E_*}v_* \qquad (A)$$

De datos experimentales, $R_{E_*} \cong 11{,}6$ (prácticamente constante). Entonces,

$$v_*^2\delta/\nu = 11{,}6v_* \qquad \text{o} \qquad \delta = 11{,}6\nu/v_* \qquad (B)$$

Haciendo $y = \delta$ en la ecuación (B) del problema precedente,

$$v_\delta = 2{,}5v_* \ \ln\ \delta/y_o \qquad (C)$$

Combinando (C) con (A), $\ln\ \delta/y_o = v_\delta/2{,}5v_* = R_{E_*}/2{,}5 \cong 4{,}64$,

$$\delta/y_o = e^{4{,}64} = 103 \qquad \text{y} \qquad \delta = 103y_o \qquad (D)$$

Entonces, de (B),

$$y_o = \frac{\delta}{103} \cong \frac{11{,}6\nu}{103v_*} \cong \frac{\nu}{9v_*} \qquad (E)$$

6. Por un canal rectangular ancho y liso ($n = 0{,}009$) circula agua a 15° C con una profundidad de 1,2 m y con una pendiente de 0,0004. Comparar el valor de C obtenido por la fórmula de Manning con el que da la aplicación de la expresión $V = 2{,}5v_*\ln\ 41{,}2R/\delta$.

Solución:

(a) Aplicando la fórmula de Manning, $C = (1{,}0/n)R^{1/6} = (1{,}0/0{,}009)(1{,}2^{1/6}) = 114{,}5$.

(b) Igualando la fórmula de Chezy para la velocidad media V con la expresión dada,

$$C\sqrt{RS} = 2{,}5v_* \ \ln\ 41{,}2R/\delta$$

Sustituyendo $v_* = \sqrt{gSR}$ del Problema 4, obtenemos

$$C = 2{,}5\sqrt{g}\ \ln\ 41{,}2R/\delta \qquad (A)$$

Para el agua a 15° C, $\nu = 1{,}132 \times 10^{-6}$ y, tomando $\delta = 11{,}6\nu/v_*$ de (B) del Problema 5, hallamos $C = 97{,}5$.

7. (a) Por un canal rectangular ancho circula agua con una profundidad de 1,2 m y una pendiente de 4 m sobre 10.000 m. Aplicando la fórmula teórica para la velocidad del Problema 4, calcular los valores de las velocidades teóricas a intervalos de profundidad de 1/10 de ésta, suponiendo que el canal es liso. (b) Comparar la media de los valores de velocidad a 0,2 y 0,8 con la velocidad a 0,6 de profundidad. (c) Calcular la posición de la velocidad media por debajo de la superficie del agua. Emplear como viscosidad cinemática el valor $1{,}40 \times 10^{-6}$ m²/seg.

Solución:

(*a*) Puesto que $v_* = \sqrt{\tau_o/\rho} = \sqrt{gRS} = \sqrt{ghS}$ y $y_o = v/9v_*$,

$$v = 2{,}5v_* \ln y/y_o = 2{,}5(2{,}303)\sqrt{ghS} \lg 9v_* y/v$$
$$= 5{,}75\sqrt{9{,}8(1{,}2)(0{,}0004)} \lg \frac{9y\sqrt{9{,}8(1{,}2)(0{,}0004)}}{1{,}4 \times 10^{-6}}$$
$$= 0{,}3945 \times \lg 4{,}41 \times 10^5 y \qquad (A)$$

A partir de (*A*) obtenemos los siguientes valores de velocidad v:

Dist. hacia abajo (%)	y (m)	441.000y	lg 441.000y	v(m/seg)
0	1,20	529.200	5,7236	2,261
10	1,08	476.280	5,6779	2,243
20	0,96	423.360	5,6266	2,223
30	0,84	370.440	5,5687	2,200
40	0,72	317.520	5,5018	2,173
50	0,60	264.600	5,4226	2,142
60	0,48	211.680	5,3257	2,104
70	0,36	158.760	5,2007	2,054
80	0,24	105.840	5,0246	1,985
90	0,12	52.920	4,7236	1,866
92,5	0,09	39.690	4,5987	1,816
95,0	0,06	26.460	4,4226	1,747
97,5	0,03	13.230	4,1216	1,628
99,75	0,003	1.323	3,1216	1,233

(*b*) La media de los valores a 0,2 y 0,8 de profundidad es $V = \frac{1}{2}(2{,}223 + 1{,}985) = 2{,}104$ m/seg. El valor a 0,6 de profundidad es 2,104. Normalmente no suele darse tal concordancia de valores.

8. Suponiendo correcta la fórmula de Manning para el cálculo de C, ¿qué valor de n satisfará el criterio de «liso» en el Problema 6?

Solución:

Igualando los valores de C, aplicando la expresión (*A*) del Problema 6, se tiene

$$\frac{R^{1/6}}{n} = 5{,}75\sqrt{g} \lg \left(\frac{41{,}2R}{\delta}\right) = 5{,}75\sqrt{g} \lg \left(\frac{41{,}2R\sqrt{gSR}}{11{,}6v}\right)$$

Sustituyendo valores y operando, $n = 0{,}0106$.

9. Aplicando la ecuación de Powell, ¿qué cantidad de líquido circulará en un canal rectangular liso de 0,6 m de ancho con una pendiente de 0,10 si la profundidad es 0,3 m? (Emplear v = 0,000039 m²/seg).

Solución:

La ecuación (*6*) es $$C = -23{,}20 \lg \left(1{,}811 \frac{C}{R_E} + \frac{\epsilon}{R}\right)$$

Para canales lisos, ϵ/R es pequeño y puede despreciarse; luego

$$C = 23{,}20 \lg 0{,}5521 R_E/C \qquad (A)$$

R_E/C puede calcularse a partir de los datos conocidos mediante $V = C\sqrt{RS}$:

$$R_E = 4RV/v = 4RC\sqrt{RS}/v$$
$$0{,}5521R_E/C = 4R^{3/2}S^{1/2}/v = 0{,}5521(4)(0{,}15)^{3/2}(0{,}01)^{1/2}/0{,}000039 = 329$$

Entonces, $C = 23{,}2 \lg 329 = 58{,}4$ y

$$Q = CA\sqrt{RS} = 58{,}4(0{,}18)\sqrt{0{,}15(0{,}01)} = 0{,}407 \text{ m}^3/\text{seg}$$

10. Determinar C mediante la fórmula de Powell para un canal rectangular de 0,6 m por 0,3 m si V 1,65 m/seg, $\epsilon/R = 0{,}002$ y $\nu = 0{,}000039\ \text{m}^2/\text{seg}$.

Solución:

Primero se calcula $R_E = 4RV/\nu = 4(0{,}15)(1{,}65)/0{,}000039 = 25.385$. Luego

$$C = -23{,}20 \lg \left(1{,}811 \frac{C}{25.385} + 0{,}002\right)$$

Por aproximaciones sucesivas encontramos que $C = 52$ es satisfactorio.

Powell ha representado gráficos de C en función de R_E para varios valores de la rugosidad relativa ϵ/R. L gráficas simplifican los cálculos. Por otra parte indican una estrecha analogía con la fórmula de Colebrook pa el flujo en tuberías.

11. (*a*) Encontrar una correlación entre el factor de rugosidad f y el factor de rugosidad n. (*b*) ¿Cu es la tensión tangencial media en los flancos y solera de un canal rectangular de 3,6 m de ancl por 1,2 m de profundidad y trazado con una pendiente de 1,60 m/1000 m?

Solución:

(*a*) Tomando la fórmula de Manning como base de correlación,

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} = \frac{R^{1/6}}{n}, \qquad \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{8g}}, \qquad f = \frac{8gn^2}{R^{1/3}}$$

(*b*) Del Problema 1,

$$\tau_0 = wRS = w\left(\frac{\text{área}}{\text{perímetro mojado}}\right)(\text{pendiente}) = 1000\left(\frac{3{,}6 \times 1{,}2}{1{,}2 + 3{,}6 + 1{,}2}\right)\left(\frac{1{,}60}{1000}\right) = 1{,}152\ \text{kg/m}^2$$

12. ¿Qué caudal puede alcanzarse en un canal revestido de cemento de 1,2 m de ancho trazado con ur pendiente de 4 m sobre 10.000 m, si el agua circula con 0,6 m de profundidad? Aplicar los co ficientes C de Kutter y de Manning.

Solución:

(*a*) Aplicando el coeficiente C de Kutter. De la Tabla 9, $n = 0{,}015$. Radio hidráulico $R = 1{,}2(0{,}6)/2{,}4 = 0{,}30$ r

De la Tabla 10, para $S = 0{,}0004$, $R = 0{,}30$ y $n = 0{,}015$, el valor de $C = 54$.

$$Q = AV = AC\sqrt{RS} = (1{,}2 \times 0{,}6)(54)\sqrt{0{,}30 \times 0{,}0004} = 0{,}426\ \text{m}^3/\text{seg}$$

(*b*) Aplicando el coeficiente C de Manning,

$$Q = AV = A\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2} = (1{,}2 \times 0{,}6)\frac{1}{0{,}015}(0{,}30)^{2/3}(0{,}0004)^{1/2} = 0{,}430\ \text{m}^3/\text{seg}$$

13. En un laboratorio hidráulico se ha medido un caudal de 0,393 m^3/seg en un canal rectangular (1,2 m de ancho y 0,6 m de profundidad. Si la pendiente del canal era de 0,0004, ¿cuál es el fact de rugosidad para el revestimiento del canal?

Solución:

(*a*) Aplicando la fórmula de Kutter,

$$Q = 0.393 = AC\sqrt{RS} = (1{,}2 \times 0{,}6)C\sqrt{[(1{,}2 \times 0{,}6)/2{,}4](0{,}0004)} \qquad \text{y} \qquad C = 50$$

Interpolando en la Tabla 10, $n = 0.016$.

(*b*) Aplicando la fórmula de Manning,

$$Q = 0{,}393 = A\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2} = (1{,}2 \times 0{,}6)\frac{1}{n}(0{,}3)^{2/3}(0{,}0004)^{1/2}, \quad n = 0{,}0164. \quad \text{Emplear } n = 0{,}016.$$

14. ¿Con qué pendiente se trazará una tubería de alcantarillado vitrificada de 60 cm de diámetro para que circulen 0,162 m^3/seg cuando la tubería está semillena? ¿Cuál será la pendiente si la tubería está completamente llena? (La Tabla 9 da $n = 0{,}013$.)

Solución:

$$\text{Radio hidráulico } R = \frac{\text{área}}{\text{perímetro mojado}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\pi d^2)}{\frac{1}{2}(\pi d)} = \tfrac{1}{4}d = 0{,}15 \text{ m}.$$

(*a*) $Q = 0{,}162 = A\dfrac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\pi)(0{,}6)^2 \times (1/0{,}013)(0{,}15)^{2/3}S^{1/2}$, $\sqrt{S} = 0{,}0528$ y $S = 0{,}00279$.

(*b*) $R = \frac{1}{4}d = 0{,}15$ m, como antes, y $A = \frac{1}{4}\pi(0{,}6)^2$. Luego $\sqrt{S} = 0{,}0264$ y $S = 0{,}00070$.

15. Por un canal trapezoidal de 6 m de anchura de solera y pendientes de las paredes de 1 sobre 1 circula agua a 1,2 m de profundidad con una pendiente de 0,0009. Para un valor de $n = 0{,}025$, ¿cuál es el caudal?

Solución:

Area $A = 6(1{,}2) + 2(\frac{1}{2})(1{,}2) = 8{,}64$ m, $R = 8{,}64/[6 + 2(1{,}2\sqrt{2})] = 0{,}92$ m.

$$Q = (1/n)AR^{2/3}S^{1/2} = (1/0{,}025)(8{,}64)(0{,}92)^{2/3}(0{,}03) = 9{,}8 \text{ m}^3/\text{seg}$$

16. Dos tuberías de hormigón ($C = 55$) deben transportar el flujo desde un canal abierto de sección semicuadrada de 1,8 m de ancho y 0,9 m de profundidad ($C = 66$). La pendiente de ambas estructuras es de 0,0009. (*a*) Determinar el diámetro de las tuberías. (*b*) Hallar la profundidad de agua en el canal rectangular, después de haberse estabilizado el flujo, si la pendiente cambia a 0,0016, empleando $C = 66$.

Solución:

(*a*)
$$Q_{\text{canal}} = Q_{\text{tuberias}}$$
$$AC\sqrt{RS} = 2AC\sqrt{RS}$$
$$(1{,}8 \times 0{,}9)(66)\sqrt{\frac{1{,}8 \times 0{,}9}{3{,}6}(0{,}0009)} = 2(\tfrac{1}{4}\pi d^2)(55)\sqrt{\frac{d}{4}(0{,}0009)}$$
$$2{,}15 = 1{,}30d^{5/2} \quad \text{y} \quad d = 1{,}225 \text{ m}$$

(*b*) Para una profundidad y, el área $A = 1{,}8y$ y el radio hidráulico $R = \dfrac{1{,}8y}{1{,}8 + 2y}$. Para el mismo caudal Q

$$2{,}15 = (1{,}8y)(66)\sqrt{\frac{1{,}8y}{1{,}8 + 2y}(0{,}0016)}, \qquad 1{,}8y\sqrt{\frac{1{,}8y}{1{,}8 + 2y}} = 0{,}814, \qquad y^3 - 0{,}2275y = 0{,}2050$$

Por aproximaciones sucesivas: Para $y = 0{,}720$ m, $(0{,}373 - 0{,}164) \neq 0{,}205$ (disminuir y).
Para $y = 0{,}717$ m, $(0{,}368 - 0{,}163) = 0{,}205$ (satisfactorio).

Así, pues, la profundidad, con precisión del orden del milímetro, es 0,717 m.

17. Una tubería de alcantarillado de revestimiento vitrificado ordinario se traza con una pendiente de 0,00020 y conduce 2,30 m^3/seg cuando la tubería está llena al 90 %. ¿Qué dimensión tendrá la tubería?

Solución:

De la Tabla 9, $n = 0{,}015$.

Se calcula el radio hidráulico R (véase la Fig. 10-4).

$$R = \frac{A}{P} = \frac{\text{círculo} - (\text{sector } AOCE - \text{triángulo } AOCD)}{\text{arco } ABC}$$

Angulo $\theta = \text{arc cos }(0{,}40d/0{,}50d) = \text{arc cos } 0{,}800$, $\theta = 36^\circ\ 52'$.

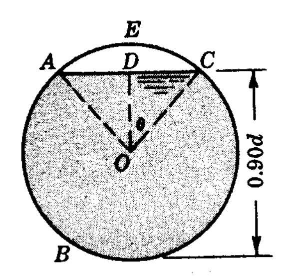


Fig. 10-4

Area del sector $AOCE = [2(36°52')/360°](\frac{1}{4}\pi d^2) = 0{,}1612d^2$.
Longitud del arco $ABC = \pi d - [2(36°52')/360°](\pi d) = 2{,}498d$.
Area del triángulo $AOCD = 2(\frac{1}{2})(0{,}40d)(0{,}40d \text{ tg } 36°52') = 0{,}1200d^2$.

$$R = \frac{\frac{1}{4}\pi d^2 - (0{,}1612d^2 - 0{,}1200d^2)}{2{,}498d} = \frac{0{,}7442d^2}{2{,}398d} = 0{,}298d$$

(*a*) Empleando el coeficiente C de Kutter (para un primer cálculo se supone igual a 55),

$$Q = CA\sqrt{RS}, \qquad 2{,}30 = 55(0{,}7442d^2)\sqrt{0{,}298d(0{,}00020)}, \qquad d^{5/2} = 7{,}278, \qquad d = 2{,}212 \text{ m}$$

Para revisar C, $R = 0{,}298 \times 2{,}212 = 0{,}659$ m y la Tabla 10 da $C = 62$. Recalculando,
$d^{5/2} = 7{,}278(55/62) = 6{,}456$ o $d = 2{,}109$ m (el C revisado es satisfactorio).

(*b*) Empleando el coeficiente C de Manning (y datos anteriores),

$$Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}S^{1/2}$$

$$2{,}30 = \frac{1}{0{,}015}(0{,}7442d^2)(0{,}298d)^{2/3}(0{,}00020)^{1/2}, \qquad d^{8/3} = 7{,}347, \qquad d = 2{,}112 \text{ m}$$

18. Por un canal rectangular de 6 m de ancho, trazado con una pendiente de 0,00010, circula agua a razón de 6,00 m^3/seg. Determinar la profundidad del agua. Emplear $n = 0{,}015$.

Solución:

Aplicando la fórmula de Manning,

$$Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}S^{1/2}, \qquad 6{,}00 = \frac{1}{0{,}015}(6y)\left(\frac{6y}{6+2y}\right)^{2/3}(0{,}01), \qquad 1{,}5 = y\left(\frac{6y}{6+2y}\right)^{2/3}$$

Calculando por aproximaciones sucesivas, encontramos que el valor de $y = 1{,}50$ m satisface la ecuación. El agua circulará a una profundidad de 1,50 m, llamada profundidad normal.

19. ¿Con qué anchura se construirá un canal rectangular para transportar 13,5 m^3/seg de agua a una profundidad de 1,8 m bajo una pendiente de 0,00040? Emplear $n = 0{,}010$.

Solución:

Aplicando la fórmula de Manning, con $A = 1{,}8b$ y $R = 1{,}8/(b + 3{,}6)$, y calculando por aproximaciones sucesivas, hallamos la anchura requerida $b = 3{,}91$ m.

20. Deducir, a partir de la ecuación de Manning, los factores de descarga K y K' indicados en las Tablas 11 y 12 del Apéndice.

Solución:

Los factores de descarga aplicados a la fórmula de Manning pueden calcularse como sigue. El área de una sección recta cualquiera puede expresarse de la forma $A = F_1y^2$, donde F_1 es un factor adimensional e y^2 es el cuadrado de la profundidad. De manera análoga, el radio hidráulico R puede expresarse así $R = F_2y$. Entonces la fórmula de Manning se transforma en

$$Q = \frac{1}{n}(F_1y^2)(F_2y)^{2/3}S^{1/2} \qquad \text{o} \qquad \frac{Qn}{y^{8/3}S^{1/2}} = F_1F_2^{2/3} = K \qquad (1)$$

Análogamente, en función de la anchura b, $A = F_3b^2$ y $R = F_4b$. Luego

$$\frac{Qn}{b^{8/3}S^{1/2}} = F_3F_4^{2/3} = K' \qquad (2)$$

Las Tablas 11 y 12 dan los valores de K y K' para canales trapezoidales. Los valores de K y K' pueden calcularse para cualquier forma de sección recta.

21. ¿Cuáles son los factores de descarga K y K' para un canal rectangular de 6 m de ancho y 1,2 m de profundidad? Comparar con los valores dados por las Tablas 11 y 12.

Solución:

(*a*) $A = F_1 y^2$, $7{,}2 = F_1(1{,}2)$, $F_2 = 5{,}0$. $R = F_2 y$, $7{,}2/8{,}4 = F_2(1{,}2)$, $F_2 = 0{,}714$. $K = F_1 F_2^{2/3} = 4{,}00$.

La Tabla 11 indica que para $y/b = 1{,}2/6 = 0{,}20$, $K = 4{,}00$. (Comprobado.)

(*b*) $A = F_3 b^2$, $7{,}2 = F_3(36)$, $F_3 = 0{,}20$. $R = F_4 b$, $7{,}2/8{,}4 = F_4(6)$, $F_4 = 0{,}143$. $K' = F_3 F^{2/3} = 0{,}0546$.

La Tabla 12 indica que para $y/b = 1{,}2/6 = 0{,}20$, $K' = 0{,}0546$. (Comprobado.)

22. Resolver el Problema 18, empleando los factores de descarga de la Tabla 12.

Solución:

Del Problema 20, ecuación (*2*),

$$\frac{Qn}{b^{8/3}S^{1/2}} = K', \qquad \frac{6(0{,}015)}{(6)^{8/3}(0{,}0001)^{1/2}} = 0{,}0757 = K'$$

La Tabla 12 indica que para canales trapezoidales de taludes verticales, un K' de 0,0757 representa una relación profundidad-anchura (y/b) entre 0,24 y 0,26. Interpolando, $y/b = 0{,}250$. Luego $y = 0{,}250(6) = 1{,}50$ m, al igual que se halló en el Problema 18.

23. Resolver el Problema 19 empleando los factores de descarga de la Tabla 11.

Solución:

Del Problema 20, ecuación (*1*),

$$\frac{Qn}{y^{8/3}S^{1/2}} = K, \qquad \frac{13{,}5(0{,}010)}{(1{,}8)^{8/3}(0{,}0004)^{1/2}} = 1{,}41 = K$$

$K = 1{,}41$ corresponde exactamente a una relación y/b igual a 0,46. Luego $b = 1{,}8/0{,}46 = 3{,}91$, como se calculó en el Problema 19.

24. Un canal de sección recta trapezoidal transporta 24,3 m³/seg. Si la pendiente $S = 0{,}000144$, $n = 0{,}015$, anchura de la base $b = 6$ m y las pendientes de las paredes son de 1 vertical sobre 1,5 horizontal, determinar la profundidad normal de flujo y_N por la fórmula y usando las Tablas.

Solución:

(*a*) Por la fórmula,

$$24{,}3 = \frac{1}{0{,}015}(6y_N + 1{,}5y_N^2)\left(\frac{6y_N + 1{,}5y_N^2}{6 + 2y_N\sqrt{3{,}25}}\right)^{2/3}(0{,}000144)^{1/2}$$

o

$$30{,}4 = \frac{(6y_N + 1{,}5y_N^2)^{5/3}}{(6 + 2y_N\sqrt{3{,}25})^{2/3}}$$

Ensayando $y_N = 2{,}4$: $\quad 30{,}4 \stackrel{?}{=} \dfrac{(14{,}4 + 8{,}64)^{5/3}}{(6 + 4{,}8\sqrt{3{,}25})^{2/3}}$ o $30{,}4 \neq 31{,}2$ (bastante ajustado).

La profundidad de flujo puede calcularse por aproximaciones sucesivas hasta la precisión que se quiera. La profundidad normal es ligeramente menor que 2,4 m.

(*b*) Cálculo previo para utilizar la Tabla 12 del Apéndice:

$$\frac{Qn}{b^{8/3}S^{1/2}} = \frac{24{,}3(0{,}015)}{(6)^{8/3}(0{,}000144)^{1/2}} = 0{,}256 = K'$$

En la Tabla 12, para una pendiente de las paredes del canal de 1 vertical sobre 1,5 horizontal,

$$y/b = 0{,}38,\ K' = 0{,}238 \qquad \text{y} \qquad y/b = 0{,}40,\ K' = 0{,}262$$

Interpolando para $K' = 0{,}256$, tenemos $y/b = 0{,}395$. Entonces, $y_N = 0{,}395(6) = 2{,}370$ m.

25. Para un área de una sección recta dada determinar las dimensiones óptimas de un canal trapezoidal.

Solución:

El examen de la ecuación de Chezy indica que para un área de una sección recta y una pendiente dadas el caudal a través de un canal con una rugosidad dada será máximo cuando el radio hidráulico sea máximo. El radio hidráulico será máximo cuando el perímetro mojado sea mínimo. Refiriéndose a la Fig. 10-5,

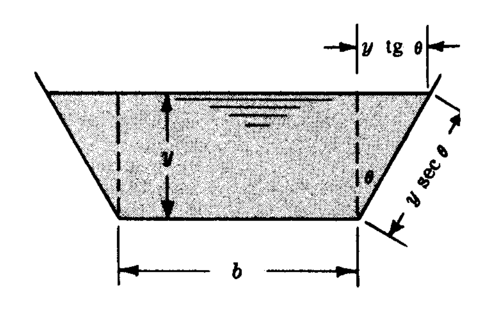


Fig. 10-5

$$A = by + 2(\tfrac{1}{2}y)(y\ \text{tg}\ \theta)$$

o $$b = A/y - y\ \text{tg}\ \theta$$

$$p = b + 2y\ \sec\theta \quad \text{o} \quad p = A/y - y\ \text{tg}\ \theta + 2y\ \sec\theta$$

Derivando p con respecto a y e igualando a cero,

$$dp/dy = -A/y^2 - \text{tg}\ \theta + 2\ \sec\theta = 0 \qquad \text{o} \qquad A = (2\ \sec\theta - \text{tg}\ \theta)y^2$$

$$(\text{Máximo})\ R = \frac{A}{p} = \frac{(2\ \sec\theta - \text{tg}\ \theta)y^2}{(2\ \sec\theta - \text{tg}\ \theta)y^2/y - y\ \text{tg}\ \theta + 2y\ \sec\theta} = \frac{y}{2}$$

Notas:

(1) Para todos los canales trapezoidales, la sección hidráulica óptima se obtiene cuando $R = y/2$. La s ción simétrica será un semihexágono.

(2) Para un canal rectangular (cuando $\theta = 0°$), $A = 2y^2$ y también $A = by$, dando $y = b/2$, además la condición $R = y/2$. Así, pues, la profundidad óptima es la mitad de la anchura con el radio hidráulico igı a la mitad de la profundidad.

(3) El círculo tiene el menor perímetro para un área dada. Un canal abierto semicircular desaguará rr agua que cualquier otro de distinta forma (para la misma área, pendiente y factor n).

26. (*a*) Determinar la sección óptima de un canal trapezoidal, $n = 0{,}025$, para transportar 12,6 m³/s Para evitar la erosión, la velocidad máxima ha de ser 0,90 m/seg y las pendientes de las pare del canal trapezoidal son 1 vertical sobre 2 horizontal. (*b*) ¿Cuál deberá ser la pendiente S del nal? Referirse a la figura del Problema 25.

Solución:

(*a*) $$R = \frac{y}{2} = \frac{A}{p} = \frac{by + 2(\frac{1}{2}y)(2y)}{b + 2y\sqrt{5}} \qquad \text{o} \qquad b = 2y\sqrt{5} - 4y$$

$$A = Q/V = 12{,}60/0{,}90 = by + 2y^2 \qquad \text{o} \qquad b = (14 - 2y^2)/y$$

Igualando (*1*) y (*2*), obtenemos $y = 2{,}38$ m. Sustituyendo en (*2*), $b = 1{,}2$ m. Para este canal trapezoidal, $b = 1{,}12$ m e $y = 2{,}38$ m.

(*b*) $$V = (1/n)R^{2/3}S^{1/2}, \qquad 0{,}90 = (1/0{,}025)(2{,}38/2)^{2/3}S^{1/2}, \qquad S = 0{,}000405$$

27. Desarrollar la expresión para la profundidad crítica, energía específica crítica y velocidad crítica (*a*) en canales rectangulares y (*b*) en cualquier canal.

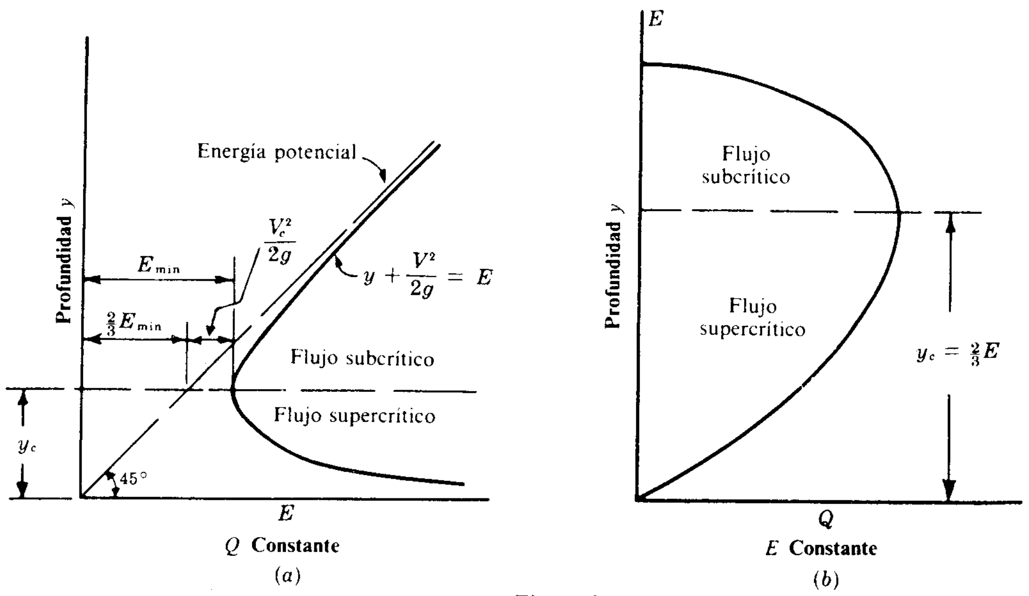


Fig. 10-6

Solución:

(*a*) **Canales rectangulares.**

Por definición,
$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q/b}{y}\right)^2 = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{q}{y}\right)^2 \qquad (1)$$

La profundidad crítica para un caudal dado Q ocurre cuando E es mínimo. Siguiendo el procedimiento normal de cálculo,

$$\frac{dE}{dy} = \frac{d}{dy}\left[y + \frac{1}{2g}\left(\frac{q}{y}\right)^2\right] = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0, \qquad q^2 = gy_c^3, \qquad y_c = \sqrt[3]{q^2/g} \qquad (2)$$

Eliminando q entre (*1*) y (*2*),

$$E_c = y_c + \frac{gy_c^3}{2gy_c^2} = \frac{3}{2}y_c \qquad (3)$$

Puesto que $q = yV$ (b = unidad), la expresión (*2*) da

$$y_c^3 = \frac{q^2}{g} = \frac{y_c^2V_c^2}{g}, \qquad V_c = \sqrt{gy_c}, \qquad \frac{V_c^2}{2g} = \frac{y_c}{2} \qquad (4)$$

(*b*) **Cualquier canal.**
$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2$$

Para un Q constante, y puesto que el área A varía con la profundidad y,

$$\frac{dE}{dy} = 1 + \frac{Q^2}{2g}\left(-\frac{2}{A^3}\cdot\frac{dA}{dy}\right) = 1 - \frac{Q^2\,dA}{A^3g\,dy} = 0$$

El área dA se define como la anchura de la superficie de agua $b' \times dy$. Sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{Q^2b'}{gA_c^3} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b'} \qquad (5)$$

Esta ecuación debe satisfacerse para las condiciones críticas del flujo. El segundo miembro es una función de la profundidad y, y generalmente se precisa una solución por aproximaciones sucesivas para determinar el valor de y_c para el que se satisface la ecuación (*5*).

Dividiendo Q^2 por A_c^2, o en función de la velocidad media, (5) puede escribirse de la forn

$$V_c^2/g = A_c/b' \qquad \text{o} \qquad V_c = \sqrt{gA_c/b'}$$

Introduciendo la profundidad media y_m, igual al área A dividida por la dimensión b', la ecuaci puede escribirse de la forma

$$Q = A\sqrt{gA/b'} = A\sqrt{gy_m}$$

Por otra parte, $\qquad V_c = \sqrt{gA_c/b'} = \sqrt{gy_m} \qquad \text{o} \qquad V_c^2/gy_m = 1$

La energía específica mínima es, aplicando (8),

$$E_{min} = y_c + V_c^2/2g = y_c + \tfrac{1}{2}y_m$$

Para un canal rectangular $A_c = b'y_c$, y (6) se reduce a la ecuación (4) anterior.

La Fig. 10-6 representa la ecuación (1) para Q constante y para E constante. Cuando el flujo est ximo de ser crítico, la superficie se hace inestable produciendo olas. No es deseable diseñar canale pendientes próximas a la crítica.

28. Deducir la expresión que da el caudal máximo por unidad de anchura q en un canal rectan para una energía específica E dada.

Solución:

Despejando q en la ecuación (1) del Problema 27, se tiene $q = y\sqrt{2g}(E - y)^{1/2}$. Derivando con res a y e igualando a cero, obtenemos $y_c = \frac{2}{3}E$. La ecuación (2) del Problema 27 se transforma ahora en

$$q_{max}^2 = g(\tfrac{2}{3}E_c)^3 = gy_c^3 \qquad \text{o} \qquad q_{max} = \sqrt{gy_c^3}$$

Resumiendo, para canales rectangulares, las características de flujo crítico son:

(*a*) $E_{min} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{q^2/g}$

(*b*) $q_{max} = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{g(\frac{2}{3}E_c)^3}$

(*c*) $y_c = \frac{2}{3}E_c = V_c^2/g = \sqrt[3]{q^2/g}$

(*d*) $V_c/\sqrt{gy_c} = N_F = 1$

(*e*) El flujo tranquilo o subcrítico se produce cuando $N_F < 1$ e $y/y_c > 1$.

(*f*) El flujo rápido o supercrítico se produce cuando $N_F > 1$ e $y/y_c < 1$.

29. Un canal rectangular conduce 5,4 m³/seg. Hallar la profundidad crítica y_c y la velocidad críti para (*a*) una anchura de 3,6 m y (*b*) una anchura de 2,7 m. (*c*) ¿Qué pendiente producirá la ve dad crítica en (*a*) si $n = 0{,}020$?

Solución:

(*a*) $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(5{,}4/3{,}6)^2/9{,}8} = 0{,}612$ m, $\qquad V_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9{,}8 \times 0{,}612} = 2{,}45$ m/seg.

(*b*) $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(5{,}4/2{,}7)^2/9{,}8} = 0{,}742$ m, $\qquad V_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9{,}8 \times 0{,}742} = 2{,}70$ m/seg.

(*c*) $V_c = \frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2}, \qquad 2{,}45 = \frac{1}{0{,}020}(\frac{3{,}6 \times 0{,}612}{4{,}824})^{2/3}S^{1/2}, \qquad S = 0{,}00683.$

30. Un canal trapezoidal cuyas paredes tienen una pendiente de 2 horizontal sobre 1 vertical trans ta un caudal de 16 m³/seg. Si la solera del canal tiene una anchura de 3,6 m, calcular (*a*) la fundidad crítica y (*b*) la velocidad crítica.

Solución:

(*a*) El Area $A_c = 3{,}6y_c + 2(\frac{1}{2}y_c \times 2y_c) = 3{,}6y_c + 2y_c^2$, y anchura de superficie $b' = 3{,}6 + 4y_c$.

La expresión (5) del Problema 27 da $\dfrac{(16)^2}{9{,}8} = \dfrac{(3{,}6y_c + 2y_c^2)^3}{3{,}6 + 4y_c}$.

Resolviendo esta ecuación por aproximaciones sucesivas, $y_c = 1{,}035$ m.

(*b*) La velocidad crítica V_c se determina mediante la ecuación (6) del Problema 27.

$$V_c = \sqrt{\frac{gA_c}{b'}} = \sqrt{\frac{9{,}8(3{,}726 + 2{,}142)}{3{,}6 + 4{,}14}} = 2{,}73 \text{ m/seg}$$

Como comprobación, haciendo $y = y_c = 1{,}035$, $V_c = Q/A_c = 16/[3{,}6(1{,}035) + 2(1{,}035)^2] = 2{,}73$ m/seg.

31. Un canal trapezoidal tiene una solera de 6 m de anchura, la pendiente de las paredes es de 1 sobre 1 y el agua circula a una profundidad de 1,00 m. Para $n = 0{,}015$ y un caudal de 10 m³/seg, calcular (*a*) la pendiente normal, (*b*) la pendiente crítica y la profundidad crítica para 10 m³/seg y (*c*) la pendiente crítica a la profundidad normal de 1,00 m.

Solución:

(*a*) $$Q = A\frac{1}{n}R^{2/3}S_N^{1/2}, \qquad 10 = (6+1)(\frac{1}{0{,}015})(\frac{7}{6+2\sqrt{2}})^{2/3}S_N^{1/2}, \qquad S_N = 0{,}000626$$

(*b*) $$V = \frac{Q}{A} = \frac{10}{6y + y^2} \quad \text{y} \quad V_c = \sqrt{\frac{gA_c}{b'}} = \sqrt{\frac{9{,}8(6y_c + y_c^2)}{6 + 2y_c}}$$

Igualando los términos de velocidad, operando y simplificando, obtenemos,

$$\frac{[y_c(6 + y_c)]^3}{3 + y_c} = 20{,}4$$

que, resolviendo por aproximaciones sucesivas, da la profundidad crítica $y_c = 0{,}634$ m.

La pendiente crítica S_c se calcula aplicando la ecuación de Manning:

$$10 = [6(0{,}634) + (0{,}634)^2](\frac{1}{0{,}015})(\frac{6(0{,}634) + (0{,}634)^2}{6 + 2(0{,}634\sqrt{2})})^{2/3}S_c^{1/2}, \qquad S_c = 0{,}0029$$

Si esta pendiente se mantiene uniforme, el flujo será crítico con una profundidad crítica de 0,634 m y con un $Q = 10$ m³/seg.

(*c*) De (*a*), para $y_N = 1{,}00$ m, $R = 0{,}793$ m y $A = 7{,}00$ m². Por otra parte, aplicando la ecuación (6) del Problema 27,

$$V_c = \sqrt{gA/b'} = \sqrt{9{,}8(7{,}00)/[6 + 2(1)]} = 2{,}928 \text{ m/seg}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de Manning, tenemos

$$2{,}928 = (1/0{,}015)(0{,}793)^{2/3}S_c^{1/2}, \qquad S_c = 0{,}00263$$

Esta pendiente producirá un flujo crítico uniforme en el canal trapezoidal a una profundidad de 1,00 m. Se observará que en este caso el caudal será $Q = AV = 7{,}00(2{,}928) = 20{,}496$ m³/seg.

32. Un canal rectangular de 9 m de ancho transporta 7,30 m³/seg con una profundidad de 0,90 m. (*a*) ¿Cuál es la energía específica? (*b*) Determinar si el flujo es subcrítico o supercrítico.

Solución:

(*a*) $$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{1}{2g}(\frac{Q}{A})^2 = 0{,}90 + \frac{1}{19{,}6}(\frac{7{,}30}{9 \times 0{,}90})^2 = 0{,}941 \text{ m (kg m/m)}.$$

(*b*) $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(7{,}30/9)^2/9{,}8} = 0{,}406$ m.

El flujo es subcrítico porque la profundidad del flujo es superior a la profundidad crítica. (Véase Problema 28.)

33. Un canal trapezoidal tiene una anchura de solera de 6 m y las paredes una pendiente de 2 horizontal sobre 1 vertical. Cuando la profundidad del agua es de 1,00 m, el caudal es de 10 m^3/seg. (*a*) ¿Cuál es la energía específica? (*b*) El flujo, ¿es subcrítico o supercrítico?

Solución:

(*a*) Area $A = 6(1{,}00) + 2(\frac{1}{2})(1{,}00)(2{,}00) = 8{,}00\ m^2$.

$$E = y + \frac{1}{2g}(\frac{Q}{A})^2 = 1{,}00 + \frac{1}{19{,}6}(\frac{10}{8})^2 = 1{,}08\ m$$

(*b*) Empleando $\dfrac{Q^2}{g} = \dfrac{A_c^3}{b'}$, $\dfrac{(10)^2}{9{,}8} = \dfrac{(6y_c + 2y_c^2)^3}{6 + 4y_c}$. Resolviendo por aproximaciones sucesivas, $y_c = 0{,}61$ m.
La profundidad real supera a la profundidad crítica, luego el flujo es subcrítico.

34. El caudal que pasa a través de un canal rectangular ($n = 0{,}012$) de 4,5 m de ancho es de 10,80 m^3/seg cuando la pendiente es de 1 m sobre 100 m. Determinar si el flujo es subcrítico o supercrítico.

Solución:

(1) Se examinan las condiciones críticas para el canal.

$$q_{max} = 10{,}80/4{,}5 = \sqrt{gy_c^3} \qquad \text{e} \qquad y_c = 0{,}838\ m$$

(2) La pendiente crítica para la profundidad crítica anterior puede hallarse mediante la fórmula de Chezy-Manning

$$Q = A\frac{1}{n}R^{2/3}S_c^{1/2}$$

$$10{,}80 = (4{,}50 \times 0{,}838)(\frac{1}{0{,}012})(\frac{4{,}50 \times 0{,}838}{4{,}50 + 2(0{,}838)})^{2/3}S_c^{1/2}, \qquad S_c = 0{,}00215+$$

Puesto que la pendiente del canal *supera* a la crítica, el flujo es supercrítico.

35. Un canal rectangular de 3 m de ancho transporta un caudal de 12 m^3/seg. (*a*) Tabular (como para preparar un diagrama) la energía específica en función de la profundidad de flujo para profundidades de 0,3 a 2,4 m. (*b*) Determinar la energía específica mínima. (*c*) ¿Qué tipo de flujo existe cuando la profundidad es 0,6 m y 2,4 m? (*d*) Para $C = 55$, ¿qué pendientes son necesarias para mantener las profundidades de (*c*)?

Solución:

(*a*) De $E = y + \dfrac{V^2}{2g} = y + \dfrac{(Q/A)^2}{2g}$ obtenemos:

Para $y = 0{,}30$ m, $\quad E = 0{,}30 + \dfrac{(12/0{,}90)^2}{2g} = 3{,}02$ m kg/kg

= 0,60	= 0,60 + 1,36	= 1,96
= 0,90	= 0,90 + 0,907	= 1,807
= 1,20	= 1,20 + 0,680	= 1,880
= 1,50	= 1,50 + 0,544	= 2,044
= 1,80	= 1,80 + 0,453	= 2,253
= 2,10	= 2,10 + 0,389	= 2,489
= 2,40	= 2,40 + 0,340	= 2,740 m kg/kg

(*b*) El valor mínimo de E está situado entre 1,96 y 1,880 m kg/kg.

Aplicando la ecuación (2) del Problema 27, $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(12/3)^2/9{,}8} = 1{,}178$ m.

Entonces, $E_{min} = E_c = \frac{3}{2}y_c = \frac{3}{2}(1{,}178) = 1{,}767$ m kg/kg.

Se observa que $E = 1{,}96$ para $y = 0{,}60$ m y 2,04 a 1,50 m de profundidad. La Figura (*a*) del Problema 27 indica este hecho, o sea, dos profundidades para una energía específica dada cuando el caudal Q es constante.

(*c*) Para 0,6 m de profundidad (por debajo de la profundidad crítica) el flujo es supercrítico y para 2,4 m de profundidad el flujo es subcrítico.

(*d*) $$Q = CA\sqrt{RS}$$

Para $y = 0{,}6$ m, $A = 1{,}8$ m^2 y $R = 1{,}8/4{,}2 = 0{,}429$ m, $12 = 55(1{,}8)\sqrt{0{,}429S}$ y $S = 0{,}0343$.

Para $y = 2{,}4$ m, $A = 7{,}2$ m^2 y $R = 7{,}2/7{,}8 = 0{,}923$ m, $12 = 55(7{,}2)\sqrt{0{,}923S}$ y $S = 0{,}000995$.

36. Una acequia rectangular ($n = 0{,}012$) se traza con una pendiente de 0,0036 y transporta 16,0 m^3/seg. En condiciones críticas de flujo, ¿qué anchura deberá tener la acequia?

Solución:

Del Problema 28, $q_{max} = \sqrt{gy_c^3}$. De ahí $16{,}0/b = \sqrt{9{,}8y_c^3}$.

Por aproximaciones sucesivas se comprueba el caudal calculado frente al caudal dado.

Tanteo 1. Haciendo $b = 2{,}5$ m, $y_c = \sqrt[3]{(16{,}0/2{,}5)^2/9{,}8} = 1{,}61$ m.

Entonces, $R = A/p = (2{,}5 \times 1{,}61)/5{,}72 = 0{,}704$ m

y $Q = AV = (2{,}5 \times 1{,}61)[\frac{1}{0{,}012}(0{,}704)^{2/3}(0{,}0036)^{1/2}] = 15{,}9$ m^3/seg.

Tanteo 2. Puesto que el caudal debe aumentarse, hacemos $b = 2{,}53$ m.

Entonces, $y_c = \sqrt[3]{(16{,}0/2{,}53)^2/9{,}8} = 1{,}60$ m, $R = (2{,}53 \times 1{,}60)/5{,}73 = 0{,}706$ m

y $Q = AV = (2{,}53 \times 1{,}60)[\frac{1}{0{,}012}(0{,}706)^{2/3}(0{,}0036)^{1/2}] = 16{,}0$ m^3/seg.

Este resultado es probablemente de suficiente exactitud.

37. Para una energía específica constante e igual a 1,98 m kg/kg, ¿qué caudal máximo deberá pasar por un canal rectangular de 3,00 m de ancho?

Solución:

Profundidad crítica $y_c = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3}(1{,}98) = 1{,}32$ m. (Véase ecuación (*1*) del Problema 28.)

Velocidad crítica $V_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9{,}8 \times 1{,}32} = 3{,}60$ m/seg y

Caudal máximo $Q = AV = (3{,}00 \times 1{,}32)(3{,}60) = 14{,}2$ m^3/seg.

Aplicando $q_{max} = \sqrt{gy_c^3}$ [ecuación (*b*) del Problema 28], obtenemos

Caudal máximo $Q = bq_{max} = 3{,}00\sqrt{9{,}8(1{,}32)^3} = 14{,}2$ m^3/seg.

38 Por un canal rectangular de 6 m de ancho, $n = 0{,}025$, circula agua a 1,50 m de profundidad con una pendiente de 14,7 m sobre 10.000 m. A lo ancho del canal se construye un vertedero sin contracciones *C*, de 0,735 m de altura ($m = 1{,}90$). Tomando la elevación de la solera del canal justamente aguas arriba del vertedero como 30,00, estimar (usando un tramo) la elevación de la superficie del agua en el punto *A*, 300 m aguas arriba del vertedero.

Solución:

Se calcula la nueva elevación de la superficie del agua en *B* en la Fig. 10-7 (la profundidad en el sentido de la corriente disminuye). Se observa que el flujo es no uniforme puesto que las profundidades, velocidades y áreas no son constantes desde el momento en que se instala el vertedero.

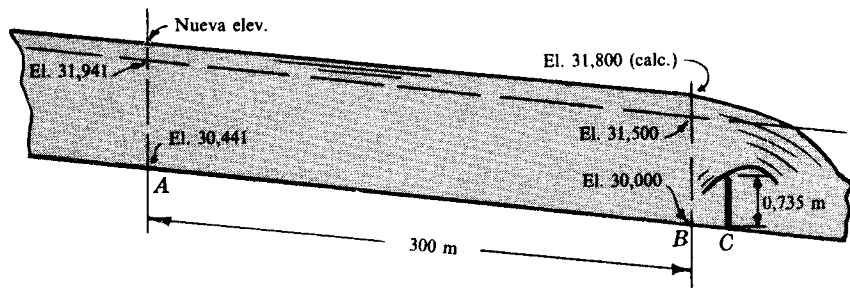


Fig. 10-7

$$Q = (6 \times 1{,}50)(1/0{,}025)(9/9)^{2/3}(0{,}00147)^{1/2} = 13{,}80 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Para una profundidad supuesta de 1,80 m justo aguas arriba del vertedero.

Velocidad de aproximación $V = Q/A = 13{,}80/(6 \times 1{,}8) = 1{,}28$ m/seg

La fórmula del vertedero da $13{,}80 = 1{,}90 \times 6[(H + \frac{(1{,}28)^2}{2g})^{3/2} - (\frac{(1{,}28)^2}{2g})^{3/2}]$. Luego

$$(H + 0{,}0836)^{3/2} = 1{,}210 + 0{,}024 = 1{,}234 \quad \text{y} \quad H = 1{,}066 \text{ m}$$
$$\text{Altura } Z = 0{,}735 \text{ m}$$
$$\text{Profundidad } y = 1{,}801 \text{ m} \quad \text{(hipótesis comprobada)}$$

La nueva elevación en A debe estar comprendida entre 31,941 y 32,241. Ensayando una elevación de 32,10 (y comprobando en la ecuación de Bernoulli),

Nueva área en $A = 6(32{,}10 - 30{,}44) = 9{,}96$ m² y $V = 13{,}80/9{,}96 = 1{,}39$ m/seg.
Velocidad media $= \frac{1}{2}(1{,}28 + 1{,}39) = 1{,}33$ m/seg.
Radio hidráulico medio $R = \frac{1}{2}(10{,}80 + 9{,}96)/[\frac{1}{2}(9{,}60 + 9{,}32)] = 110$ m.

$$\text{Pérdida de carga } h_L = (\frac{Vn}{R^{2/3}})^2 L = (\frac{1{,}33 \times 0{,}025}{(1{,}10)^{2/3}})^2(300) = 0{,}292 \text{ m.}$$

Aplicando ahora la ecuación de Bernoulli entre A y B, tomando B como referencia,

$$32{,}10 + (1{,}39)^2/2g = 31{,}80 + (1{,}28)^2/2g$$

que se reduce a $31{,}91 = 31{,}88$ (aproximadamente)

La diferencia de 0,03 m está dentro del error del factor de rugosidad n. Por consiguiente, no se precisa mayor aproximación. Se empleará, pues, la elevación de 32,10 m.

39. Desarrollar una fórmula que relacione la longitud, energía y pendiente para flujo no uniforme en el caso de problemas similares al precedente.

Solución:

Aplicando la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2 en la dirección del flujo, tomando como referencia la sección inferior a la solera del canal, obtenemos

$$\text{energía en 1} - \text{pérdida de carga} = \text{energía en 2}$$
$$(z_1 + y_1 + V_1^2/2g) - h_L = (z_2 + y_2 + V_2^2/2g)$$

La pendiente de la línea de alturas totales S es h_L/L; entonces, $h_L = SL$. La pendiente de la solera del canal S_o es $(z_1 - z_2)/L$; luego $z_1 - z_2 = S_oL$. Reagrupando y sustituyendo,

$$S_oL + (y_1 - y_2) + (V_1^2/2g - V_2^2/2g) = SL$$

Esta expresión se resuelve generalmente para la longitud L en estudios de canales abiertos. Así, pues,

$$L \text{ en m} = \frac{(y_1 + V_1^2/2g) - (y_2 + V_2^2/2g)}{S - S_o} = \frac{E_1 - E_2}{S - S_o} \qquad (A)$$

Los siguientes problemas ilustrarán la aplicación de la expresión (A).

40. Una acequia rectangular (n = 0,013) tiene 1,80 m de ancho y transporta 1,78 m³/seg de agua. En una cierta sección F la profundidad es de 0,96 m. Si la pendiente de la solera del canal es constante e igual a 0,000400, determinar la distancia que hay entre la sección F y la sección donde la profundidad es 0,81 m. (Emplear un tramo.)

Solución:

Se supone que la sección cuya profundidad es 0,81 m está *aguas arriba* de F. Empleamos los subíndices 1 y 2 como es usual.

$$A_1 = 1{,}80(0{,}81) = 1{,}458 \text{ m}^2, \quad V_1 = 1{,}782/1{,}458 = 1{,}221 \text{ m/seg}, \quad R_1 = 1{,}458/3{,}42 = 0{,}426 \text{ m}$$
$$A_2 = 1{,}80(0{,}96) = 1{,}728 \text{ m}^2, \quad V_2 = 1{,}782/1{,}728 = 1{,}032 \text{ m/seg}, \quad R_2 = 1{,}728/3{,}72 = 0{,}465 \text{ m}$$

De ahí, V_{media} = 1,126 m/seg y R_{medio} = 0,445 m. Entonces para flujo no uniforme,

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_o - S} = \frac{(0{,}055 + 0{,}96) - (0{,}077 + 0{,}81)}{0{,}000400 - (\dfrac{0{,}013 \times 1{,}126)^2}{(0{,}445)^{2/3}})} = -556{,}5 \text{ m}$$

El signo menos significa que la sección cuya profundidad es 0,81 m está aguas abajo de F y no aguas arriba como se ha supuesto.

Estos problemas ilustran cómo debe emplearse el método. Una mayor precisión se obtendría suponiendo profundidades intermedias de 0,900 m y 0,855 m (o profundidades exactas por interpolación de valores), calculando valores de ΔL y sumando éstos. De esta forma debe calcularse una *curva de perfil.* La curva de perfil no es una línea recta.

41. Un canal rectangular de 12 m de ancho conduce 25 m³/seg de agua. La pendiente del canal es 0,00283. En la sección 1 la profundidad es 1,35 m y en la sección 2, 90 m aguas abajo, la profundidad es 1,50 m. ¿Cuál es el valor medio del factor de rugosidad n?

Solución:

$$A_2 = 12(1{,}50) = 18 \text{ m}^2, \quad V_2 = 25/18 = 1{,}39 \text{ m/seg}, \quad R_2 = 18/15 = 1{,}20 \text{ m}$$
$$A_1 = 12(1{,}35) = 16{,}20 \text{ m}^2, \quad V_1 = 25/16{,}20 = 1{,}54 \text{ m/seg}, \quad R_1 = 16{,}20/14{,}70 = 1{,}10 \text{ m}$$

De ahí, V_{media} = 1,465 m/seg y R_{medio} = 1,15 m. Para flujo no uniforme,

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - V_1^2/2g + y_1)}{S_o - (\dfrac{nV}{R^{2/3}})^2}, \qquad 90 = \frac{(0{,}0984 + 1{,}500) - (0{,}1215 + 1{,}350)}{0{,}0283 - (\dfrac{n \times 1{,}465}{(1{,}15)^{2/3}})^2}$$

y n = 0,0282.

42. Un canal rectangular de 6 m de ancho tiene una pendiente de 1 m por 1000 m. La profundidad en la sección 1 es 2,550 m y en la sección 2, 600 m aguas abajo, la profundidad es 3,075 m. Si n = 0,011, determinar el caudal probable en m³/seg.

Solución:

Empleando como referencia el plano del lecho de la corriente en la sección 2,

$$\text{energía en } 1 = y_1 + V_1^2/2g + z_1 = 2{,}550 + V_1^2/2g + 0{,}600$$
$$\text{energía en } 2 = y_2 + V_2^2/2g + z_2 = 3{,}075 + V_2^2/2g + 0$$

La caída de la línea de alturas totales = energía en 1 − energía en 2. Puesto que el valor es desconocido, se supondrá un valor de la pendiente.

$$\text{Pendiente } S = \frac{\text{pérdida de carga}}{L} = \frac{(3{,}150 - 3{,}075) + (V_1^2/2g - V_2^2/2g)}{600} \qquad (1)$$

Se supone que S = 0,000144. Por otra parte son necesarios los valores de A_{media} y R_{medio}

$$A_1 = 6(2{,}550) = 15{,}300 \text{ m}^2, \quad R_1 = 15{,}300/11{,}10 = 1{,}38 \text{ m}$$
$$A_2 = 6(3{,}075) = 18{,}450 \text{ m}^2, \quad R_2 = 18{,}450/12{,}15 = 1{,}52 \text{ m}$$

De ahí, A_{media} = 16,875 m² y R_{medio} = 1,45 m.

(1) Primera aproximación.

$$Q = A_m(1/n)R_m^{2/3}S^{1/2} = 16{,}875(1/0{,}011)(1{,}45)^{2/3}(0{,}000144)^{1/2} = 23{,}58 \text{ m}^3/\text{seg}$$

En la ecuación (*1*) anterior se comprueba el valor de la pendiente S:

$$V_1 = 23{,}58/15{,}30 = 1{,}54, \quad V_1^2/2g = 0{,}121$$
$$V_2 = 23{,}58/18{,}45 = 1{,}28, \quad V_2^2/2g = 0{,}083$$

$$S = \frac{(3{,}150 - 3{,}075) + 0{,}038}{600} = 0{,}000188$$

El gradiente de la línea de altura total es de 0,113 m en 600 m, superior al valor supuesto.

(2) Segunda aproximación.

Haciendo $S = 0{,}000210$, $Q = 23{,}58(\frac{0{,}000210}{0{,}000144})^{1/2} = 28{,}50 \text{ m}^3/\text{seg}$.

Comprobando, $V_1 = 28{,}50/15{,}30 = 1{,}86$ m/seg, $V_1^2/2g = 0{,}177$ m
$V_2 = 28{,}50/18{,}45 = 1{,}54$ m/seg, $V_2^2/2g = 0{,}122$ m

$$S = \frac{(3{,}150 - 3{,}075) + 0{,}055}{600} = 0{,}000217$$

Esta pendiente comprueba (razonablemente) la hipótesis hecha. Por consiguiente, Q aproximado = 28, m³/seg.

43. Un depósito alimenta un canal rectangular de 4,50 m de ancho y $n = 0{,}015$. A la entrada, la pr fundidad de agua en el depósito es de 1,87 m por encima de la solera del canal. (Véase la Fig. 10-8 El canal tiene 240 m de longitud y un desnivel de 0,216 m en esa longitud. La profundidad detr de un vertedero situado en el extremo de descarga del canal es de 1,24 m. Determinar, empleanc un solo tramo, la capacidad del canal suponiendo que la pérdida a la entrada es $0{,}25V_1^2/2g$.

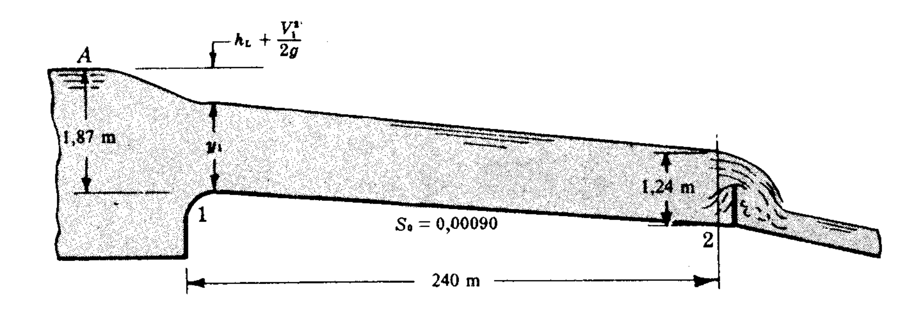


Fig. 10-8

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y 1, tomando como referencia 1, tenemos

$$(0 + \text{despr.} + 1{,}87) - 0{,}25V_1^2/2g = (0 + V_1^2/2g + y_1)$$

y
$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_o - (\frac{nV_m}{R_m^{2/3}})^2}$$

Estas ecuaciones se resuelven por aproximaciones sucesivas hasta que L se aproxime o iguale a 240

Haciendo $y_1 = 1{,}50$ m, de (*1*) se tiene $V_1^2/2g = (1{,}87 - 1{,}50)/1{,}25 = 0{,}296$ m, $V_1 = 2{,}41$ m/seg y q $y_1V_1 = 1{,}50(2{,}41) = 3{,}61$ m³/seg, $V_2 = 3{,}61/1{,}24 = 2{,}91$ m³/seg.

$$V_{media} = \tfrac{1}{2}(2{,}41 + 2{,}91) = 2{,}66 \text{ m/seg}$$

y $$R_{medio} = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2) = \tfrac{1}{2}[(4{,}5 \times 1{,}50)/7{,}5 + (4{,}5 \times 1{,}24)/6{,}98] = 0{,}85 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) anterior, hallamos $L = 113$ m.

Se aumenta el valor de y_1 a 1,60 m y se repiten los cálculos. Los resultados en forma tabulada son:

y_1	V_1	q_1	V_2	V_m	R_m	L	*Notas*
1,60	2,06	3,30	2,66	2,36	0,867	345 m	se disminuye y_1
1,57	2,17	3,40	2,75	2,46	0,862	246 m	resultado satisfactorio

La capacidad del canal = 3,40 × 4,5 = 15,30 m^3/seg.

Si se requiriese mayor precisión, se comienza por el extremo inferior y, para un caudal por unidad de anchura q = 3,40 m^3/seg, se halla la longitud del tramo en el punto en que la profundidad sea aproximadamente un 10 % mayor que 1,24, o sea, aproximadamente 1,36 m, luego a una profundidad de 1,48 m, y así sucesivamente. Si la suma de las longitudes excede de 240 m, se disminuye el valor de y_1, obteniendo un valor mayor de q.

44. Deducir la expresión que da la pendiente de la superficie de un líquido en canales rectangulares anchos para flujo gradualmente no uniforme.

Solución:

La energía total por kilogramo de fluido con respecto a un plano arbitrario de referencia es

$$H = y + V^2/2g + z$$

donde el factor de corrección de la energía cinética α se toma como la unidad. Derivando esta expresión con respecto a L, distancia a lo largo del canal, se tiene

$$\frac{dH}{dL} = \frac{dy}{dL} + \frac{d(V^2/2g)}{dL} + \frac{dz}{dL} \qquad (A)$$

Para canales rectangulares (o para canales anchos de profundidad media y_m), $V^2 = (q/y)^2$ y

$$\frac{d(q^2/2gy^2)}{dL} = -\frac{2q^2}{2gy^3}\left(\frac{dy}{dL}\right) = -\frac{V^2}{gy}\left(\frac{dy}{dL}\right)$$

Sustituyendo en (A), haciendo $dH/dL = -S$ (pendiente de la línea de alturas totales), y $dz/dL = -S_o$ (pendiente de la solera del canal), obtenemos

$$-S = \frac{dy}{dL} - \frac{V^2}{gy}\left(\frac{dy}{dL}\right) - S_o \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dL} = \frac{S_o - S}{(1 - V^2/gy)} = \frac{S_o - S}{1 - N_F^2} \qquad (B)$$

El término dy/dL representa la pendiente de la superficie del agua respecto a la solera del canal. Cuando el canal se inclina hacia abajo en la dirección del flujo, S_o es positivo. Análogamente, S es positivo (siempre). Para flujo uniforme $S = S_o$ y $dy/dL = 0$.

Otra forma de la ecuación (B) puede obtenerse como se indica a continuación. La fórmula de Manning es

$$Q = (1/n)AR^{2/3}S^{1/2}$$

Resolviendo esta ecuación para la pendiente de la línea de alturas totales, haciendo $q = Q/b$, $A = by$ y $R = y$ para canales rectangulares anchos, se obtiene

$$\frac{dH}{dL} = S = \frac{n^2(q^2b^2/b^2y^2)}{y^{4/3}}$$

Análogamente, la pendiente de la solera del canal, en función de la profundidad normal y_N y del coeficiente n_N, puede escribirse de la forma

$$\frac{dz}{dL} = S_o = \frac{n_N^2(q^2b^2/b^2y_N^2)}{y_N^{4/3}}$$

Entonces la ecuación (B) se transforma en

$$-\frac{n^2(q^2b^2/b^2y^2)}{y^{4/3}} = (1 - V^2/gy)\frac{dy}{dL} - \frac{n_N^2(q^2b^2/b^2y_N^2)}{y_N^{4/3}}$$

Pero $V^2 = q^2/y^2$, $n \cong n_N$ y $q^2/g = y_c^3$. Entonces,

$$\frac{-n^2q^2}{y^{10/3}} = \frac{dy}{dL}(1 - y_c^3/y^3) - \frac{n^2q^2}{y_N^{10/3}} \qquad (C)$$

$$\frac{dy}{dL} = \frac{(nq)^2[1/y_N^{10/3} - 1/y^{10/3}]}{1 - (y_c/y)^3} \qquad (D)$$

Haciendo $Q/b = q = y_N[(1/n)y_N^{2/3}S_o^{1/2}]$ o $(nq)^2 = y_N^{10/3}S_o$, la ecuación (D) se convierte en

$$\frac{dy}{dL} = S_o\left[\frac{1 - (y_N/y)^{10/3}}{1 - (y_c/y)^3}\right] \qquad (E)$$

Hay condiciones límites para los perfiles superficiales. Por ejemplo, cuando y se aproxima a y_c, el denominador de (E) tiende hacia cero. Por consiguiente, dy/dL se hace infinito y las curvas cortan perpendicularmente a la línea de profundidad crítica. De ahí que los perfiles de superficie en las proximidades de $y = y_c$ sean solo aproximados.

Análogamente, cuando y se aproxima a y_N, el numerador tiende a cero. Por tanto, las curvas tienden asintóticamente a la profundidad normal.

Finalmente, cuando y tiende a cero, el perfil de superficie se aproxima a la solera del canal perpendicularmente, lo que es imposible bajo la condición referente al flujo gradualmente no uniforme.

45. Resumir el sistema de clasificación de perfiles superficiales para flujo gradualmente no uniforme en canales anchos.

Solución:

Existe un cierto número de diferentes condiciones en un canal que dan origen a unos doce tipos distintos de flujo no uniforme. En la expresión (E) del Problema 44, para valores positivos de dy/dL, la profundidad y aumenta aguas abajo a lo largo del canal, y para valores negativos de dy/dL la profundidad y disminuirá aguas abajo a lo largo del canal.

En la tabla que sigue se presenta un resumen de los doce tipos diferentes de flujo no uniforme. Algunos de ellos se examinarán aquí y el lector puede analizar los tipos restantes de flujo de manera similar.

La clasificación «suave» resulta de la pendiente del canal S_o, siendo tal que la profundidad normal $y_N > y_c$. Si la profundidad y es mayor que y_N e y_c, la curva se llama «tipo 1»; si la profundidad y está comprendida entre y_N e y_c, tipo 2; y si la profundidad y es menor que y_N e y_c, tipo 3.

Se observará que, para las curvas del tipo 1, puesto que la velocidad es decreciente debido al aumento de la profundidad, la superficie del agua debe aproximarse a una asíntota horizontal (véase M_1, C_1 y S_1). Análogamente, las curvas que se acercan a la línea de profundidad normal lo hacen también asintóticamente. Como se ha dicho anteriormente, las curvas que se aproximan a la línea de profundidad crítica cortan a ésta perpendicularmente, puesto que el denominador de la expresión (E) del Problema 44 se hace cero en tales casos. Sin embargo, las curvas para pendientes críticas son una excepción a las afirmaciones anteriores ya que es imposible tener una superficie de agua al mismo tiempo tangente y perpendicular a la línea de profundidad crítica.

En cada perfil de la siguiente tabla la escala vertical está muy ampliada respecto a la escala horizontal. Como se indica en los problemas numéricos para las curvas M_1, tales perfiles pueden tener cientos de metros de extensión.

La tabla siguiente da las relaciones entre pendientes y profundidades, el signo de dy/dL, el tipo de perfil, el símbolo del perfil, el tipo de flujo, y un esquema representando la forma del perfil. Los valores de y dentro de cada perfil pueden observarse que son mayores o menores que y_N y/o y_c examinando cada esquema.

Pendiente del canal	Relaciones de profundidad	$\left(\frac{dy}{dL}\right)$	Prof. en el sent. de la corriente	Símbolo	Tipo de flujo	Forma del perfil
Suave $0 < S < S_c$	$y > y_N > y_c$	+	Aumenta	M_1	Subcrítico	
	$y_N > y > y_c$	−	Disminuye	M_2	Subcrítico	
	$y_N > y_c > y$	+	Aumenta	M_3	Supercrítico	
Horizontal $S = 0$ $y_N = \infty$	$y > y_c$	−	Disminuye	H_2	Subcrítico	
	$y_c > y$	+	Aumenta	H_3	Supercrítico	
Crítica $S_N = S_c$ $y_N = y_c$	$y > y_c = y_N$	+	Aumenta	C_1	Subcrítico	
	$y_c = y = y_N$		Constante	C_2	Uniforme, crítico	
	$y_c = y_N > y$	+	Aumenta	C_3	Supercrítico	
Pronunciada $S > S_c > 0$	$y > y_c > y_N$	+	Aumenta	S_1	Subcrítico	
	$y_c > y > y_N$	−	Disminuye	S_2	Supercrítico	
	$y_c > y_N > y$	+	Aumentar	S_3	Supercrítico	
Adversa $S < 0$ $y_N = \infty$	$y > y_c$	−	Disminuye	A_2	Subcrítico	
	$y_c > y$	+	Aumenta	A_3	Supercrítico	

46. Desarrollar para un canal rectangular una expresión que dé la relación entre las profundidades antes y después de un resalto hidráulico. (Véase la Figura 10-9.)

Solución:

Para el volumen libre comprendido entre las secciones 1 y 2, considerando una anchura de canal unidad y un caudal por unidad de anchura q,

$$P_1 = w\bar{h}A = w(\tfrac{1}{2}y_1)y_1 = \tfrac{1}{2}wy_1^2 \qquad \text{y análogamente} \qquad P_2 = \tfrac{1}{2}wy_2^2$$

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento,

$$\Delta P_x\, dt = \Delta \text{ cantidad de movimiento} = \frac{W}{g}(\Delta V_x)$$

$$\tfrac{1}{2}w(y_2^2 - y_1^2)dt = \frac{wq\, dt}{g}(V_1 - V_2)$$

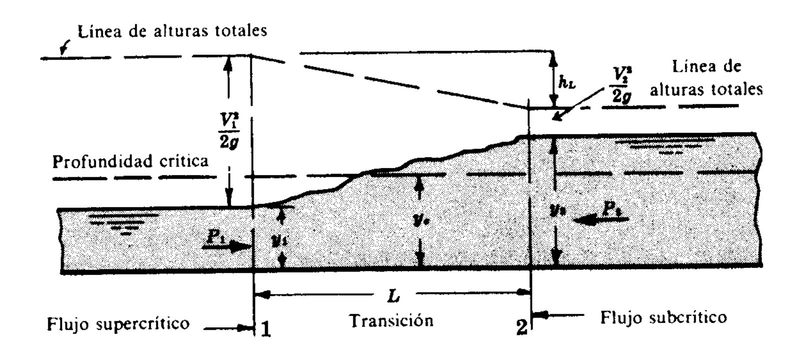


Fig. 10-9

Puesto que $V_2y_2 = V_1y_1$ y $V_1 = q/y_1$, la ecuación anterior se convierte en

$$q^2/g = \tfrac{1}{2}y_1y_2(y_1 + y_2) \qquad (1)$$

Como $q^2/g = y_c^3$,

$$y_c^3 = \tfrac{1}{2}y_1y_2(y_1 + y_2) \qquad (2)$$

La longitud del resalto se establece de manera que varíe entre $4{,}3y_2$ y $5{,}2y_2$.

Para la relación entre L/y_2 y el número de Froude $V_1/\sqrt{gy_1}$, véase página 73 de *Engineering Hydraulics*, Hunter Rouse, John Wiley & Sons, 1950.

El resalto hidráulico es un disipador de energía. En el diseño de cuencos protectores de resalto hidráulico es importante conocer la longitud del resalto y la profundidad y_2. Una buena disipación de energía se tiene cuando $V_1^2/gy_1 = 20$ a 80.

47. Un canal rectangular de 6 m de ancho transporta 11 m³/seg de agua y descarga en una solera protectora de 6 m de ancho, de pendiente nula, a una velocidad media de 6 m/seg. ¿Cuál es la altura del resalto hidráulico? ¿Qué energía se absorbe (pérdida) en el resalto?

Solución:

(*a*) $V_1 = 6$ m/seg, $q = 11/6 = 1{,}833$ m³/seg/m de anchura, e $y = q/V_1 = 0{,}306$ m. Entonces,

$$q^2/g = \tfrac{1}{2}y_1y_2(y_1 + y_2), \qquad (1{,}833)^2/9{,}8 = \tfrac{1}{2}(0{,}306)y_2(0{,}306 + y_2), \qquad 2{,}245 = 0{,}306y_2 + y_2^2$$

de donde $y_2 = -1{,}659$ m, $+1{,}353$ m. Siendo extraña la raíz negativa, $y_2 = 1{,}353$ m y la altura del resalto hidráulico es $(1{,}353 - 0{,}306) = 1{,}047$ m.

Se observa que $y_c = \sqrt[3]{(1{,}833)^2/9{,}8}$ o $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}y_1y_2(y_1 + y_2)} = 0{,}70$ m.

Por consiguiente, el flujo a 0,306 m de profundidad es supercrítico y a 1,353 m, subcrítico.

(*b*) Antes del resalto, $E_1 = V_1^2/2g + y_1 = (6)^2/2g + 0{,}306 = 2{,}143$ m kg/kg.

Después del resalto, $E_2 = V_2^2/2g + y_2 = [11/(6 \times 1{,}353)]^2/2g + 1{,}353 = 1{,}447$ m kg/kg.

Pérdida de energía por segundo $= wQH = 1000(11)(2{,}143 - 1{,}447) = 7656$ m kg/seg.

48. Un canal rectangular de 4,80 m de ancho transporta un caudal de 5,20 m³/seg. La profundidad aguas abajo del resalto hidráulico es 1,26 m. (*a*) ¿Cuál es la profundidad aguas arriba? (*b*) ¿Cuál es la pérdida de carga?

Solución:

(*a*) $q^2/g = \frac{1}{2}y_1y_2(y_1 + y_2)$, $\quad (5{,}20/4{,}80)^2/9{,}8 = 0{,}63y_1(y_1 + 1{,}26)$, $\quad y_1 = 0{,}135$ m

(*b*)

$$A_1 = 4{,}80(0{,}135) = 0{,}648 \text{ m}^2, \quad V_1 = 5{,}20/0{,}648 = 8{,}025 \text{ m/seg}$$
$$A_2 = 4{,}80(1{,}26) = 6{,}048 \text{ m}^2, \quad V_2 = 5{,}20/6{,}048 = 0{,}860 \text{ m/seg}$$
$$E_1 = V_1^2/2g + y_1 = (8{,}025)^2/2g + 0{,}135 = 3{,}421 \text{ m kg/kg}$$
$$E_2 = V_2^2/2g + y_2 = (0{,}860)^2/2g + 1{,}26 = 1{,}298 \text{ m kg/kg}$$

Pérdida de energía $= 3{,}421 - 1{,}298 = 2{,}123$ m kg/kg o m.

49. Después de pasar por el aliviadero de una presa, 243 m³/seg pasan a través de un cuenco de hormigón ($n = 0{,}013$) plano. La velocidad del agua en la base del aliviadero es de 12,60 m/seg y la anchura del cuenco es 54 m. Estas condiciones producirán un resalto hidráulico, siendo 3,00 m la profundidad en el canal situado después del cuenco. A fin de que el resalto esté dentro del cuenco, (*a*) ¿con qué longitud deberá construirse el cuenco? (*b*) ¿Cuánta energía se pierde desde el pie del aliviadero hasta la sección de aguas abajo del resalto?

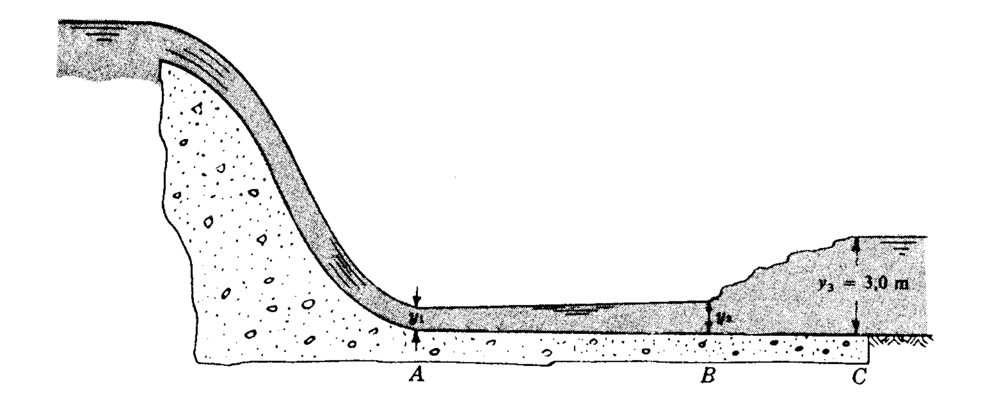


Fig. 10-10

Solución:

(*a*) Según la Fig. 10-10, primero se calcula la profundidad y_2 en el extremo aguas arriba del resalto.

$$q^2/g = \tfrac{1}{2}y_2y_3(y_2 + y_3), \quad (243/54)^2/9{,}8 = \tfrac{1}{2}(3)y_2(y_2 + 3), \quad y_2 = 0{,}405 \text{ m}$$

Por otra parte, $\quad y_1 = q/V_1 = (243/54)/12{,}6 = 0{,}357$ m

Ahora se calcula la longitud L_{AB} del flujo retardado

$V_1 = 12{,}60$ m/seg, $\quad V_1^2/2g = 8{,}10$ m, $\quad R_1 = (54 \times 0{,}357)/54{,}714 = 0{,}352$ m

$V_2 = q/y_2 = 4{,}50/0{,}405 = 11{,}11$ m/seg, $\quad V_2^2/2g = 6{,}30$ m, $\quad R_2 = (54 \times 0{,}405)/54{,}81 = 0{,}399$ m

De ahí, $V_{media} = 11,855$ m/seg, $R_{medio} = 0,376$ m, y

$$L_{AB} = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_o - S} = \frac{(6,30 + 0,405) - (8,10 + 0,357)}{0 - (\frac{0,013 \times 11,855}{(0,376)^{2/3}})^2} = 20,0 \text{ m}$$

La longitud del resalto L_R entre B y C está comprendida entre $4,3y_3$ y $5,2y_3$ m. Suponiendo el val conservativo de $5,0y_3$,

$$L_R = 5,0 \times 3,0 = 15,0 \text{ m}$$

Por consiguiente, longitud total $ABC = 20,0 + 15,0 = 35,0$ m (aproximadamente).

(*b*) Energía en $A = y_1 + V_1^2/2g = 0,357 + 8,100 = 8,457$ m kg/kg.
Energía en $C = y_3 + V_3^2/2g = 3,000 + (1,5)^2/2g = 3,115$ m kg/kg.
Pérdida total de energía $= wQH = 1000(243)(5,342) = 1,40 \times 10^6$ m kg/kg.

50. Con el fin de que el resalto hidráulico situado después de un aliviadero no se desplace aguas abaj establecer la relación entre las variables indicadas en la Fig. 10-11. (El profesor E. A. Elevatorsk sugiere el empleo de parámetros adimensionales, como se hace a continuación. Véase «Civil Eng neering», agosto de 1958.)

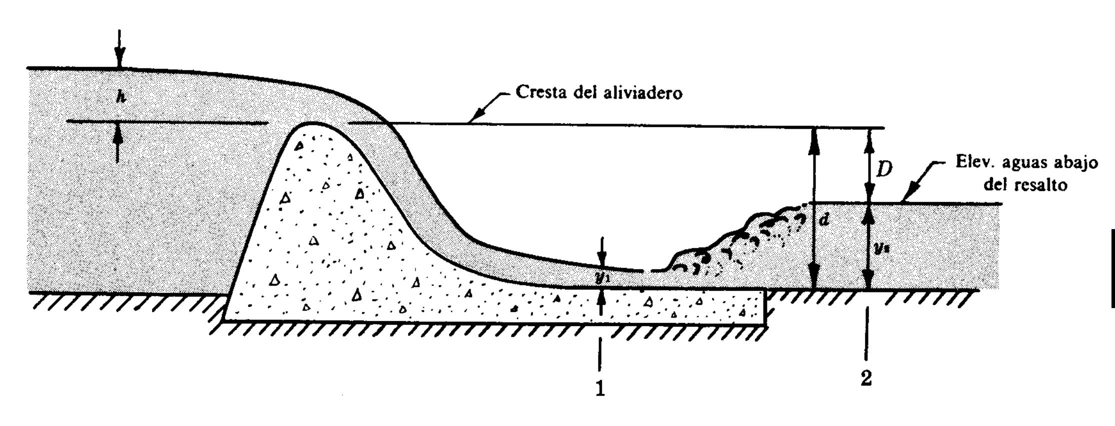


Fig. 10-11

Solución:

La ecuación de energía se aplica entre una sección aguas arriba de la presa donde h puede medirse y la sección 1, despreciando la altura de velocidad de aproximación, o sea,

$$(h + d) + 0 + \text{despr.} - \text{pérdidas (despreciadas)} = 0 + 0 + V_1^2/2g$$

o $V_1 = \sqrt{2g(h+d)}$.

Como $q = y_1V_1$ (m³/seg/m de ancho), $y_1 = \dfrac{q}{V_1} = \dfrac{q}{\sqrt{2g(d+h)}}$

o
$$y_1 = \frac{q}{\sqrt{2g}\,(d/h + 1)^{1/2}h^{1/2}} \qquad (A)$$

Del Problema 46, la relación del resalto hidráulico es

$$\frac{y_2^2 - y_1^2}{2} = \frac{qV_1}{g}\left(\frac{y_2 - y_1}{y_2}\right) \qquad \text{o} \qquad gy_2^2 + gy_1y_2 = 2qV_1$$

Despejando,
$$y_2 = \frac{-y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + 8qV_1/g}}{2}$$

Dividiendo por y_1 se tiene una expresión adimensional

$$\frac{y_2}{y_1} = -\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 8qV_1/y_1^2g} = \tfrac{1}{2}[\sqrt{1 + 8q^2/gy_1^3} - 1] \qquad (B)$$

Puesto que $y_2 = (d - D)$, $y_2/y_1 = (d - D)y_1$ se sustituye en (B) junto con el valor de y_1 de (A)

$$\frac{d-D}{y_1} = \tfrac{1}{2}[\sqrt{1 + 8q^2/gy_1^3} - 1]$$

$$\frac{2(d-D)\sqrt{2g}\,(d/h+1)^{1/2}h^{1/2}}{q} + 1 = \sqrt{1 + \frac{8(2^{3/2})(g^{3/2})(d/h+1)^{3/2}h^{3/2}}{qg}}$$

La ecuación se pone en forma adimensional multiplicando el primer miembro por h/h, dividiendo ambos miembros por $\sqrt{8}$ y agrupando términos:

$$\left(\frac{h^{3/2}g^{1/2}}{q}\right)\left(\frac{d-D}{h}\right)\left(\frac{d}{h}+1\right)^{1/2} + 0{,}353 = \sqrt{\tfrac{1}{8} + 2{,}828\left(\frac{g^{1/2}h^{3/2}}{q}\right)\left(\frac{d}{h}+1\right)^{3/2}} \qquad (C)$$

Los términos adimensionales en (C) pueden escribirse así:

$$\pi_1 = \frac{h^{3/2}g^{1/2}}{q}, \qquad \pi_2 = \frac{D}{h}, \qquad \pi_3 = \frac{d}{h}$$

Entonces la ecuación (C) se convierte en

$$\pi_1(\pi_3 - \pi_2)(\pi_3+1)^{1/2} + 0{,}353 = \sqrt{\tfrac{1}{8} + 2{,}828\pi_1(\pi_3+1)^{3/2}} \qquad (D)$$

El profesor Elevatorski ha preparado una gráfica de la ecuación (D) que permite deducir una fácil solución. Para valores calculados de π_1 y π_2, la gráfica da el valor de π_3. (Véase «Civil Engineering», agosto de 1958).

El profesor Elevatorski, al comentar la omisión de la pérdida de energía sobre la cara del aliviadero, dice que «al despreciar la pérdida debida a la fricción se producirá un ligero exceso del nivel de agua en el cuenco protector. Un resalto ligeramente inundado es mejor disipador de energía comparado con otro diseñado para la profundidad y_2».

51. Determinar la elevación del cuenco de un aliviadero si $q = 5$ m³/seg/m, $h = 3$ m, $D = 21$ m, y la cresta del aliviadero tiene una elevación de 60 m.

Solución:

S

I

Empleando las relaciones adimensionales deducidas en el problema precedente,

$$\pi_1 = g^{1/2}h^{3/2}/q = 3{,}13(3^{3/2})/5 = 3{,}253, \qquad \pi_2 = D/h = 21/3 = 7{,}00, \qquad \pi_3 = d/h = d/3$$

La ecuación (D) del Problema 50 puede escribirse entonces de la forma

$$3{,}253(d/3 - 7{,}000)(d/3+1)^{1/2} + 0{,}353 = \sqrt{0{,}125 + 2{,}828(3{,}253)(d/3+1)^{3/2}}$$

Resolviendo por aproximaciones sucesivas para $\pi_3 = d/3$, hallamos $\pi_3 = 77{,}4$, o $d = 25{,}8$ m. La elevación del cuenco del aliviadero es $(60 - 25{,}8) = 34{,}2$ m por encima del plano de referencia.

52. Establecer la ecuación que da el caudal a través de un vertedero de pared gruesa suponiendo que no existen pérdidas de carga.

Solución:

En la sección donde se produce el flujo crítico, $q = V_c y_c$. Pero $y_c = V_c^2/g = \frac{2}{3}E_c$, y $V_c = \sqrt{g(\frac{2}{3}E_c)}$. Por consiguiente, el valor teórico del caudal q es

$$q = \sqrt{g(\tfrac{2}{3}E_c)} \times \tfrac{2}{3}E_c = 1{,}70E_c^{3/2}$$

Sin embargo, el valor de E_c es difícil de medir con precisión porque la profundidad crítica es difícil de localizar. La ecuación práctica es

$$q = CH^{3/2} \cong 1{,}67H^{3/2}$$

El vertedero se calibrará en el lugar de utilización para obtener resultados precisos.

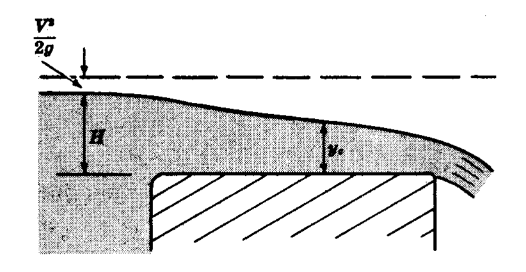


Fig. 10-12

53. Desarrollar una expresión para un caudalímetro crítico e ilustrar el uso de la fórmula.

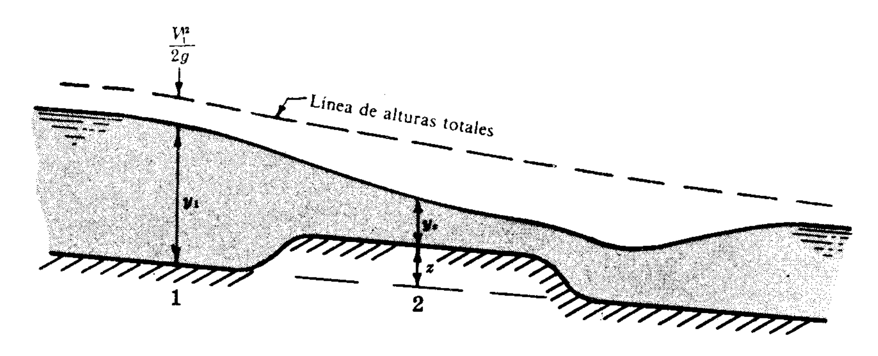


Fig. 10-13

Solución:

Un método excelente para medir el caudal en canales abiertos es por medio de un estrechamiento. La medida de la profundidad crítica no es necesaria. La profundidad y_1 se mide a una distancia corta aguas arriba del estrechamiento. La solera construida tendrá aproximadamente $3y_c$ de largo y una altura igual a la de velocidad crítica.

Para un canal rectangular de anchura constante, la ecuación de Bernoulli se aplica entre las secciones 1 y 2. en donde la pérdida de carga en flujo acelerado se toma como un décimo de la diferencia de alturas de velocidad, es decir,

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{1}{10}\left(\frac{V_c^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) = \left(y_c + \frac{V_c^2}{2g} + z\right)$$

en donde se desprecia la ligera pendiente en el lecho del canal entre 1 y 2. Admitiendo que $E_c = y_c + V_c^2/2g$ y agrupando términos, obtenemos

$$(y_1 + 1{,}10V_1^2/2g) = [z + 1{,}0E_c + \tfrac{1}{10}(\tfrac{1}{3}E_c)]$$
$$(y_1 - z + 1{,}10V_1^2/2g) = 1{,}033E_c = 1{,}033(\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{q^2/g})$$

o $$q = 1{,}62(y_1 - z + 1{,}10V_1^2/2g)^{3/2} \qquad (A)$$

Como $q = V_1 y_1$, $$q = 1{,}62(y_1 - z + 0{,}0561q^2/y_1^2)^{3/2} \qquad (B)$$

Para ilustrar la aplicación de la expresión (B), consideremos un canal rectangular de 3 m de ancho con un medidor de profundidad crítica que tiene como dimensión $z = 0{,}330$ m. Si la profundidad medida y_1 es 0,726 m, ¿cuál es el caudal Q?

En una primera aproximación se desprecia el último término de (B). Entonces,

$$q = 1{,}62(0{,}726 - 0{,}330)^{3/2} = 0{,}404 \text{ m}^3/\text{seg/m de ancho}$$

Ahora, aplicando por completo la ecuación (B), por aproximaciones sucesivas hallamos $q = 0{,}435$. Por consiguiente,

$$Q = q(3) = 0{,}435(3) = 1{,}305 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problemas propuestos

54. Designando por y_N la profundidad en la figura del Problema 1, deducir una expresión para el flujo laminar a lo largo de una placa plana de anchura infinita, considerando el volumen libre en el Problema 1 con anchura unidad. *Sol.* $y_N^2 = 3\nu V/gS$

55. El factor de fricción de Darcy f se asocia generalmente a tuberías. Sin embargo, para el problema precedente, evaluar el factor de Darcy f, empleando la solución dada para dicho problema. *Sol.* $96/R_E$

56. Demostrar que la velocidad media V puede expresarse de la forma $0{,}32 v_* R^{1/6}/n$.

57. Demostrar que los factores n de Manning y f de Darcy se relacionan entre sí por la expresión $n = 0{,}113 f^{1/2} R^{1/6}$.

58. Calcular la velocidad media en el canal rectangular del Problema 7 sumando el área bajo la curva profundidad-velocidad. *Sol.* 2,087 m/seg

59. ¿Con qué pendiente se trazaría el canal representado en la Fig. 10-14 para transportar 14,80 m³/seg? ($C = 55$.) *Sol.* 0,00407

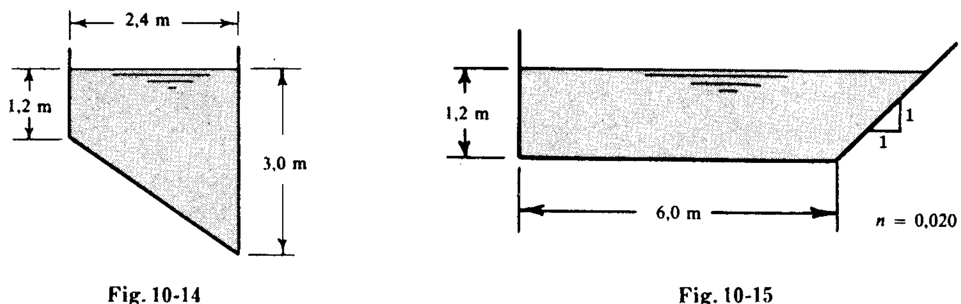


Fig. 10-14 Fig. 10-15

60. El canal representado en la Fig. 10-15 se traza con una pendiente de 0,00016. Cuando llega a un desnivel, el flujo se transporta mediante dos tuberías de hormigón ($n = 0{,}012$) trazadas con una pendiente de 2,5 m sobre 1000 m. ¿Qué dimensión deberán tener las tuberías? *Sol.* 1,245 m

61. Por un canal semicuadrado circula un caudal de 2,20 m³/seg. El canal tiene 1200 m de largo y un desnivel de 0,6 m en esa longitud. Aplicando la fórmula de Manning y $n = 0{,}012$, determinar las dimensiones. *Sol.* 1,952 m × 0,976 m

62. Circula agua a una profundidad de 1,90 m en un canal rectangular de 2,45 m de ancho. La velocidad media es de 0,58 m/seg. ¿Con qué pendiente probable estará trazado el canal si $C = 55$? *Sol.* 0,000149

63. Un canal labrado en roca ($n = 0{,}030$) es de sección trapezoidal con una anchura de solera de 6 m y una pendiente de los lados de 1 sobre 1. La velocidad media permitida es de 0,75 m/seg. ¿Qué pendiente del canal producirá 5,40 m³/seg? *Sol.* 0,00067

64. ¿Cuál es el caudal de agua en una tubería de alcantarillado vitrificado nueva de 60 cm de diámetro, estando la tubería semillena y teniendo una pendiente de 0,0025? *Sol.* 0,153 m³/seg

65. Un canal ($n = 0{,}017$) tiene una pendiente de 0,00040 y una longitud de 3000 m. Suponiendo que el radio hidráulico es 1,44 m, ¿qué corrección debe realizarse en la pendiente para producir el mismo caudal si el factor de rugosidad cambia a 0,020? *Sol.* Nueva $S = 0{,}000554$

66. ¿Qué profundidad tendrá el flujo de agua en una acequia en V con ángulo de 90° ($n = 0{,}013$), trazada con una pendiente de 0,00040 si transporta 2,43 m³/seg? *Sol.* 1,54 m

67. Para construir una acequia de sección triangular se emplea madera aserrada. ¿Cuál deberá ser el ángulo en el vértice para poder transportar el máximo caudal con una pendiente dada? *Sol.* 90°

68. Por un canal rectangular de 6 m de ancho, $n = 0{,}013$ y $S = 0{,}0144$, circula agua con una profundidad de 0,9 m. ¿Qué profundidad tendría para poder transportar el mismo caudal con una pendiente de 0,00144? *Sol.* 1,98 m

69. Una acequia desagua 1,20 m³/seg con una pendiente de 0,50 m sobre 1000 m. La sección es rectangular y el factor de rugosidad $n = 0{,}012$. Determinar las dimensiones óptimas, o sea, las dimensiones que dan el menor perímetro mojado. *Sol.* 0,778 m × 1,556 m

70. Un canal rectangular revestido, de 5 m de anchura, transporta un caudal de 11,50 m^3/seg con una profundida de 0,85 m. Hallar n si la pendiente del canal es de 1,0 m sobre 500 m. (Aplicar la fórmula de Manning *Sol.* 0,0122

71. Hallar la tensión cortante media sobre el perímetro mojado, en el Problema 70. *Sol.* 1,269 kg/m^2

72. Aplicando la fórmula de Manning, demostrar que la profundidad teórica para una velocidad máxima en un con ducto circular es 0,81 veces el diámetro.

73. Diseñar el canal trapezoidal óptimo para transportar 17 m^3/seg a una velocidad máxima de 1,00 m/seg. Emplea n = 0,025 y como pendiente de las paredes 1 vertical sobre 2 horizontal. *Sol.* y = 2,622 m, b = 1,238 n

74. Calcular la pendiente del canal del problema anterior. *Sol.* 0,000436

75. ¿Cuál de los dos canales representados en la Fig. 10-16 conducirá el mayor caudal si ambos están trazados co la misma pendiente? *Sol.* (*b*) Sección trapezoidal

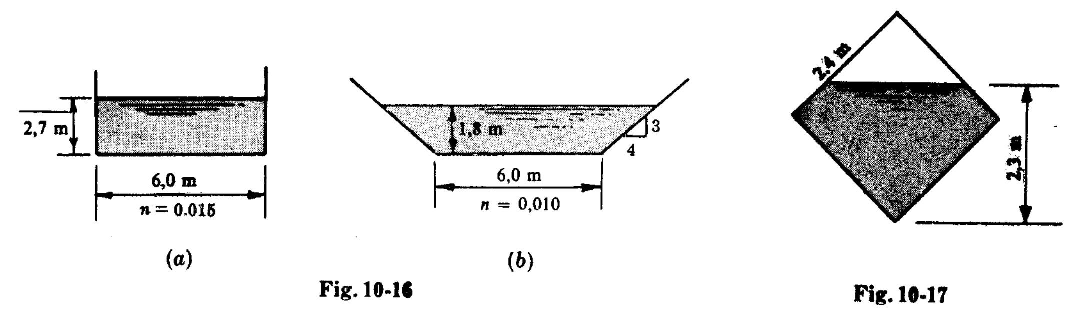


Fig. 10-16 **Fig. 10-17**

76. Una alcantarilla de sección cuadrada tiene 2,4 m de lado y se instala según se indica en la Fig. 10-17. ¿Cuál es el radio hidráulico si la profundidad es 2,3 m? *Sol.* 0,70 m

77. ¿Cuál es el radio de la acequia semicircular B, representada en la Fig. 10-18, si su pendiente S = 0,0200 y C = 50? *Sol.* r = 0,538 m

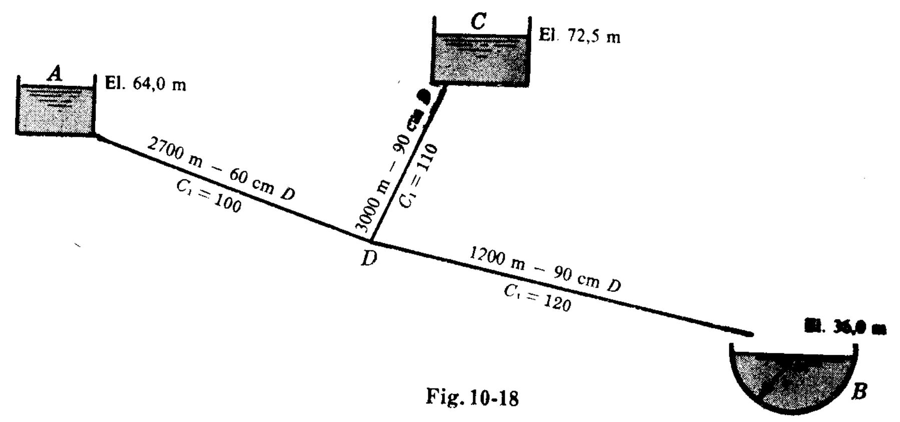


Fig. 10-18

78. Calcular la energía específica cuando circula un caudal de 6 m^3/seg por un canal rectangular de 3 m de ancho con una profundidad de 0,90. *Sol.* 1,152 m

79. Calcular la energía específica cuando circula un caudal de 8,4 m^3/seg por un canal trapezoidal cuya solera tiene 2,4 m de ancho, las pendientes de las paredes 1 sobre 1 y la profundidad 1,17 m. *Sol.* 1,38 m

80. Una tubería de alcantarillado de 1,8 m de diámetro interior transporta un caudal de 2,18 m^3/seg cuando la profundidad es de 1,2 m. ¿Cuál es la energía específica? *Sol.* 1,275 m

81. En el Problema 78, ¿con qué profundidades debe circular el caudal de 6 m^3/seg para que la energía específica sea 1,5 m kg/kg? ¿Cuál es la profundidad crítica? *Sol.* 0,438 m y 1,395 m, 0,742 m

82. En un canal rectangular de 3 m de ancho el caudal es de 7,16 m^3/seg. Con profundidades de 0,6 m, 0,9 m y 1,2 m, determinar si el flujo es subcrítico o supercrítico. *Sol.* Supercrítico, subcrítico, subcrítico

83. En un canal rectangular de 3 m de ancho el caudal es de 7,16 m^3/seg cuando la velocidad es de 2,4 m/seg. Determinar la naturaleza del flujo. *Sol.* Subcrítico

84. Para una profundidad crítica de 0,966 m en un canal rectangular de 3 m de ancho, calcular el caudal.
Sol. 8,92 m^3/seg

85. Determinar la pendiente crítica de un canal rectangular de 6 m de ancho y $n = 0{,}012$, cuando el caudal es de 26,5 m^3/seg. *Sol.* 0,00208

86. Un canal trapezoidal, cuyas paredes tienen una pendiente de 1 sobre 1, transporta un caudal de 20 m^3/seg. Para una anchura de solera de 4,8 m, calcular la velocidad crítica. *Sol.* 3,03 m/seg

87. Un canal rectangular de 1800 m de longitud, 18 m de ancho y 3 m de profundidad transporta 54 m^3/seg de agua ($C = 40$). La limpieza del canal hace que aumente C a 55. Si la profundidad en el extremo superior permanece en 3 m, hallar la profundidad en el extremo inferior para el mismo caudal (aplicando un solo tramo).
Sol. $y_2 = 3{,}274$ m

88. Un canal rectangular ($n = 0{,}016$) trazado con una pendiente de 0,0064 transporta 16 m^3/seg de agua. En condiciones de flujo crítico, ¿qué anchura deberá tener el canal? *Sol.* 2,54 m

89. Un canal rectangular ($n = 0{,}012$) de 3 m de ancho y trazado con una pendiente de 0,0049, transporta 4,5 m^3/seg de agua. Para producir un flujo crítico, el canal se contrae. ¿Qué anchura deberá tener la sección contraída para cumplir esta condición si se desprecian las pérdidas producidas en la gradual reducción de anchura?
Sol. 1,335 m

90. En un canal rectangular de 3,6 m de ancho, $C = 55$, $S = 0{,}0225$, el caudal es de 13,5 m^3/seg. La pendiente del canal cambia a 0,00250. ¿A qué distancia del punto de cambio de pendiente se tendrá la profundidad de 0,825 m? (Empléese un tramo.) *Sol.* 31,50 m

91. Usando los datos del Problema 90, (*a*) calcular la profundidad crítica en el canal más plano, (*b*) calcular la profundidad requerida para tener flujo uniforme en el canal más plano, (*c*) calcular la profundidad justamente antes del resalto hidráulico, aplicando la ecuación del Problema 46. (Se observa que esta profundidad ocurre a 31,50 m del cambio de pendiente, según el Problema 90.) *Sol.* 1,125 m, 1,512 m, 0,825 m

92. Un vertedero de pared gruesa tiene una altura de 0,40 m sobre la solera de un canal rectangular de 3 m de ancho. La altura de carga medida por encima de la cresta del vertedero es de 0,60 m. Determinar el caudal aproximado en el canal. (Emplear $c = 0{,}92$.) *Sol.* 2,35 m^3/seg

93. Demostrar que la profundidad crítica en un canal rectangular es $2V_c^2/g$.

94. Demostrar que la profundidad crítica en un canal triangular puede expresarse como 4/5 de la energía específica mínima.

95. Demostrar que la profundidad crítica en un canal parabólico es 3/4 de la energía específica mínima si las dimensiones del canal son y_c de profundidad y b' de anchura de la superficie de agua.

96. Para un canal rectangular, demostrar que el caudal q por metro de anchura es igual a $1{,}704E_{min}^{3/2}$.

97. Para un canal triangular, demostrar que el caudal $Q = 0{,}6335(b'/y_c)E_{min}^{5/2}$.

98. Para un canal parabólico, demostrar que el caudal $Q = 1{,}1068b'E_{min}^{3/2}$.

S I

Capítulo 11

Fuerzas desarrolladas por los fluidos en movimiento

INTRODUCCION

El conocimiento de las fuerzas ejercidas por los fluidos en movimiento son de gran importancia en el análisis y diseño de dispositivos tales como bombas, turbinas, aviones, cohetes, hélices, barcos, cuerpos en movimiento, edificios y multitud de dispositivos hidráulicos. Las ecuaciones fundamentales de la energía no son suficientes para resolver la mayoría de estos problemas. Es más decisivo el empleo de otro principio de la mecánica, el de la cantidad de movimiento. La teoría de la capa límite proporciona una nueva base para un análisis más minucioso. La experimentación, cada vez más continua y extensa, proporciona sin cesar nuevos datos para conocer las leyes de variación de los coeficientes fundamentales.

EL PRINCIPIO DEL IMPULSO-CANTIDAD DE MOVIMIENTO de la dinámica establece que

Impulso = variación de la cantidad de movimiento

o $$(\Sigma F)t = M(\Delta V)$$

Las magnitudes físicas que intervienen en la ecuación son magnitudes vectoriales y han de tratarse de acuerdo con el álgebra vectorial. Por lo general, es más conveniente utilizar componentes, y para evitar posibles errores en los signos se sugiere utilizar las siguientes formas:

(*a*) En la dirección X,

cantidad de movimiento inicial $\pm$ impulso = cantidad de movimiento final

$$MV_{x_1} \pm \Sigma F_x \cdot t = MV_{x_2} \qquad (1)$$

(*b*) En la dirección Y,

$$MV_{y_1} \pm \Sigma F_y \cdot t = MV_{y_2} \qquad (2)$$

donde M = masa cuya cantidad de movimiento varía en el tiempo t.

Estas expresiones pueden escribirse, utilizando los subíndices apropiados x, y o z, en la siguiente forma:

$$\Sigma F_x = \rho Q(V_2 - V_1)_x, \quad \text{etc.} \qquad (3)$$

EL COEFICIENTE DE CORRECCION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO β, que se calculará en el Problema 1, es

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A (v/V)^2\, dA \qquad (4)$$

Para flujo laminar en tuberías, $\beta = 1,33$. Para flujo turbulento en tuberías, β varía de 1,01 a 1,07. En la mayoría de los casos puede considerarse igual a la unidad.

RESISTENCIA

La resistencia o arrastre es la componente de la fuerza resultante, ejercida por el fluido sobre el cuerpo en dirección *paralela* al movimiento relativo del fluido. Usualmente se da en la forma

$$\text{Resistencia en kg} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} \qquad (5)$$

SUSTENTACION

La sustentación es la componente de la fuerza resultante, ejercida por el fluido sobre el cuerpo en dirección *perpendicular* al movimiento relativo del fluido. Usualmente se da en la forma

$$\text{Sustentación en kg} = C_L \rho A \frac{V^2}{2} \qquad (6)$$

donde C_D = coeficiente de resistencia, adimensional
C_L = coeficiente de sustentación, adimensional
ρ = densidad del fluido, en UTM/m^3
A = un área característica, en m^2, que normalmente es la proyección del cuerpo sobre un plano perpendicular al movimiento relativo del fluido
V = velocidad relativa del fluido respecto del cuerpo, en m/seg.

RESISTENCIA TOTAL

La resistencia total está originada por la resistencia superficial y la resistencia de forma, debida a la presión. No obstante, muy raramente se presentan ambos efectos simultáneamente con el mismo orden de magnitud. En el caso de objetos, que no sufren una sustentación apreciable, la resistencia del perfil o superficial es sinónima de resistencia total.

Objeto	*Resistencia superficial*		*Resistencia de forma*		*Resistencia total*
1. Esferas.	despreciable	+	resistencia de forma	=	resistencia total
2. Cilindros (eje perpendicular a la velocidad).	despreciable	+	resistencia de forma	=	resistencia total
3. Discos y placas delgadas (perpendicular a la velocidad).	cero	+	resistencia de forma	=	resistencia total
4. Placas delgadas (paralelas a la velocidad).	resistencia superficial	+	despreciable o nula	=	resistencia total
5. Objetos fluidodinámicos.	resistencia superficial	+	pequeña o despreciable	=	resistencia total

COEFICIENTES DE RESISTENCIA

Los coeficientes de resistencia dependen del número de Reynolds para las velocidades bajas e intermedias, y se hacen independientes de dicho número para velocidades elevadas. Para velocidades muy altas el coeficiente de resistencia depende del número de Mach, cuya influencia es despreciable a velocidades bajas. Los Diagramas *F*, *G* y *H* dan las variaciones de los coeficientes de resistencia para algunas formas geométricas. En los Problemas 24 y 40 se estudian estas relaciones.

Para placas planas y perfiles de ala, los coeficientes de resistencia se tabulan, usualmente, para el área de la placa y para el producto de la cuerda por la longitud, respectivamente.

COEFICIENTES DE SUSTENTACION

Kutta ha determinado teóricamente los valores máximos de los coeficientes de sustentación para placas planas delgadas, en posición no perpendicular a la velocidad relativa del fluido, por

$$C_L = 2\pi \text{ sen } \alpha \tag{7}$$

donde α = ángulo de ataque o ángulo que forma la placa con la velocidad relativa del fluido. Para los ángulos normales de funcionamiento, las secciones de los perfiles de ala actuales dan valores del 90 % aproximadamente del valor máximo teórico. El ángulo α no deberá exceder de 25° aproximadamente.

NUMERO DE MACH

El número de Mach es una relación adimensional, que viene dada por el cociente de la velocidad del fluido por la velocidad del sonido (llamada más frecuentemente celeridad).

$$\text{Número de Mach} = N_M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}} \tag{8}$$

Para gases, $c = \sqrt{kgRT}$ (véase Capítulo 1).

Para valores de V/c hasta el valor crítico de 1,0 el flujo es subsónico; para el valor 1,0 el flujo es sónico y para valores mayores que 1,0 el flujo es supersónico (véase Diagrama H).

TEORIA DE LA CAPA LIMITE

La teoría de la capa límite fue introducida por Prandtl. Esta teoría establece que, para un fluido en movimiento, todas las pérdidas por fricción tienen lugar en una delgada capa adyacente al contorno del sólido (llamada capa límite), y que el flujo exterior a dicha capa puede considerarse como carente de viscosidad. La distribución de velocidades en la zona próxima al contorno es influenciada por la tensión cortante en el contorno. En general, la capa límite es muy delgada en la parte de aguas arriba del contorno y va aumentando su espesor hacia aguas abajo por la acción continuada de las tensiones cortantes.

Para números de Reynolds bajos, toda la capa límite es gobernada por la acción de las fuerzas viscosas y en su interior el flujo es laminar. Para valores intermedios del número de Reynolds la capa límite es laminar cerca de la superficie del contorno y turbulenta en las zonas algo más alejadas. Para valores del número de Reynolds muy elevados la capa límite es totalmente turbulenta.

PLACAS PLANAS

En el caso de una placa plana de L m de longitud, mantenida paralela al movimiento relativo del fluido, se aplican las siguientes ecuaciones.

1. **Capa límite laminar** (hasta números de Reynolds alrededor de 500.000).

(*a*) Coeficiente de resistencia medio $(C_D) = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{R_E}} = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{VL/\nu}}$ (*9*)

(*b*) Espesor de la capa límite δ (en m) a una distancia genérica x viene dada por

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5{,}20}{\sqrt{R_{E_x}}} = \frac{5{,}20}{\sqrt{Vx/\nu}} \tag{10}$$

(*c*) Tensión cortante τ_0 en kg/m²; se calcula por

$$\tau_0 = 0{,}33\,\rho V^{3/2}\sqrt{\nu/x} = 0{,}33(\mu V/x)\sqrt{R_{E_x}} = \frac{0{,}33\,\rho V^2}{\sqrt{R_{E_x}}} \tag{11}$$

donde V = velocidad de aproximación del fluido al contorno (velocidad no perturbada)
x = distancia al borde de ataque en m
L = longitud total de la placa en m
R_{E_x} = número de Reynolds local para la distancia x.

Como ponen de manifiesto las fórmulas dadas, el espesor de la capa límite es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud x y a la raíz cuadrada de la viscosidad cinemática e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad. Análogamente, la tensión cortante en la superficie del contorno τ_0 es directamente proporcional a la raíz cuadrada del producto de ρ y μ y a la potencia tres medios de V e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de x.

2. Capa límite turbulenta (contorno liso).

(*a*) Coeficiente de resistencia medio $(C_D) = \dfrac{0{,}074}{R_E^{0,20}}$ para $2 \times 10^5 < R_E < 10^7$ *(12)*

$$= \frac{0{,}455}{(\lg_{10} R_E)^{2,58}} \text{ para } 10^6 < R_E < 10^9 \qquad (13)$$

Para contornos rugosos, el coeficiente de resistencia varía con la rugosidad relativa ϵ/L y no con el número de Reynolds.

K. E. Schoenherr ha sugerido el empleo de la fórmula $1/\sqrt{C_D} = 4{,}13 \lg (C_D R_{E_x})$, ecuación considerada de mayor precisión que las *(12)* y *(13)*, particularmente para números de Reynolds por encima de 2×10^7.

(*b*) El espesor δ de la capa límite se calcula mediante

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}38}{R_{E_x}^{0,20}} \qquad \text{para } 5 \times 10^4 < R_E < 10^6 \qquad (14)$$

$$= \frac{0{,}22}{R_{E_x}^{0,167}} \qquad \text{para } 10^6 < R_E < 5 \times 10^8 \qquad (15)$$

(*c*) La tensión cortante en la pared se estima por

$$\tau_0 = \frac{0{,}023\rho V^2}{((\delta V/\nu)^{1/4}} = 0{,}0587\frac{V^2}{2}\rho\left(\frac{\nu}{xV}\right)^{1/5} \qquad (16)$$

3. Capa límite en la transición de laminar a turbulenta sobre la placa (R_E de 500.000 a 20.000.000, aproximadamente).

(*a*) Coeficiente de resistencia medio $(C_D) = \dfrac{0{,}455}{(\lg_{10} R_E)^{2,58}} - \dfrac{1700}{R_E}$ *(17)*

El Diagrama *G* ilustra la variación de C_D con el número de Reynolds para estos tres regímenes del flujo.

GOLPE DE ARIETE

El golpe de ariete es un término que se utiliza para describir el choque producido por una súbita disminución en la velocidad del fluido. En una tubería, al cerrar una válvula, el tiempo que tarda la onda de presión en viajar aguas arriba hasta la embocadura de la tubería y volver aguas abajo hasta la válvula viene dado por

$$\text{Tiempo en seg} = 2 \times \frac{\text{longitud de la tubería en m}}{\text{celeridad de la onda de presión en m/seg}}$$

o

$$T = \frac{2L}{c} \qquad (18)$$

El aumento de presión producido por el cierre rápido de una válvula se calcula por

Variación de presión en kg/m² = densidad × celeridad × variación de velocidad

o

$$dp = \rho\, c\, dV \qquad \text{o bien} \qquad dh = c\, dV/g \qquad (19)$$

donde dh es la variación de la altura de presión.

Para tuberías rígidas, la celeridad de la onda de presión es

$$c = \sqrt{\frac{\text{módulo de elasticidad volumétrico en kg/m}^2}{\text{densidad de fluido}}} = \sqrt{\frac{E_B}{\rho}} \qquad (20)$$

Para tuberías deformables, la expresión toma la forma

$$c = \sqrt{\frac{E_B}{\rho[1 + (E_B/E)(d/t)]}} \qquad (21)$$

donde E = módulo de elasticidad de la pared de la tubería, kg/m²
d = diámetro de la tubería en cm
t = espesor de la pared de la tubería en cm.

VELOCIDADES SUPERSONICAS

A velocidades supersónicas cambia totalmente la naturaleza del flujo. El coeficiente de resistencia está relacionado con el número de Mach N_M (véase Diagrama H), ya que la viscosidad tiene una influencia muy pequeña sobre la resistencia. La perturbación producida en la presión forma un cono, cuyo vértice está en la parte delantera del cuerpo u ojiva en el caso de un proyectil. El cono representa el frente de onda u *onda de choque*, y puede ser fotografiado. El ángulo del cono o *ángulo de Mach* α viene dado por

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{celeridad}}{\text{velocidad}} = \frac{1}{V/c} = \frac{1}{N_M} \qquad (22)$$

S I

Problemas resueltos

1. Determinar el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento, que ha de aplicarse cuando se emplea la velocidad media V en el principio de la cantidad de movimiento, en el caso de flujo bidimensional.

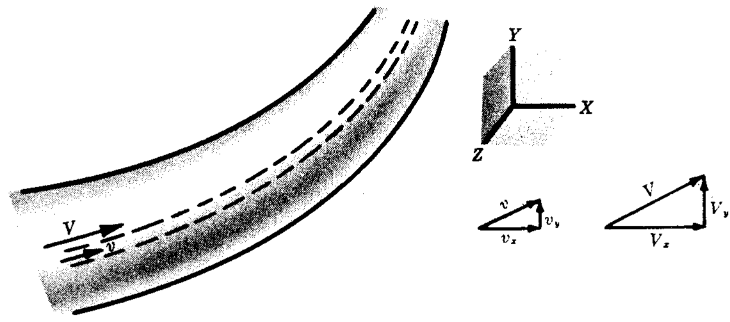


Fig. 11-1

Solución:

El caudal en masa dM que circula a través del tubo de corriente mostrado en la Fig. 11-1 es igual a $\rho\, dQ$. La cantidad de movimiento correcta en la dirección X es

$$(\text{Cont. mov.})_x = \int dM\, v_x = \int \rho\, dQ\, v_x = \int \rho v_x (v\, dA)$$

Utilizando la velocidad media, en la sección recta, la cantidad de movimiento correcta sería

$$(\text{Cant. mov.})_x = \beta(MV_x) = \beta(\rho Q V_x) = \beta\rho(AV)V_x$$

Igualando los dos valores anteriores

$$\beta \;=\; \frac{\int \rho v\,(v\,dA)}{\rho A V (V_x)} \;=\; \frac{1}{A}\int_A (v/V)^2\,dA$$

ya que del diagrama vectorial de las velocidades de la figura se deduce $v_x/V_x = v/V$.

2. Calcular el coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento cuando el perfil de velocidades satisface la ecuación $v = v_{max}[(r_0^2 - r^2)/r_0^2]$. (Véase Capítulo 6, Problema 17, para el croquis).

Solución:

Del Problema 17 del Capítulo 6, la velocidad media es igual a $\frac{1}{2}v_{max}$. Utilizando este valor de la velocidad media para V, se obtiene

$$\beta \;=\; \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA \;=\; \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\left[\frac{v_{max}(r_0^2 - r^2)/r_0^2}{\frac{1}{2}v_{max}}\right]^2 (2\pi r\,dr)$$

$$= \frac{8}{r_0^6}\left(\tfrac{1}{2}r_0^6 - \tfrac{1}{2}r_0^6 + \tfrac{1}{6}r_0^6\right) \;=\; \tfrac{4}{3} \;=\; 1{,}33$$

3. Un chorro de agua de 10 cm de diámetro que se mueve hacia la derecha incide sobre una placa plana situada normalmente al eje del chorro. (*a*) Para una velocidad de 20,0 m/seg, ¿qué fuerza se requerirá para mantener la placa en equilibrio? (*b*) Comparar la presión dinámica media sobre la placa con la presión máxima (presión de estancamiento) si la placa tiene un área 20 veces mayor que la del chorro.

Solución:

Se toma el eje X en la dirección del eje del chorro. Así, la placa anula toda la cantidad de movimiento inicial en la dirección X. Llamando M a la masa de agua que reduce su cantidad de movimiento a cero en dt segundos y F_x la fuerza ejercida por la placa sobre el agua hacia la izquierda, se tiene:

(*a*) Cantidad de movimiento inicial − impulso = cantidad de movimiento final

$$M(20{,}0) - F_x\,dt = M(0)$$

$$\frac{wQ}{g}\,dt\,(20{,}0) - F_x\,dt = 0$$

y $$F_x = \frac{1000[\overset{A}{(\pi/4)(0{,}10)^2}]\overset{V}{(20{,}0)} \times \overset{V}{20{,}0}}{9{,}8} = 320 \text{ kg (hacia la izquierda para mantener el equilibrio).}$$

No existe componente según la dirección Y de la fuerza en este problema, ya que las dos componentes, según esta dirección, en la placa se compensan una con otra. Se observa que también se va dt, por lo que hubiera podido escogerse igual a 1 segundo.

Es fácil ver que esta expresión del impulso-cantidad de movimiento puede ordenarse en la forma

$$F = MV = \frac{wQ}{g}V = \frac{w}{g}(AV)V = \rho A V^2 \quad \text{(kg)} \qquad (1)$$

(*b*) Para obtener la presión media se divide la fuerza dinámica total por el área sobre la que actúa.

$$\text{Presión media} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{\rho A V^2}{20A} = \frac{\rho V^2}{20} = \frac{w}{10}\left(\frac{V^2}{2g}\right) \quad (\text{kg/m}^2)$$

De los Problemas 1 y 5 del Capítulo 9, la presión de estancamiento $= p_s = w(V^2/2g)$ (kg/m²). Por tanto, la presión media es 1/10 de la presión de estancamiento, en este caso.

4. Una placa curvada desvía un ángulo de 45° un chorro de agua de 10 cm de diámetro. Para una velocidad del chorro de 40 m/seg, dirigida hacia la derecha, calcular el valor de las componentes de la fuerza desarrollada contra la placa curvada (se supone que no existe rozamiento).

Solución:

Las componentes se elegirán en la dirección inicial del chorro y en la dirección perpendicular a la anterior. El agua cambia su cantidad de movimiento por la acción ejercida por la fuerza que produce la placa sobre el chorro.

(*a*) Para la dirección X, tomando el signo + hacia la derecha y suponiendo F_x positiva,

Cantidad de movimiento inicial + impulso = cantidad de movimiento final.

$$MV_{x_1} + F_x\,dt = MV_{x_2}$$

$$\frac{wQ\,dt}{g}V_{x_1} + F_x\,dt = \frac{wQ\,dt}{g}V_{x_2}$$

Ordenando, y al observar que $V_{x_2} = +V_{x_1}\cos 45^\circ$, se obtiene

$$F_x = \frac{1000[(\pi/4)(0,10)^2](40)}{9,8}(40 \times 0,707 - 40) = -375 \text{ kg}$$

donde el signo menos indica que F_x se dirige hacia la izquierda (se supuso dirigida hacia la derecha). Si F_x se hubiera supuesto dirigida hacia la izquierda se hubiera obtenido la solución +375, indicando el signo que la hipótesis había sido la correcta.

La acción del agua sobre la placa es igual y opuesta a la ejercida por la placa sobre el agua. De aquí, componente X sobre la placa = 375 kg y dirigida hacia la derecha.

(*b*) Para la dirección Y, tomando *hacia arriba* el sentido positivo,

$$MV_{y_1} + F_y\,dt = MV_{y_2}$$

$$O + F_y\,dt = \frac{1000(0,0079)(40)dt}{9,8}(0,707 \times 40)$$

y $F_y = +906$ kg dirigida hacia arriba y actuando sobre el agua. Por tanto, la componente Y sobre la placa = 906 kg y dirigida hacia abajo.

5. La fuerza ejercida por un chorro de agua de 2 cm de diámetro sobre una placa plana, mantenida normalmente al eje del chorro, es de 70 kg. ¿Cuál es el caudal en l/seg?

Solución:

De la ecuación (*1*) del Problema 3,

$$F_x = \frac{1000QV}{9,8} = \rho AV^2$$

$$70 = \frac{1000[(\pi/4)(0,02)^2]V^2}{9,8} \quad \text{y} \quad V = 46,8 \text{ m/seg.}$$

De aquí, $Q = AV = [(\pi/4)(0,02)^2](46,8)10^3 = 14,7$ l/seg.

6. Si la placa del Problema 3 se estuviera moviendo hacia la derecha a una velocidad de 10,0 m/seg, ¿qué fuerza ejercería el chorro sobre la placa?

Solución:

Utilizando $t = 1$ segundo, MV_{x_1} inicial + $F_x(1) = MV_{x_2}$ final.

En este caso, la masa de agua que, por unidad de tiempo, está cambiando su cantidad de movimiento no es igual a la que lo hace en el caso de placa en reposo. En el caso de placa en reposo, en un segundo, una masa de agua de

$$(w/g)(\text{volumen}) = (w/g)(A \times 20,0)$$

cambia su cantidad de movimiento. Para la placa moviéndose, en un segundo la masa que incide contra la placa es

$$M = (w/g)[A(20,0 - 10,0)]$$

donde (20,0 − 10,0) es la velocidad relativa del agua respecto de la placa.

De aquí,
$$F_x = \frac{1000[(\pi/4)(0,10)^2](20,0 - 10,0)}{9,8}(10,0 - 20,0)$$

y F_x = fuerza de la placa sobre el agua = −80 kg dirigida hacia la izquierda. Por tanto, la fuerza del agua sobre la placa será de 80 kg dirigida hacia la derecha.

Si la placa se hubiera movido hacia la izquierda a una velocidad de 10,0 m/seg. la masa de agua, que en un segundo cambia su cantidad de movimiento, sería mayor. El valor de V_{x_2} es ahora igual a $-10,0$ m/seg. El módulo de la fuerza sería

$$F_x = \frac{1000(0,0079)[20,0-(-10,0)]}{9,8}(-10,0-20,0) = -725 \text{ kg dirigida hacia la izquierda y que actúa sobre el agua.}$$

7. El álabe fijo mostrado en la Fig. 11-2 divide el chorro de forma que salen en cada una de las direcciones 30 l/seg. Para una velocidad inicial de 15,0 m/seg, determinar los valores de las componentes en las direcciones X e Y de la fuerza necesaria para mantener el álabe en equilibrio (suponer que no existe fricción).

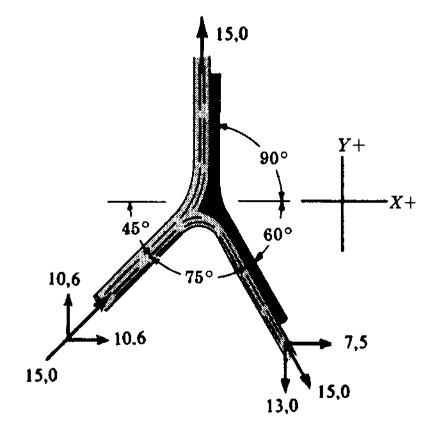


Fig. 11-2

Solución:

(*a*) En la dirección X, tomando $t = 1$ segundo,

$$MV_{x_1} - F_x(1) = \tfrac{1}{2}MV_{x_2} + \tfrac{1}{2}MV_{x_2}$$

$$\frac{1000(30\times10^{-3})}{9,8}(10,6) - F_x = \frac{1000}{9,8}\left(\frac{30\times10^{-3}}{2}\right)(0+7,5)$$

y $F_x = +32,4 - 11,5 = +20,9$ kg dirigida hacia la izquierda.

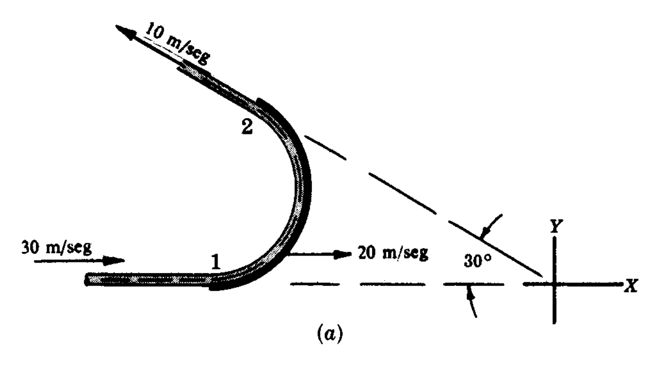
(*b*) En la dirección Y,

$$MV_{y_1} - F_y(1) = \tfrac{1}{2}MV_{y_2} - \tfrac{1}{2}MV'_{y_2}$$

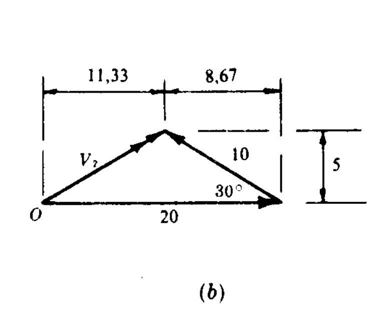
$$\frac{1000(30\times10^{-3})}{9,8}(10,6) - F_y = \frac{1000}{9,8}\left(\frac{30\times10^{-3}}{2}\right)(+15,0-13,0)$$

y $F_y = +32,4 - 3,1 = 29,3$ kg dirigida hacia abajo.

8. Un chorro de 10 cm de diámetro y a una velocidad de 30 m/seg, incide sobre un álabe móvil, que lleva una velocidad de 20 m/seg en la misma dirección del chorro. La dirección de salida del álabe forma un ángulo de 150° con la de entrada. Suponiendo que no existe rozamiento, calcular las componentes en las direcciones X e Y de la fuerza que ejerce el agua sobre el álabe. [Véase Fig. 11-3(*a*).]



(*a*)



(*b*)

Fig. 11-3

Solución:

La velocidad relativa $V_{x_1} = 30 - 20 = 10$ m/seg hacia la derecha.

La velocidad del agua en 2 = $V_{\text{agua/álabe}} \leftrightarrow V'_{\text{álabe}}$ [véase Fig. 11-3(*b*)] de la cual $V_{2_x} = 11,33$ m/seg hacia la derecha y $V_{2_y} = 5,00$ m/seg hacia arriba.

Se aplica ahora el principio del impulso-cantidad de movimiento en la dirección X.

(*a*) $$(\text{Inicial})MV_x - F_x(1) = (\text{final})MV_x$$

$$M(30) - F_x = M(+11{,}33)$$

y $F_x = \frac{1000}{9{,}8}[\frac{\pi}{4}(0{,}10)^2 \times 10](30 - 11{,}33) = 149{,}5$ kg hacia la izquierda y actuando sobre el agua.

(*b*) $$(\text{Inicial})MV_y - F_y(1) = (\text{final})MV_y$$

$$M(0) - F_y = M(+5)$$

y $F_y = \frac{1000}{9{,}8}[\frac{\pi}{4}(0{,}10)^2 \times 10](0 - 5) = -40{,}0$ kg hacia arriba y actuando sobre el agua.

Las componentes de la fuerza ejercida por el agua sobre el álabe son 149,5 kg hacia la derecha y 40,0 kg hacia abajo.

9. Si en el Problema 8 el rozamiento reduce la velocidad del agua respecto del álabe de 10,0 m/seg a 9,0 m/seg, (*a*) ¿cuáles serán las componentes de la fuerza ejercida por el álabe sobre el agua? y (*b*) ¿cuál será la velocidad final absoluta del agua?

Solución:

Las componentes de la velocidad absoluta en (*2*) se determinarán resolviendo un triángulo análogo al de la Fig. 11-3(*b*) del Problema 8, utilizando un vector horizontal igual a 20,0 y otro igual a 9,0 dirigido hacia la izquierda y hacia arriba formando un ángulo de 30° con el anterior. Así,

$V_{2_x} = 12{,}2$ m/seg hacia la derecha y $V_{2_y} = 4{,}5$ m/seg hacia arriba

(*a*) Por tanto, $F_x = \frac{1000}{9{,}8}[\frac{\pi}{4}(0{,}10)^2 \times 10](30{,}0 - 12{,}2) = 142{,}5$ kg hacia la izquierda y actuando sobre el agua.

$F_y = \frac{1000}{9{,}8}[\frac{\pi}{4}(0{,}10)^2 \times 10](0 - 4{,}5) = -36{,}0$ kg hacia arriba y actuando sobre el agua.

(*b*) A partir de las componentes dadas antes, la velocidad absoluta con que el agua abandona el álabe será

$V_2 = \sqrt{(12{,}2)^2 + (4{,}5)^2} = 13{,}0$ m/seg hacia arriba y hacia la derecha formando un ángulo con la horizontal $\theta_x = \text{arc tg } (4{,}5/12{,}2) = 20{,}2°$.

10. Para una velocidad dada de un chorro, determinar las condiciones que producirán un trabajo (o potencia) máximo sobre una serie de álabes móviles (despreciando el rozamiento a lo largo de los álabes).

Solución:

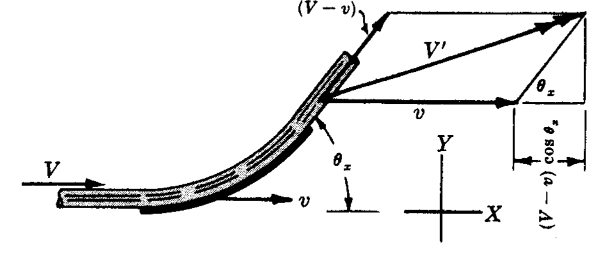


Fig. 11-4

Se considera en primer lugar la velocidad de los álabes que proporciona una potencia máxima. Con referencia a la Fig. 11-4, se va a obtener una expresión que dé la potencia desarrollada en la dirección *X*, suponiendo que los álabes se mueven a lo largo del eje *X*. Como el chorro completo incide sobre uno u otro álabe de los diversos que forman la serie, la masa total que está fluyendo es la que cambia su cantidad de movimiento, es decir, $M = (w/g)AV$.

Potencia = trabajo por segundo = fuerza × distancia recorrida en un segundo en la dirección de la fuerza.

(1) Se determina ahora la fuerza aplicando el principio de la cantidad de movimiento. La velocidad absoluta final en la dirección *X* es

$$V'_x = v + (V - v)\cos\theta_x$$

y cantidad de movimiento inicial − impulso = cantidad de movimiento final

$$MV - F_x(1) = M[v + (V - v)\cos\theta_x]$$
$$F_x = (wAV/g)[(V - v)(1 - \cos\theta_x)]$$

Entonces, $$\text{Potencia } P = (wAV/g)[(V - v)(1 - \cos\theta_x)]v \qquad (1)$$

Como $(V - v)v$ es la variable que debe tomar un valor máximo para la potencia máxima, al igualar su primera derivada a cero se obtiene

$$dP/dv = (wAV/g)(1 - \cos\theta_x)(V - 2v) = 0$$

De donde $v = V/2$, es decir, los álabes deben moverse a una velocidad igual a la mitad de la velocidad del chorro.

(2) Por simple inspección de la fórmula *(1)* anterior se ve que para unos valores dados de V y v, la máxima potencia se obtiene cuando $\theta_x = 180°$. Como, por lo general, este ángulo no puede conseguirse en la práctica, un ángulo alrededor de 170° es el adecuado. La reducción de potencia es pequeña en tanto por ciento.

(3) En la dirección Y, la fuerza no compensada se equilibra utilizando álabes o cazoletas cuspidales, que desvían la mitad del caudal de agua del chorro a cada uno de los lados del eje Y.

11. *(a)* Con referencia a la Fig. 11-5, ¿con qué ángulo debe incidir un chorro de agua, que se mueve a una velocidad de 15,0 m/seg, sobre una serie de álabes, que se mueven a una velocidad de 6,0 m/seg, para que el agua entre tangencialmente en los álabes, es decir, no haya choque? *(b)* ¿Qué potencia se desarrollará si el caudal es de 125 l/seg? *(c)* ¿Cuál es el rendimiento de los álabes?

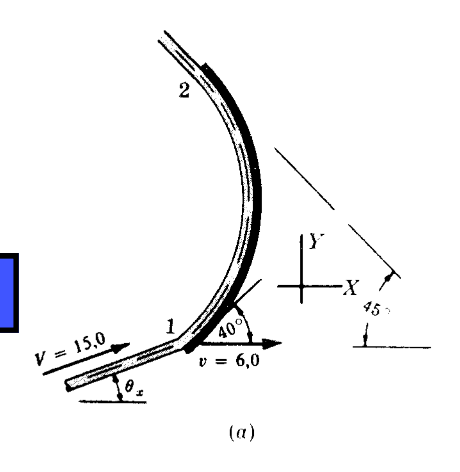


Fig. 11-5

Solución:

(a) Velocidad del agua = velocidad del agua/álabes +→ velocidad de los álabes

o $$15{,}0 \text{ en } \angle\theta_x = ? \text{ en } 40° +\!\!\to 6{,}0\to$$

Del diagrama vectorial, Fig. 11-5*(b)*, $15\cos\theta_x = 6{,}0 + x$, $15\,\text{sen}\,\theta_x = y$ y $\text{tg}\,40° = y/x = 0{,}8391$. Resolviendo estas ecuaciones, $\theta_x = 25°5'$.

(b) De la Fig. 11-5*(b)* puede determinarse la velocidad del agua respecto de los álabes.

$$y = 15\,\text{sen}\,\theta_x = 15\,\text{sen}\,25°5' = 6{,}36 \text{ m/seg} \quad \text{y} \quad V_{ag/al} = y/(\text{sen}\,40°) = 9{,}90 \text{ m/seg}.$$

Además, V_{x_2} (absoluta) = 0,99 m/seg, hacia la izquierda, como se deduce de la Fig. 11-5*(c)*. Por tanto,

$$\text{fuerza } F_x = \overset{M}{\frac{1000 \times 0{,}125}{9{,}8}}[\overset{V_1\cos\theta_x}{15 \times 0{,}906} - (-0{,}99)] = 161 \text{ kg y la potencia } E_x = 161 \times 6 = 966 \text{ kgm/seg.}$$

(c) $$\text{Rendimiento} = \frac{966}{\frac{1}{2}M(15)^2} = \frac{966}{1435} = 67{,}3\,\%.$$

12. Una tubería de 60 cm de diámetro, que transporta 900 l/seg de un aceite (Dr = 0,85), tiene un codo de 90° en un plano horizontal. La pérdida de carga en el codo es de 1,10 m de aceite y la presión a la entrada de 3,00 kg/cm². Determinar la fuerza resultante ejercida por el aceite sobre el codo.

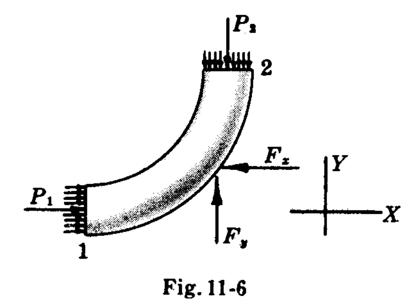


Fig. 11-6

Solución:

Con referencia a la Fig. 11-6, el diagrama del cuerpo libre, que se muestra, pone de manifiesto las fuerzas estáticas y dinámicas que actúan sobre la masa de aceite que ocupa el codo. Dichas fuerzas se calculan como sigue:

(*a*) $P_1 = p_1 A = 3{,}00 \times \frac{1}{4}\pi(60)^2 = 8480$ kg.

(*b*) $P_2 = p_2 A$, donde $p_2 = p_1$ − pérdida en kg/cm², como se deduce a partir de la ecuación de Bernoulli, ya que $z_1 = z_2$ y $V_1 = V_2$. Por tanto, $P_2 = (3{,}00 - 0{,}85 \times 1000 \times 1{,}10/10^4) \times \frac{1}{4}\pi(60)^2 = 8220$ kg.

(*c*) Mediante el principio del impulso-cantidad de movimiento y sabiendo que $V_1 = V_2 = Q/A = 3{,}2$ m/seg,

$$MV_{x_1} + \Sigma\,(\text{fuerzas en la dirección } X) \times 1 = MV_{x_2}$$

$$8480 - F_x = (0{,}85 \times 1000 \times 0{,}9000/9{,}8)(0 - 3{,}2) = -250 \text{ kg}$$

y $F_x = 8730$ kg hacia la izquierda y sobre el aceite

(*d*) Análogamente, para $t = 1$ segundo,

$$MV_{y_1} + \Sigma\,(\text{fuerzas en la dirección } Y) \times 1 = MV_{y_2}$$

$$F_y - 8220 = (0{,}85 \times 1000 \times 0{,}900/9{,}8)(3{,}2 - 0) = +250 \text{ kg}$$

y $F_y = +8270$ kg hacia abajo y sobre el aceite.

Sobre el codo la fuerza resultante R actúa hacia la derecha y hacia abajo, y su valor es igual a

$$R = \sqrt{(8730)^2 + (8270)^2} = 12.025 \text{ kg con } \theta_x = \text{arc tg } (8270/8730) = 43{,}4^\circ$$

13. La tubería de 60 cm del Problema 12 está conectada a una tubería de 30 cm mediante un cono *reductor* normal. Para el mismo caudal de 900 l/seg de aceite, y una presión de 2,80 kg/cm² en la sección 1 (Fig. 11-7), ¿cuál es la fuerza ejercida por el aceite sobre el cono reductor si se desprecian las pérdidas de carga en el mismo?

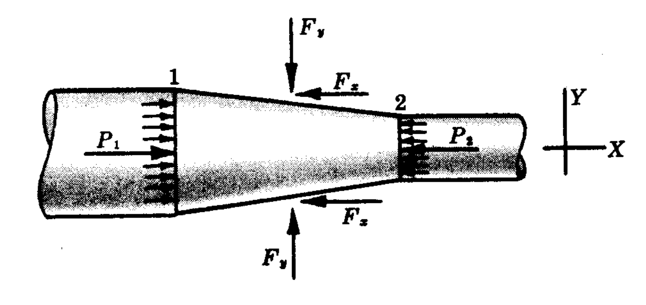


Fig. 11-7

Solución:

Como $V_1 = 3{,}2$ m/seg, $V_2 = (2/1)^2 \times 3{,}2 = 12{,}8$ m/seg. Además, al aplicar la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2, a la entrada y salida del reductor, se obtiene

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{(3{,}2)^2}{2g} + 0\right) - (\text{pérdidas desp.}) = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{(12{,}8)^2}{2g} + 0\right)$$

Despejando, $\dfrac{p^2}{w} = \dfrac{2{,}80 \times 10^4}{0{,}85 \times 1000} + \dfrac{10{,}2}{2g} - \dfrac{163{,}8}{2g} = 25{,}1$ m de aceite y $p_2' = 2{,}13$ kg/cm².

En la Fig. 11-7 se representan las fuerzas que actúan sobre la masa de aceite que ocupa el reductor.

$$P_1 = p_1 A_1 = 2{,}80 \times \tfrac{1}{4}\pi(60)^2 = 7920 \text{ kg (hacia la derecha)}$$
$$P_2 = p_2 A_2 = 2{,}13 \times \tfrac{1}{4}\pi(30)^2 = 1510 \text{ kg (hacia la izquierda)}$$

Varía la cantidad de movimiento del aceite en la dirección X. Por tanto,

$$MV_{x_1} + \Sigma\,(\text{fuerzas en la dirección } X) \times 1 = MV_{x_2}$$

$$(7920 - 1510 - F_x)1 = (0{,}85 \times 1000 \times 0{,}900/9{,}8)(12{,}8 - 3{,}2)$$

y $F_x = 5660$ kg, actuando hacia la izquierda sobre el aceite.

Las fuerzas en la dirección Y se equilibran unas con otras y $F_y = 0$.
De aquí, la fuerza ejercida por el aceite sobre el cono reductor es de 5660 kg actuando hacia la derecha.

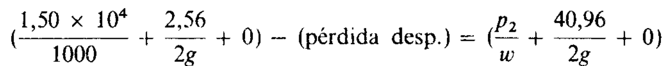
14. Por un codo reductor de 45°, de 60 cm de diámetro en la sección de aguas arriba y 30 cm en la de aguas abajo, circulan 450 l/seg de agua con una presión de 1,50 kg/cm² en la sección 1 (Fig. 11-8). Despreciando cualquier pérdida en el codo, calcular la fuerza ejercida por el agua sobre el codo reductor.

Fig. 11-8

Solución:

$$V_1 = 0{,}450/A_1 = 1{,}60 \text{ m/seg}$$
y
$$V_2 = 6{,}40 \text{ m/seg}$$

La ecuación de Bernoulli, entre las secciones 1 y 2, da



$$\left(\frac{1{,}50 \times 10^4}{1000} + \frac{2{,}56}{2g} + 0\right) - (\text{pérdida desp.}) = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{40{,}96}{2g} + 0\right)$$

de la cual, $p_2/w = 13{,}0$ m y $p_2' = 1{,}30$ kg/cm².

En la Fig. 11-8 se muestran las fuerzas estáticas y dinámicas que actúan sobre la masa de agua.

$$P_1 = p_1A_1 = 1{,}50 \times \tfrac{1}{4}\pi(60)^2 = 4240 \text{ kg}$$
$$P_2 = p_2A_2 = 1{,}30 \times \tfrac{1}{4}\pi(30)^2 = 920 \text{ kg}$$
$$P_{2_x} = P_{2_y} = 920 \times 0{,}707 = 650 \text{ kg}$$

En la dirección X,

$$MV_{x_1} + \Sigma\,(\text{fuerzas en la dirección } X) \times 1 = MV_{x_2}$$
$$(4240 - 650 - F_x)1 = (1000 \times 0{,}450/9{,}8)(6{,}40 \times 0{,}707 - 1{,}60)$$

y $F_x = 3455$ kg hacia la izquierda.

En la dirección Y,

$$(+F_y - 650)1 = (1000 \times 0{,}450/9{,}8)(6{,}40 \times 0{,}707 - 0)$$

y $F_y = 860$ kg hacia arriba.

La fuerza ejercida por el agua sobre el codo reductor es $F = \sqrt{(3455)^2 + (860)^2} = 3560$ kg dirigida hacia la derecha y hacia abajo, siendo el ángulo que forma con la horizontal $\theta_x = \text{arc tg}\,(860/3455) = 13°59'$.

15. Con referencia a la Fig. 11-9, un chorro de agua de 5 cm de diámetro choca con una compuerta cuadrada de 1,20 m de lado y que forma con la dirección del chorro un ángulo de 30° La velocidad del chorro es de 20 m/seg e incide en el centro de gravedad de la compuerta. Despreciando el rozamiento, ¿qué fuerza normal a la compuerta habrá que aplicar en el extremo opuesto a la bisagra para mantenerla en equilibrio?

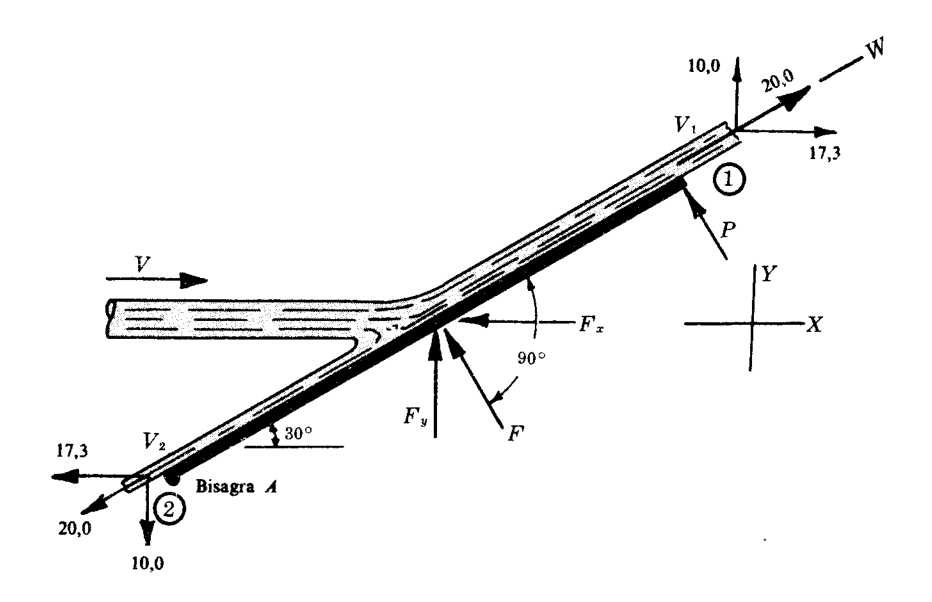


Fig. 11-9

Solución:

La fuerza ejercida por la compuerta sobre el agua será perpendicular a la compuerta, por no existir rozamiento. De aquí, por no actuar ninguna fuerza en la dirección W, mostrada en la figura, no habrá variación de la cantidad de movimiento en esta dirección. Por tanto, utilizando las componentes en la dirección W,

$$\text{Cantidad de movimiento inicial } \pm 0 = \text{cantidad de movimiento final}$$
$$+M(V \cos 30^\circ) = +M_1 V_1 - M_2 V_2$$
$$(w/g)(A_{chor.} V)(V \cos 30^\circ) = (w/g)(A_1 V_1) V_1 - (w/g)(A_2 V_2) V_2$$

Pero $V = V_1 = V_2$ (por despreciarse el rozamiento). Entonces,

$$A_{chor.} \cos 30^\circ = A_1 - A_2 \text{ y, por la ecuación de continuidad, } A_{chor.} = A_1 + A_2$$

Resolviendo este sistema,

$$A_1 = A_{chor.}(1 + \cos 30^\circ)/2 = A_{chor.} \times 0{,}933 \quad \text{y} \quad A_2 = A_{chor.}(1 - \cos 30^\circ)/2 = A_{chor.} \times 0{,}067$$

La corriente de agua se divide como se ha indicado y la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección X da

$$\left[\frac{1000}{9{,}8}\left(\frac{1}{4}\pi\right)(0{,}05)^2 20\right]20 - F_x(1) = \left[\frac{1000}{9{,}8}\left(\frac{1}{4}\pi\right)(0{,}05)^2 0{,}933(20)\right]17{,}3 + \left[\frac{1000}{9{,}8}\left(\frac{1}{4}\pi\right)(0{,}05)^2 0{,}067(20)\right](-17{,}3)$$

de donde $F_x = 20{,}5$ kg.

Análogamente, en la dirección Y,

$$M(0) + F_y(1) = \left[\frac{1000}{9{,}8}(0{,}002)(0{,}933)20\right]10 + \left[\frac{1000}{9{,}8}(0{,}002)(0{,}067)20\right](-10).$$

de donde $F_y = 35{,}3$ kg.

Para la compuerta, como cuerpo libre, $\Sigma M_{bisagra} = 0$ y

$$+20{,}5(0{,}3) + 35{,}3(0{,}6 \times 0{,}866) - P(1{,}2) = 0 \quad \text{o} \quad P = 20{,}4 \text{ kg}$$

16. Determinar la reacción que produce un chorro que fluye por un orificio practicado en la pared lateral del depósito que contiene el líquido.

Solución:

En la figura adjunta se toma como un cuerpo libre la masa de líquido $ABCD$. Las únicas fuerzas horizontales presentes son F_1 y F_2, que producen la variación en la cantidad de movimiento del agua.

$(F_1 - F_2) \times 1 = M(V_2 - V_1)$, donde V_1 puede considerarse despreciable.

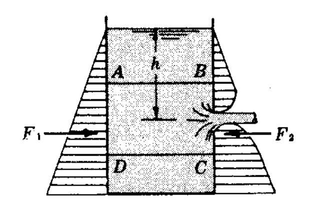


Fig. 11-10

Reacción $F = F_1 - F_2 = \dfrac{wQ}{g} V_2 = \dfrac{wA_2V_2}{g} V_2.$

Pero $A_2 = c_c A_o$ y $V_2 = c_v\sqrt{2gh}.$

De donde $F = \dfrac{w(c_c A_o)}{g} c_v^2(2gh) = (c\, c_v)wA_o(2h)$ (hacia la derecha sobre el líquido)

(1) Para los valores medios $c = 0{,}60$ y $c_v = 0{,}98$, la fuerza de reacción es $F = 1{,}176whA_0$. De aquí, la fuerza que actúa hacia la izquierda sobre el depósito es, aproximadamente, el 18 % mayor que la fuerza estática que actuaría sobre un tapón que cerrara justamente el orificio.

(2) Para un flujo ideal (sin rozamiento y sin contracción), $F = 2(whA_0)$. Esta fuerza es igual al doble de la que actuaría sobre el tapón que cerrara el orificio.

(3) Para el caso de una boquilla ($c_c = 1{,}00$), la reacción es $F = c_v^2 wA(2h)$, donde h representa la altura de carga efectiva que da lugar al flujo.

17. Los chorros de un aparato de riego por aspersión tienen 3 cm de diámetro y salen en dirección normal al radio de 60 cm. Si la presión en las bases de las boquillas es de 3,50 kg/cm^2, ¿qué fuerza debe aplicarse sobre cada uno de los brazos, a 30 cm del eje de giro, para mantener el aspersor en reposo? (Utilizar $c_v = 0{,}80$ y $c_c = 1{,}00$.)

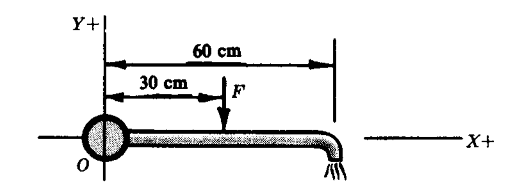


Fig. 11-11

Solución:

La reacción producida por el chorro del aspersor puede calcularse por el principio de la cantidad de movimiento. Además, como la fuerza que produce el cambio en la cantidad de movimiento en la dirección X actúa a lo largo del eje X, no da lugar a ningún par. Interesa, por tanto, la variación de la cantidad de movimiento en la dirección Y. Pero la cantidad de movimiento inicial en la dirección Y es nula. La velocidad del chorro será

$$V_Y = c_v\sqrt{2gh} = 0{,}80\sqrt{2g(35{,}0 + \text{altura de velocidad despreciable})} = 21{,}0 \text{ m/seg}$$

Así, $$F_Y\,dt = M(V_Y) = [\frac{1000}{9{,}8} \times \tfrac{1}{4}\pi(0{,}03)^2 \times 21{,}0\, dt](-21{,}0)$$

de donde $F_Y = -31{,}8$ kg dirigida hacia abajo y actuando sobre el agua. De aquí, la fuerza que el chorro ejerce sobre el aspersor es de $+31{,}8$ kg y dirigida hacia arriba. Finalmente,

$$\Sigma M_0 = 0, \quad F(0{,}3) - 0{,}6(31{,}8) = 0, \quad F = 63{,}6 \text{ kg para el equilibrio}$$

18. Desarrollar las ecuaciones básicas que dan el empuje en los dispositivos de propulsión.

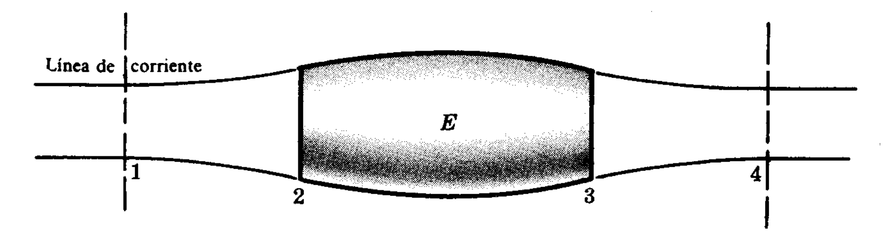


Fig. 11-12

Solución:

En la Fig. 11-12 se muestra un motor a reacción E, que utiliza W kg de aire por segundo. En la sección 1, la velocidad V_1 del aire que entra en el motor es igual a la velocidad de vuelo. También se considera que el aire entra a la presión atmosférica (a la que no tienen lugar ondas de choque). En el motor E el aire es comprimido y calentado por combustión. El aire abandona la tobera en la sección 3 a una gran velocidad, con lo que su cantidad de movimiento ha aumentado notablemente.

En la mayoría de los motores a reacción, el peso por segundo de aire que sale del motor es mayor que el que entra, debido a la adición del combustible. Este aumento viene a ser del 2 %. El peso de aire a la salida se mide, por lo general, en la sección 3.

El empuje se evalúa en función de la variación en la cantidad de movimiento como sigue:

$$\text{Empuje } F = \frac{W_{\text{sal}} V_4}{g} - \frac{W_1 V_1}{g} \qquad (A)$$

En los casos en que la presión en la sección 3 es mayor que la atmosférica se obtiene todavía una aceleración adicional del gas. La fuerza adicional es igual al producto de la diferencia de presiones por el área de la sección 3. Así, para la variación de la cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 3, se obtiene

$$F = \frac{W_{\text{sal}} V_3}{g} + A_3(p_3 - p_4) - \frac{W_1 V_1}{g} \qquad (B)$$

Si se quiere determinar la velocidad efectiva de eyección, se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas (A) y (B),

$$V_4 = V_3 + \frac{gA_3}{W_3}(p_3 - p_4) \qquad (C)$$

Se observará que si $p_3 = p_4$, $V_4 = V_3$.

El término $W_1 V_1/g$ se conoce con el nombre de empuje negativo o resistencia de atraque. El empuje bruto (producido por la tobera) es $W_3 V_4/g$ en la ecuación (A) y $W_3 V_3/g + A_3(p_3 - p_4)$ en la ecuación (B).

Para un motor cohete el empuje se calcula mediante la ecuación (A) por ser $V_1 = 0$ en estos dispositivos.

19. En el laboratorio se ensaya un motor a chorro. El motor consume 23,0 kg/seg de aire y 0,20 kg/seg de combustible. Si la velocidad de salida de los gases es de 450 m/seg, ¿qué valor tiene el empuje?

Solución:

Mediante la fórmula (A) del Problema 18, empuje $F = (23{,}2 \times 450 - 23 \times 0)/9{,}8 = 1060$ kg.

20. Un motor a chorro funciona a 180 m/seg y consume un caudal en peso de aire de 23,0 kg/seg. ¿A qué velocidad ha de descargar el aire para que el empuje sea igual a 680 kg?

Solución:

Empuje $F = 680 = (23/9{,}8)(V_{\text{sal.}} - 180)$, de donde $V_{\text{sal.}} = 470$ m/seg.

21. En el laboratorio se ensaya un motor turborreactor bajo unas condiciones semejantes a las que reinan en cierta altitud, donde la presión atmosférica es de 3830 kg/m^2 (ab), la temperatura $T = 238{,}5°$ K y el peso específico $w = 0{,}549$ kg/m^3. Si el área de la sección de salida del motor es de 1400 cm^2 y la presión de salida la atmosférica, ¿cuál es el número de Mach si el empuje bruto es de 670 kg? (Utilizar $k = 1{,}33$.)

Solución:

Como en la ecuación (B) del Problema 18, $p_3 = p_4$ y $V_1 = 0$,

$$F = W_s V_s/g = (wA_s V_s)V_s/g, \qquad 670 = 0{,}549(0{,}140)V_s^2/g, \qquad V_s = 292 \text{ m/seg}$$

El número de Mach $N_M = V_s/c = V_s/\sqrt{kgRT} = 292/\sqrt{1{,}33(9{,}8)(29{,}3)(238{,}5)} = 0{,}97$

22. En el Problema 21, ¿cuál será el empuje bruto si la presión de salida fuera de 0,70 kg/cm^2 (ab) y el número de Mach igual a 1,00? (Utilizar $k = 1{,}33$.)

Solución:

Con el fin de calcular la velocidad de salida para las nuevas condiciones en la salida, se calcula la temperatura en dicha sección a partir de

$T_s/238{,}5 = (0{,}70 \times 10^4/3830)^{(k-1)/k}$, de donde $T_s = 277°$ K.

Entonces, $V_s = N_M c = N_M\sqrt{kgRT} = 1{,}00\sqrt{1{,}33(9{,}8)(29{,}3)(277)} = 325$ m/seg.

Además, se calculará el peso específico en la salida a partir de

$$(w_1/w_2)^k = p_1/p_2, \qquad (w_s/0{,}549)^{1{,}33} = 0{,}70 \times 10^4/3830, \qquad w_e = 0{,}864 \text{ kg/m}^3$$

Mediante la ecuación (*B*) del Problema 18,

$$F = 0{,}864(0{,}140)(325)^2/9{,}8 + 0{,}140(7000 - 3830) - 0 = 1746 \text{ kg.}$$

23. Un motor cohete quema su propulsor a razón de 6,90 kg/seg. Los gases, productos de la combustión, abandonan el cohete a la presión atmosférica y a una velocidad relativa de 980 m/seg. La tobera de empuje tiene un área de salida de 320 m² y el peso bruto del cohete es de 230 kg. En un instante determinado, el motor cohete desarrolla una potencia de 2500 CV. ¿Cuál es la velocidad del cohete?

Solución:

En un motor cohete no entra aire del exterior de forma que los términos de la sección 1 en la ecuación (*B*) del Problema 18 se anulan. Además, como la presión de salida es la atmosférica, $p_3 = p_4$. Así, el empuje

$$F_T = (W_s/g)V_s = (6{,}90/9{,}8)(980) = 690 \text{ kg}$$

$$\text{y como } 2500 \text{ CV} = F_T V_{\text{cohete}}/75, \qquad V_{\text{cohete}} = 272 \text{ m/seg}$$

24. Suponiendo que la resistencia es función de las magnitudes físicas: densidad, viscosidad, elasticidad y velocidad del fluido, y de un área característica, demostrar que la resistencia es función de los números de Mach y de Reynolds (véase Capítulo 5, Problemas 9 y 16).

Solución:

Como ya quedó establecido en el Capítulo 5, un estudio mediante el análisis dimensional conducirá a la relación deseada, como se indica a continuación.

$$F_D = f_1(\rho, \mu, E, V, A)$$

o

$$F_D = C\rho^a \mu^b E^c V^d L^{2e}$$

Entonces, dimensionalmente, $F^1 L^0 T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b T^b L^{-2b})(F^c L^{-2c})(L^d T^{-d})L^{2e}$

y $\quad 1 = a + b + c, \qquad 0 = -4a - 2b - 2c + d + 2e, \qquad 0 = 2a + b - d$

Resolviendo el sistema en función de *b* y *c* se obtiene

$$a = 1 - b - c, \qquad d = 2 - b - 2c, \qquad e = 1 - b/2$$

Sustituyendo, $F_D = C\rho^{1-b-c}\mu^b E^c V^{2-b-2c} L^{2-b}$

Expresando esta ecuación en la forma usual se llega a

$$F = CA\rho V^2\left(\frac{\mu}{L\rho V}\right)^b\left(\frac{E}{\rho V^2}\right)^c$$

o

$$F = A\rho V^2 f_2(R_E, N_M)$$

Esta ecuación pone de manifiesto que el coeficiente de resistencia de objetos sumergidos en corrientes fluidas de forma geométrica dada y orientados de forma definida respecto de la corriente, dependen únicamente de los números de Reynolds y de Mach.

En el caso de fluidos incompresibles el número de Reynolds es el predominante, y la influencia del número de Mach es pequeña o despreciable; por tanto, los coeficientes de resistencia son función exclusiva del número de Reynolds R_E. (Véanse Diagramas *F* y *G* del Apéndice.) En realidad, para valores pequeños de N_M el fluido puede considerarse incompresible en lo que se refiere al coeficiente de resistencia.

Cuando el número de Mach N_M es igual o mayor que 1,0 (con velocidades del fluido iguales o mayores qu la velocidad de propagación del sonido) el coeficiente de resistencia es solo función de N_M. (Véase Diagrama . del Apéndice.) No obstante, frecuentemente se presentan situaciones en que el coeficiente de resistencia depenc tanto de R_E como de N_M.

Puede hacerse un estudio análogo del coeficiente de sustentación, y las conclusiones a que se han llegad son aplicables a este coeficiente de sustentación. Se sugiere el empleo del teorema de Pi de Buckingham.

25. Un viento de una velocidad de 80 km/h choca contra una pancarta de señalización de 2,0 m po 2,5 m incidiendo normalmente a su superficie. Para una lectura barométrica normal, ¿cuál es l fuerza que actúa contra la señal? (w = 1,200 kg/m³.)

Solución:

Para un chorro de fluido, de pequeña sección transversal, que incide sobre una placa en reposo de grande dimensiones, se ha visto que la fuerza ejercida por el fluido es

$$(\text{Fuerza})_x = \Delta(MV_x) = (w/g)(AV_x)V_x = \rho A V_x^2$$

La placa en reposo que se considera en este problema afecta a una gran cantidad de aire. Su cantidad d movimiento no se reduce a cero en la dirección X, como sucedía en el caso del chorro de agua. Los ensayo realizados con placas que se mueven a través de fluidos a diferentes velocidades muestran que el coeficiente d resistencia varía con la relación de longitud a anchura y que su valor es prácticamente constante por encima d números de Reynolds iguales a 1000. (Véase Diagrama F del Apéndice.) Es indiferente que el objeto se mueva a través de un fluido en reposo o sea el fluido el que se mueva alrededor del objeto en reposo; los coeficiente de resistencia y las resistencias totales son iguales en ambos casos. La velocidad relativa es la magnitud significativa.

El coeficiente (C_D) se emplea en la siguiente ecuación: Fuerza $F = C_D \rho A \dfrac{V^2}{2}$.

Esta ecuación se escribe a veces para incluir la altura de velocidad, en la siguiente forma:

$$\text{Fuerza } F = C_D w A \frac{V^2}{2g}.$$

Utilizando C_D = 1,20, obtenido en el Diagrama F, Fuerza $F = 1{,}20(\dfrac{1{,}200}{9{,}8})(5)\dfrac{(80 \times 1000/3600)^2}{2} = 181$ kg.

26. Una placa plana de 1,2 m por 1,2 m se mueve a una velocidad de 6,5 m/seg en dirección normal a su plano. Determinar la resistencia que se opone al movimiento (a) cuando se mueve a través del aire a 20° C y presión atmosférica normal y (b) cuando lo hace a través de agua a 15° C.

Solución:

(a) Del Diagrama F, para longitud/anchura = 1, C_D = 1,16.

$$\text{Resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = 1{,}16(\frac{1{,}200}{9{,}8})(1{,}2 \times 1{,}2)\frac{(6{,}5)^2}{2} = 4{,}3 \text{ kg.}$$

(b) $$\text{Resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = 1{,}16(102)(1{,}2 \times 1{,}2)\frac{(6{,}5)^2}{2} = 3600 \text{ kg.}$$

27. Un hilo de cobre de gran longitud y 12 mm de diámetro está tensado y expuesto a un viento de 27,0 m/seg, que incide normalmente al eje del hilo. Calcular la resistencia por metro de longitud.

Solución:

Para aire a 20° C la Tabla 1 da ρ = 0,1224 UTM/m³ y $\nu = 1{,}488 \times 10^{-5}$ m²/seg. Entonces,

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{27 \times 12 \times 10^{-3}}{1{,}488} \times 10^5 = 21.800$$

Del Diagrama F, C_D = 1,30. De aquí,

$$\text{Resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = 1{,}30(0{,}1224)(1 \times 0{,}012)\frac{(27)^2}{2} = 0{,}696 \text{ kg por metro de longitud}$$

28. Una placa plana de 0,9 m por 1,2 m se mueve a una velocidad de 12 m/seg a través de aire en reposo, formando un ángulo de 12° con la horizontal. Utilizando un coeficiente de resistencia de C_D = 0,17 y un coeficiente de sustentación de C_L = 0,72, determinar (a) la fuerza resultante que ejerce el aire sobre la placa, (b) la fuerza debida al rozamiento y (c) la potencia, en CV, necesaria para mantener el movimiento. (Utilizar w = 1,200 kg/m³.)

Solución:

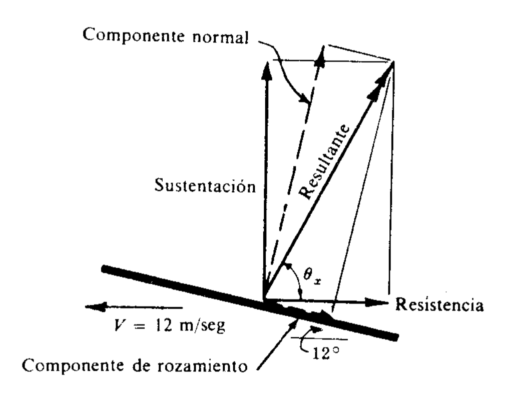


Fig. 11-13

(*a*) Resistencia $= C_D(\frac{w}{g})A\frac{V^2}{2}$

$= 0{,}17(\frac{1{,}200}{9{,}8})(1{,}08)\frac{(12)^2}{2} = 1{,}62$ kg.

Sustentación $= C_L(\frac{w}{g})A\frac{V^2}{2}$

$= 0{,}72(\frac{1{,}200}{9{,}8})(1{,}08)\frac{(12)^2}{2} = 6{,}85$ kg.

Con referencia a la Fig. 11-13, la resultante de las componentes de resistencia y sustentación será

$R = \sqrt{(1{,}62)^2 + (6{,}85)^2} = 7{,}02$ kg, que actúa sobre la placa formando un ángulo θ_x = arc tg (6,85/1,62) = 76°42′ con la horizontal.

(*b*) La resultante puede descomponerse también en una componente normal a la placa y una tangencial o de rozamiento (dibujadas a trazos en la figura). Del triángulo vectorial,

componente del rozamiento $= R \cos(\theta_x + 12°) = (7{,}02)(0{,}0227) = 0{,}16$ kg.

(*c*) Potencia (CV) = (fuerza en dirección del movimiento × velocidad)/75 = (1,62 × 12)/75 = 0,259 CV

29. Si un avión pesa 1800 kg y la superficie de sus alas es de 28 m², ¿qué *ángulo de ataque* han de formar las alas con la horizontal a una velocidad de 160 km/h? Suponer que el coeficiente de sustentación varía linealmente de 0,35 a 0° hasta 0,80 a 6° y utilizar para el aire w = 1,200 kg/m³.

Solución:

Para el equilibrio en dirección vertical, $\Sigma Y = 0$. Por tanto, sustentación − peso = 0, es decir,

$$\text{Peso} = C_L w A \frac{V^2}{2g}, \quad 1800 = C_L(1{,}200)(28)\frac{(160 \times 1000/3600)^2}{2g}, \quad C_L = 0{,}53$$

Por interpolación entre 0° y 6°, ángulo de ataque = 2,4°.

30. ¿Qué superficie de alas se necesita para soportar un avión de 2300 kg, cuando vuela a una velocidad de 28 m/seg con un *ángulo de ataque* de 5°? Utilizar los coeficientes dados en el Problema 29.

Solución:

Por los datos del problema anterior, o bien de una curva, $C_L = 0{,}725$ para 5°. Como en el Problema 29,

$$\text{Peso} = \text{sustentación}, \quad 2300 = 0{,}725(1{,}200/9{,}8)A(28)^2/2, \quad A = 66{,}16 \text{ m}^2$$

31. Un perfil de ala de 40 m² de área y con un ángulo de ataque de 6° se mueve a una velocidad de 25 m/seg. Si el coeficiente de resistencia varía linealmente de 0,040 a 4° hasta 0,120 a 14°, ¿qué potencia se requiere para mantener dicha velocidad en aire a 5° C y 0,90 kg/cm² de presión absoluta?

Solución:

$$w = \frac{p}{RT} = \frac{0{,}90 \times 10^4}{29{,}3(273 + 5)} = 1{,}105 \text{ kg/m}^3, \text{ para el aire}$$

Para un ángulo de ataque de 6°, por interpolación, $C_D = 0{,}056$.

$$\text{Resistencia} = C_D \rho A\, V^2/2 = 0{,}056(1{,}105/9{,}8)(40)(25)^2/2 = 79 \text{ kg}$$
$$\text{Potencia (CV)} = (79 \text{ kg})(25 \text{ m/seg})/75 = 26{,}3 \text{ CV}$$

32. En el problema precedente, para un coeficiente de sustentación de 0,70 y una cuerda de 1,50 m de longitud, determinar (*a*) la sustentación y (*b*) los números de Reynolds y Mach.

Solución:

(*a*) Sustentación $F_L = C_L \rho A\ V^2/2 = 0{,}70(1{,}105/g)(40)(25)^2/2 = 985$ kg.

(*b*) La longitud característica en el número de Reynolds es la longitud de la cuerda. Así,

$$R_E = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{25 \times 1{,}5 \times 1{,}105}{(1{,}77 \times 10^{-6})(9{,}8)} = 2.386.400$$

Se recordará que la viscosidad absoluta no varía con la presión.

$$N_M = V/\sqrt{E/\rho} = V/\sqrt{kgRT} = 25/\sqrt{(1{,}4)(9{,}8)(29{,}3)(278)} = 0{,}075$$

33. Un perfil de ala de 25 m^2 de área se mueve a una velocidad de 25,0 m/seg. Si la potencia requerida para mantener el movimiento es de 14,0 CV, ¿cuál es el ángulo de ataque empleado si las variaciones del coeficiente de resistencia son las dadas en el Problema 31? Utilizar, como en el Problema 31, $w = 1{,}105$ kg/m^3.

Solución:

$$14{,}0 \text{ CV} = (\text{fuerza})(25{,}0 \text{ m/seg})/75, \qquad \text{fuerza} = 42{,}0 \text{ kg}$$

$$\text{Fuerza} = C_D \rho A V^2/2, \qquad 42{,}0 = C_D(1{,}105/9{,}8)(25)(25)^2/2, \qquad C_D = 0{,}0477$$

Mediante los datos que relacionan el ángulo de ataque con C_D, por interpolación, se obtiene como ángulo de ataque 5,0°.

34. Un furgón tiene 50 m^2 de área de uno de sus lados. Calcular la fuerza resultante sobre dicho lado del furgón cuando el viento está soplando a una velocidad de 16 km/h normal al área lateral del furgón (*a*) si el furgón está en reposo y (*b*) cuando se mueve a una velocidad de 45 km/h normal a la dirección del viento. En (*a*) utilizar $C_D = 1{,}30$, y en (*b*) $C_D = 0{,}25$ y $C_L = 0{,}60$. ($\rho = 0{,}1245$ UTM/m^3.)

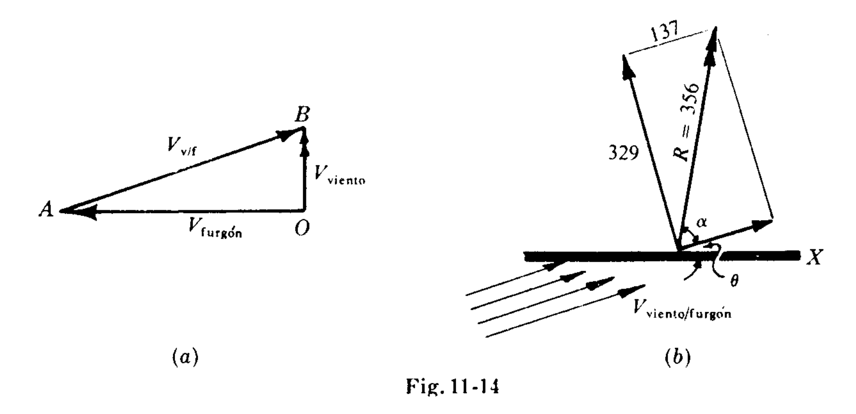


Fig. 11-14

Solución:

(*a*) Fuerza que actúa normal al área $= C_D(\rho/2)AV^2$. Así,

$$\text{Fuerza resultante} = 1{,}30(0{,}1245/2)(50)(16.000/3600)^2 = 80 \text{ kg normal al área}$$

(*b*) Es necesario calcular la velocidad relativa del viento respecto del furgón. Por composición vectorial,

$$V_{viento} = V_{viento/furgón} \leftrightarrow V_{furgón}$$

La Fig. 11-14(*a*) indica esta relación vectorial, es decir,

$$OB = OA \leftrightarrow AB = 45{,}0 \leftrightarrow V_{v/f}$$

Por tanto, la velocidad relativa $= \sqrt{(45)^2 + (16)^2} = 47{,}8$ km/h, dirigida hacia la derecha y hacia abajo, formando un ángulo $\theta = \text{arc tg } (16/45) = 19{,}6°$.

La componente de la resultante, perpendicular a la velocidad relativa del viento respecto del furgón es

$$\text{Sustentación} = C_L(\rho/2)AV^2 = 0{,}60(0{,}1245/2)(50)(47800/3600)^2$$
$$= 329 \text{ kg normal a la velocidad relativa}$$

La componente de la resultante, paralela a la velocidad relativa del viento respecto del furgón, es

$$\text{Resistencia} = C_D(\rho/2)AV^2 = 0{,}25(0{,}1245/2)(50)(47800/3600)^2$$
$$= 137 \text{ kg paralela a la velocidad relativa}$$

Con referencia a la Fig. 11-14(*b*), la fuerza resultante $= \sqrt{(329)^2 + (137)^2} = 356$ kg, formando un ángulo $\alpha = \text{arc tg}\,(329/137) = 67{,}4°$. De aquí, el ángulo con el eje longitudinal (eje X) será $19{,}6° + 67{,}4° = 87{,}0°$.

35. Una cometa pesa 1,10 kg y tiene un área de 0,75 m². La fuerza de tracción en el hilo de sujeción de la cometa es de 3,00 kg cuando dicho hilo forma un ángulo con la horizontal de 45°. Para un viento de 32 km/h, ¿cuáles son los coeficientes de sustentación y de resistencia si la cometa forma con la horizontal un ángulo de 8°? Considerar la cometa como una placa plana y $w_{\text{aire}} = 1{,}205$ kg/m³.

Solución:

En la Fig. 11-15 se muestran las fuerzas que actúan sobre la cometa, considerada como un cuerpo libre. Las componentes de la fuerza de tracción sobre el hilo son iguales a 2,12 kg.

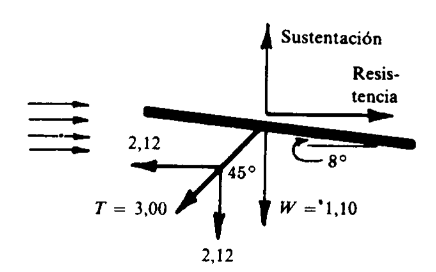


Fig. 11-15

De $\Sigma X = 0$, resistencia = 2,12 kg.

De $\Sigma Y = 0$, sustentación = 2,12 + 1,10 = 3,22 kg.

$$\text{Resistencia} = C_D\rho AV^2/2, \quad 2{,}12 = C_D(1{,}205/9{,}8)(0{,}75)(32.000/3600)^2/2, \quad C_D = 0{,}58.$$

$$\text{Sustentación} = C_L\rho AV^2/2, \quad 3{,}22 = C_L(1{,}205/9{,}8)(0{,}75)(32.000/3600)^2/2, \quad C_L = 0{,}88.$$

36. Un hombre que pesa 77 kg se lanza desde un avión con un paracaídas de 5,50 m de diámetro. Suponiendo que el coeficiente de resistencia es igual a 1,00 y despreciando el peso del paracaídas ¿cuál será la velocidad límite de descenso?

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre el paracaídas son el peso del hombre, dirigida hacia abajo, y la resistencia, dirigida hacia arriba.

Para el equilibrio, $\Sigma Y = 0$ (para velocidad de descenso constante),

$$W = C_D\rho AV^2/2, \quad 77 = 1{,}00(1{,}205/9{,}8)(\pi 2{,}75^2)V^2/2, \quad V = 7{,}3 \text{ m/seg}$$

37. Una bola de acero de 3 mm de diámetro y peso específico 7,87 g/cm³ cae a través de una masa de aceite de densidad relativa 0,908 y viscosidad cinemática $1{,}46 \times 10^{-4}$ m²/seg. ¿Cuál es la velocidad límite alcanzada por la bola?

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre la bola de [illegible] peso de la misma, dirigida hacia abajo; el empuje hidrostático, dirigida hacia arriba, y [illegible]ncia, dirigida hacia arriba. Cuando se alcance la velocidad constante, $\Sigma Y = 0$, y transponiendo [illegible]nos,

$$\text{peso de la esfera} - \text{empuje hidrostático} = \text{resistencia}$$

o

$$w_s(\text{volumen}) - w_0(\text{volumen}) = C_D\rho AV^2/2$$

Utilizando kg/cm³ × cm³ = peso,

$$\frac{4}{3}\pi(0{,}15)^3(0{,}00787 - \frac{0{,}908 \times 1000}{10^6}) = C_D(\frac{0{,}908 \times 1000}{9{,}8})\pi(\frac{0{,}003}{2})^2\frac{V^2}{2}$$

Suponiendo un valor de C_D de 3,00 (véase Diagrama F, esferas) y despejando,

$$V^2 = 0{,}30/C_D = 0{,}100 \qquad \text{y} \qquad V = 0{,}316 \text{ m/seg}$$

Se comprueba ahora el valor supuesto para C_D, se calcula el número de Reynolds y se entra en el Diagrama F.

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}316 \times 0{,}003}{1{,}46 \times 10^{-4}} = 6{,}5 \qquad \text{y} \qquad C_D = 6{,}0 \text{ (aumenta } C_D)$$

Se repiten los cálculos y se comprueba, para $C_D = 7{,}0$,

$$V^2 = 0{,}30/7{,}0 = 0{,}0428, \qquad V = 0{,}207, \qquad R_E = 4{,}22, \qquad C_D = 8{,}1 \text{ (aumenta } C_D)$$

Ensayando $C_D = 8{,}5$,

$$V^2 = 0{,}30/8{,}5 = 0{,}0353, \qquad V = 0{,}188, \qquad R_E = 3{,}86, \qquad C_D = 8{,}5 \text{ (correcto)}$$

Por tanto, la velocidad límite = 0,19 m/seg.

Cuando el número de Reynolds es menor de 0,60, la ecuación para determinar la resistencia puede escribirse en la forma

$$C_D \rho A V^2/2 = (24/R_E)\rho A V^2/2 = (24\nu/Vd)\rho(\pi d^2/4)V^2/2.$$

Como $\mu = \rho\nu$, resistencia $= 3\pi\mu d V$.

38. Una esfera de plomo de 25 mm de diámetro y peso específico 11.400 kg/m^3 desciende a través de una masa de aceite a una velocidad constante de 35 cm/seg. Calcular la viscosidad absoluta del aceite si su densidad relativa es 0,93.

Solución:

Como en el problema precedente, al utilizar peso = kg/m^3 × m^3,

$$(w_s - w_o)(\text{volumen}) = C_D \rho A V^2/2$$

Luego $(11.400 - 0{,}93 \times 1000)(4\pi/3)(0{,}0125)^3 = C_D(0{,}93 \times 1000/9{,}8)\pi(0{,}0125)^2(0{,}35)^2/2$ y $C_D = 30{,}0$.

Del Diagrama F, para $C_D = 30{,}0$, $R_E = 0{,}85$ y

$$0{,}85 = Vd/\nu = (0{,}35)(0{,}025)/\nu, \qquad \nu = 0{,}0103 \text{ m}^2/\text{seg}$$

Por tanto, $$\mu = \nu\rho = 0{,}0103(0{,}93 \times 1000)/9{,}8 = 0{,}978 \text{ kg seg/m}^2$$

39. Una esfera de 13 mm de diámetro asciende en una masa de aceite a la velocidad límite de 3,6 cm/seg. ¿Cuál es el peso específico de la esfera si la densidad del aceite es 93 UTM/m^3 y su viscosidad absoluta 0,00347 kg seg/m^2?

Solución:

Para la velocidad límite, constante, $\Sigma Y = 0$ y

$$\text{empuje hidrostático} - \text{peso} - \text{resistencia} = 0$$

$$(4\pi/3)(0{,}013/2)^3(93 \times 9{,}8 - w_s) = C_D(93)\pi(0{,}013/2)^2(0{,}036)^2/2$$
$$(911 - w_s) = 6{,}96 C_D \qquad (1)$$

El coeficiente de resistencia puede evaluarse mediante el Diagrama F y el número de Reynolds.

$$\text{Número de Reynolds} = \frac{Vd\rho}{\mu} = \frac{0{,}036 \times 0{,}013 \times 93}{0{,}00347} = 12{,}53$$

Ahora, del Diagrama F, $C_D = 3{,}9$ (para esferas) y, a partir de (1),

$$w_s = 911 - 6{,}96 \times 3{,}9 = 884 \text{ kg/m}^3$$

40. Para flujos laminares, con números de Reynolds bajos, demostrar que el coeficiente de resistencia de la esfera es igual a 24 dividido por el número de Reynolds (se muestra gráficamente en el Diagrama F del Apéndice).

Solución:

La resistencia $F = C_D \rho A V^2/2$, como se vio anteriormente.

Para flujo laminar la resistencia depende de la viscosidad y velocidad del fluido y del diámetro d de la esfera. Así,

$$F_D = f(\mu, V, d) = C\,\mu^a\, V^b\, d^c$$

Entonces, $$F^1 L^0 T^0 = (F^a T^a L^{-2a})(L^b T^{-b})(L^c)$$

y $$1 = a, \qquad 0 = -2a + b + c, \qquad 0 = a - b$$

de donde $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Por tanto, resistencia $F_D = C(\mu V d)$. G. G. Stokes ha demostrado matemáticamente que $C = 3\pi$, lo que ha sido confirmado por la experiencia.

Se igualan ahora las dos expresiones de la resistencia sustituyendo el área proyectada por $\frac{1}{4}\pi d^2$ y despejando C_D.

$$3\pi\mu V d = C_D \rho(\tfrac{1}{4}\pi d^2)V^2/2 \qquad \text{y} \qquad C_D = \frac{24\mu}{Vd\rho} = \frac{24}{R_E}$$

41. Desarrollar una expresión que dé el espesor δ de la capa límite, para el flujo laminar de un fluido que pasa por una placa delgada, suponiendo que la ecuación que da la distribución de velocidades es $v = V\left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)$.

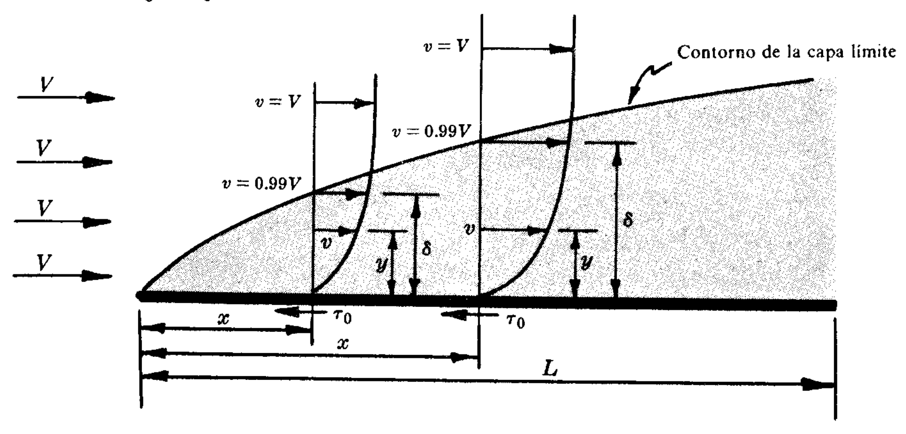


Fig. 11-16

Solución:

Se hacen las siguientes hipótesis: que el flujo es permanente ($\partial v/\partial t = 0$), que la velocidad fuera de la capa límite es en todos los puntos igual a la velocidad de aproximación V, que δ es muy pequeño respecto de la distancia x y que $dp/dy = 0 = dp/dx$, satisfaciéndose estas dos últimas tanto en el exterior como en el interior de la capa límite. Además, por definición, el contorno de la capa límite es el lugar geométrico de los puntos en los que la velocidad es 0,99 de la velocidad de aproximación V (velocidad no perturbada).

La masa que atraviesa cualquier sección de la capa límite, por unidad de anchura, es $\int_0^\delta \rho v(dy \times 1)$ y la variación de la velocidad en un punto cualquiera es $(V - v)$. Además, como las fuerzas debidas a la presión en la sección considerada se equilibran, no intervienen en la variación de la cantidad de movimiento, siendo ésta producida exclusivamente por la fuerza cortante $\tau_0\, dA$ o $\tau_0(dx \times 1)$. De lo anterior, la variación en la cantidad de movimiento por unidad de tiempo será

$$\int_0^\delta \rho(V - v)v(dy \times 1)$$

Esta expresión es igual al impulso producido por la fuerza cortante, también en la unidad de tiempo, es decir,

$$\text{Resistencia/unidad de anchura,} \quad F'_D = \int_0^x \tau_0(dx \times 1) = \int_0^\delta \rho(V - v)v(dy \times 1)$$

Sustituyendo la velocidad por su expresión como distribución parabólica en la ecuación anterior

$$F'_D = \int_0^\delta \rho(V - 2yV/\delta + y^2V/\delta^2)(V)(2y/\delta - y^2/\delta^2)\,dy$$

$$= \rho V^2 \int_0^\delta (1 - 2y/\delta + y^2/\delta^2)(2y/\delta - y^2/\delta^2)\,dy = \tfrac{2}{15}\rho V^2 \delta \qquad (A)$$

Con el fin de obtener una útil expresión de δ, se tiene en cuenta que el flujo es laminar y que $\tau_0\,dx$ = la resistencia unitaria diferencial dF'_D. Entonces, en $\tau_0 = \mu(dv/dy)_0$, el término

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)_0 = \frac{d}{dy}[V(2y/\delta - y^2/\delta^2)] = \frac{2V}{\delta}(1 - y/\delta) \qquad (B)$$

Sustituyendo los valores anteriores en $\mu(dv/dy)_0 = dF'_D/dx$ y estableciendo que la tensión cortante es igual a τ_0 cuando $y = 0$, se obtiene $\mu(2V/\delta) = \frac{2}{15}\rho V^2(d\delta/dx)$ o bien

$$\int_0^\delta \delta\,d\delta = \frac{15\mu}{\rho V}\int_0^x dx$$

de la que se obtiene

$$\delta^2 = \frac{30\mu x}{\rho V} \qquad \text{o} \qquad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\nu}{xV}} = \frac{5{,}48}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (C)$$

La solución, más exacta, de Blasius da 5,20 como numerador de (C).

42. Para un flujo laminar deducir la expresión que dé (a) la tensión cortante en la pared (en la superficie de la placa) en el problema precedente y (b) el coeficiente de resistencia local C_D.

Solución:

(a) De (B), Problema 41, cuando $y = 0$, $\tau_0 = 2\mu V/\delta$. Entonces, mediante el valor de δ, dado por la ecuación (C) anterior,

$$\tau_0 = \frac{2\mu V}{\sqrt{30\mu x/\rho V}} = 0{,}365\sqrt{\frac{\rho V^3\mu}{x}} = 0{,}365\frac{\rho V^2}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (A)$$

Experimentalmente se ha determinado la fórmula más exacta

$$\tau_0 = 0{,}33\sqrt{\frac{\rho V^3\mu}{x}} = 0{,}33\frac{\rho V^2}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (B)$$

(b) El coeficiente de resistencia local C_{D_x} se obtiene al igualar $\tau_0 A$ a la resistencia local, es decir,

$$F_D = \tau_0 A = C_{D_x}\rho A V^2/2$$

o

$$C_{D_x} = \frac{2\tau_0}{\rho V^2} = \frac{0{,}66\rho V^2}{\rho V^2\sqrt{R_{E_x}}} = \frac{0.66}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (C)$$

Puede verse que la resistencia total sobre una de las caras de la placa es igual a la suma de todas las $(\tau_0 dA)$

$$F_D = \int_0^L \tau_0(dx\cdot 1) = \int_0^L 0{,}33\sqrt{\rho V^3\mu}\,(x^{-1/2}\,dx) = 0.33(2L^{1/2})\sqrt{\rho V^3\mu}$$

Para la forma usual, $F_D = C_D\rho AV^2/2$. Teniendo en cuenta que en este caso $A = L \times 1$, se obtiene

$$C_D\rho LV^2/2 = 0{,}33(2)\sqrt{\rho V^3\mu L} \qquad \text{y} \qquad C_D = 1{,}32\sqrt{\frac{\mu}{\rho VL}} = \frac{1{,}32}{\sqrt{R_E}} \qquad (D)$$

43. Una placa delgada y plana se mantiene paralela a una corriente de aire de 3 m/seg en condiciones normales. Las dimensiones de la placa son 1,20 m por 1,20 m. Calcular (a) la resistencia superficial de la placa, (b) el espesor de la capa límite en el borde de salida (arista posterior de la placa) y (c) la tensión cortante en el borde de salida.

Solución:

(a) Como el coeficiente de resistencia por «rozamiento superficial» depende del número de Reynolds, es necesario determinar R_E.

$$R_E = VL/\nu = 3(1{,}2)/(1{,}48 \times 10^{-5}) = 243.000 \text{ (intervalo laminar)}$$

Suponiendo que reina el flujo laminar sobre toda la placa,

$$\text{coeficiente } C_D = 1{,}328/\sqrt{R_E} = 1{,}328/\sqrt{243.000} = 0{,}00269$$

$$\text{Resistencia } D \text{ (sobre las dos caras)} = 2C_D\rho AV^2/2 = (0{,}00269)(1{,}205/9{,}8)(1{,}2 \times 1{,}2)(3)^2 = 0{,}0042 \text{ kg}$$

(*b*) $\dfrac{\delta}{x} = \dfrac{5{,}20}{\sqrt{R_{E_x}}}$ y $\delta = \dfrac{5{,}20(1{,}2)}{\sqrt{243.000}} = 0{,}0126 \text{ m} = 12{,}6 \text{ mm}.$

(*c*) $\tau = 0{,}33\dfrac{\mu V}{x}\sqrt{R_{E_x}} = 0{,}33\dfrac{(1{,}84 \times 10^{-6})10^3}{1{,}2}\sqrt{243.000} = 0{,}00075 \text{ kg/m}^2.$

44. Una placa lisa de 3,0 m por 1,2 m se mueve a través del aire (15° C) con una velocidad relativa de 1,2 m/seg, manteniéndose el movimiento paralelo a su superficie y a su longitud. Calcular la resistencia en una de las caras de la placa (*a*) suponiendo condiciones laminares, y (*b*) suponiendo condiciones turbulentas sobre toda la placa. (*c*) Para condiciones laminares, calcular el espesor de la capa límite en el centro de la placa y en el borde de salida.

Solución:

(*a*) Se calcula el número de Reynolds: $R_E = VL/\nu = 1{,}2(3)/(1{,}47 \times 10^{-5}) = 245.000.$

Para condiciones laminares, $C_D = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{R_E}} = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{245.000}} = 0{,}00268$ (véase también Diagrama *G*).

$$\text{Resistencia} = C_D\rho AV^2/2 = 0{,}00268(0{,}1245)(3 \times 1{,}2)(1{,}2)^2/2 = 0{,}000865 \text{ kg} = 0{,}865 \text{ g}$$

(*b*) Para régimen turbulento, con $R_E < 10^7$, $C_D = \dfrac{0{,}074}{R_E^{0{,}20}}$ [véase ecuación (*12*)].

Así, $C_D = \dfrac{0{,}074}{(245.000)^{0{,}20}} = \dfrac{0{,}074}{11{,}97} = 0{,}00618$ (véase también Diagrama *G*).

$$\text{Resistencia} = C_D\rho AV^2/2 = 0{,}00618(0{,}1245)(3 \times 1{,}2)(1{,}2)^2/2 = 0{,}00200 \text{ kg}$$

(*c*) Para $x = 1{,}5$ m, $R_{E_x} = 1{,}2(1{,}5)/(1{,}47 \times 10^{-5}) = 122.500.$

Obsérvese que el número de Reynolds se ha calculado para $L = x$ m. Este valor del número de Reynolds se llama número de Reynolds local. Entonces,

$$\delta = \frac{5{,}20x}{\sqrt{R_{E_x}}} = \frac{(5{,}20)1{,}5}{\sqrt{122.500}} = 0{,}0222 \text{ m} = 22{,}2 \text{ mm}$$

Para $x = 3$ m, $R_E = 245.000$ y $\delta = \dfrac{5{,}20x}{\sqrt{R_{E_x}}} = \dfrac{5{,}20(3)}{\sqrt{245.000}} = 0{,}0315 \text{ m} = 31{,}5 \text{ mm}$

45. Una placa rectangular lisa de 1,2 m por 24 m se mueve a través de una masa de agua a 21° C en la dirección de su longitud. La resistencia sobre la placa (ambos lados) es de 820 kg. Determinar (*a*) la velocidad de la placa, (*b*) el espesor de la capa límite en el borde de salida y (*c*) la longitud x_c de la capa límite laminar si en el borde de ataque reinan las condiciones laminares.

Solución:

(*a*) Para la longitud de la placa y el fluido agua puede considerarse como buena la hipótesis de flujo turbulento. Del Diagrama *G*, se supone $C_D = 0{,}002$.

$$\text{Resistencia} = 2C_D\rho AV^2/2, \qquad 820 = C_D(102)(1{,}2 \times 24)V^2$$

y $$V^2 = \frac{0{,}278}{C_D} = \frac{0{,}278}{0{,}002}, \qquad V = 11{,}8 \text{ m/seg}$$

Número de Reynolds $R_E = 11{,}8(24)/(9{,}8 \times 10^{-7}) = 289 \times 10^6$. Por tanto, la capa límite es turt lenta, como se había supuesto. Haciendo una nueva aproximación,

$$C_D = \frac{0{,}455}{(\log 289 \times 10^6)^{2{,}58}} = 0{,}00186, \qquad V^2 = \frac{0{,}278}{0{,}00186} = 150, \qquad V = 12{,}2 \text{ m/seg}$$

Al calcular de nuevo el número de Reynolds, se obtiene 298×10^6; de aquí,

$$C_D = \frac{0{,}455}{(\log 298 \times 10^6)^{2{,}58}} = 0{,}00184, \quad \text{y} \quad V = 12{,}3 \text{ m/seg}$$

Este valor está dentro de la precisión esperada.

(*b*) El espesor de la capa límite, para flujo turbulento, se calcula mediante la ecuación (*15*).

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}22}{R_E^{0{,}167}} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{0{,}22(24)}{(298 \times 10^6)^{0{,}167}} = 0{,}204 \text{ m}$$

(*c*) Suponiendo que el número de Reynolds crítico es 500.000, aproximadamente, es decir, el límite inferi de la zona de transición,

$$R_{E_c} = \frac{Vx_c}{\nu}, \qquad 500.000 = \frac{12{,}3x_c}{9{,}8 \times 10^{-7}}, \qquad x_c = 0{,}04 \text{ m}$$

46. La placa de 3 m por 1,2 m del Problema 44 se mantiene sumergida en una corriente de 1,2 m/seg de agua a 10° C, paralelamente a su longitud. Suponiendo las condiciones laminares, en el borde de ataque de la placa, en la capa límite, (*a*) determinar la posición de paso de capa límite laminar a turbulenta, (*b*) calcular el espesor de la capa límite en el punto anterior, y (*c*) calcular la resistencia superficial sobre la placa.

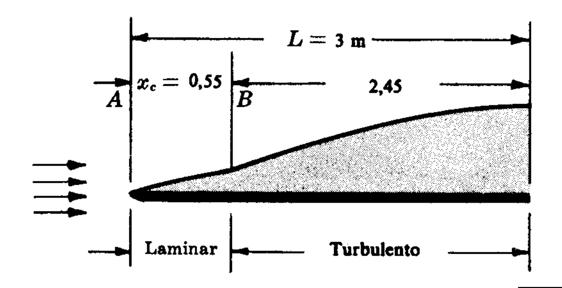


Fig. 11-17

Solución:

(*a*) Número de Reynolds $R_E = VL/\nu = 1{,}2(3)/(1{,}31 \times 10^{-6}) = 2.740.000$.

Este valor del número de Reynolds indica que el flujo en la capa límite está en la zona de transiciór Suponiendo que el valor crítico del número de Reynolds es igual a 500.000, la localización del punto en qu terminan las condiciones laminares puede calcularse mediante la relación

$$\frac{x_c}{L} = \frac{R_E \text{ crítico}}{R_E \text{ para toda la placa}} \qquad \text{o bien} \qquad x_c = 3\left(\frac{500.000}{2.740.000}\right) = 0{,}55 \text{ m}$$

(*b*) El espesor de la capa límite en este punto se evalúa mediante

$$\delta_c = \frac{5{,}20x_c}{\sqrt{R_{E_c}}} = \frac{5{,}20(0{,}55)}{\sqrt{500.000}} = 0{,}00405 \text{ m} = 4{,}05 \text{ mm}$$

(*c*) La resistencia superficial se calcula sumando a la resistencia producida por la zona de capa límite lámina que llega hasta x_c (véase Fig. 11-17), la resistencia a que da lugar la zona de capa límite turbulenta, de *B* a (Este último valor se determina calculando la resistencia como si toda la placa estuviera con capa límite tu bulenta y restando a continuación la resistencia producida por la capa límite turbulenta ficticia de *A* a

(1) Resistencia laminar, de *A* a *B*, sobre una de las caras

$$\text{Resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{1{,}328}{\sqrt{R_{E_c}}} \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{1{,}328}{\sqrt{500.000}}(102)(1{,}2 \times 0{,}55)\frac{1{,}2^2}{2} = 0{,}091 \text{ kg}$$

(2) Resistencia turbulenta, de A a C, si las condiciones fueran turbulentas en la longitud total de la placa.

$$\text{Resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} \quad \text{(sobre una de las caras)}$$

$$= \frac{0{,}074}{R_E^{0,20}} \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{0{,}074}{(2.740.000)^{0,20}}(102)(1{,}2 \times 0{,}55)\frac{1{,}2^2}{2} = 1{,}010 \text{ kg}$$

(3) Resistencia turbulenta ficticia, de A a B.

$$\text{Resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} \quad \text{(sobre una de las caras)}$$

$$= \frac{0{,}074}{R_{E_c}^{0,20}} \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{0{,}074}{(500.000)^{0,20}}(102)(1{,}2 \times 0{,}55)\frac{1{,}2^2}{2} = 0{,}260 \text{ kg}$$

Resistencia total (ambas caras) $= 2[0{,}091 + (1{,}010 - 0{,}260)] = 1{,}682$ kg

Si el número de Reynolds, para la placa entera, fuera superior a 10^7, habría que haber utilizado la ecuación (*13*) del principio del capítulo en la parte (2) anterior.

Podría, ahora, determinarse un valor medio C'_D para la placa entera, igualando la resistencia total anterior a la expresión que da la resistencia, como sigue.

$$\text{Resistencia total} = 2C'_D \rho A \frac{V^2}{2}, \qquad 1{,}682 = 2C'_D(102)(1{,}2 \times 3)\frac{1{,}2^2}{2}, \qquad C'_D = 0{,}00318$$

47. Una esfera de 15 cm de diámetro está inmersa en una corriente de aire a 20° C. Se midió la fuerza para mantener la esfera en reposo dando 0,114 kg. ¿Qué velocidad tenía la corriente de aire?

Solución:

Resistencia total $= C_D \rho A V^2/2$, donde C_D = coeficiente de resistencia global.

Como no pueden determinarse directamente ni el número de Reynolds ni C_D, se supone $C_D = 1{,}00$. Entonces,

$$0{,}114 = C_D(0{,}123)\tfrac{1}{4}\pi(0{,}15)^2(V^2/2), \qquad V^2 = \frac{105}{C_D}, \qquad V = 10{,}2 \text{ m/seg}$$

Se calcula, ahora, $R_E = \dfrac{Vd}{\nu} = \dfrac{10{,}2(0{,}15)}{1{,}488 \times 10^{-5}} = 103.000$. Del Diagrama F, $C_D = 0{,}59$ (para esferas).

Entonces, $V^2 = \dfrac{105}{0{,}59} = 178$, $V = 13{,}3$ m/seg. Anticipando el resultado, se ensaya $V = 13{,}6$ m/seg.

Se recalcula $R_E = \dfrac{Vd}{\nu} = \dfrac{13{,}6(0{,}15)}{1{,}488 \times 10^{-5}} = 137.500$. Del Diagrama F. $C_D = 0{,}56$.

De aquí, $V^2 = 105/0{,}56 = 188$, $V = 13{,}7$ m/seg (precisión satisfactoria).

48. Determinar el aumento de presión que se produce al cerrar instantáneamente una válvula en una tubería de transporte.

Solución:

Sea p' la variación de presión debida al cierre de la válvula. Al aplicar la ecuación del impulso-cantidad de movimiento, para obtener la variación de presión, se llega a

$$F_x = \frac{wQ}{g}(V_2 - V_1) \qquad \text{en la dirección } x \qquad (A)$$

Despreciando la influencia del rozamiento, la fuerza no equilibrada que produce el cambio en la cantidad de movimiento del líquido de la tubería será $p'A$. Entonces la ecuación (A) queda

$$-p'A = \frac{w(Ac)}{g}(0 - V_1) \qquad (B)$$

donde wAc/g representa la masa de líquido que ha cambiado su cantidad de movimiento y c es la celeridad de la onda de presión. Esta onda de presión reduce a cero la velocidad del fluido al pasar por cada una de las secciones. Así,

$$p' = \rho c V_1 \qquad (C)$$

La ecuación (C) puede escribirse en función de la altura de presión h', es decir,

$$h' = \frac{cV_1}{g} \qquad (D)$$

49. ¿Cuál es la fórmula que da la celeridad de la onda de presión producida por el cierre rápido de una válvula en una tubería de transporte, considerando la tubería rígida (no deformable)?

Solución:

Los términos «cierre rápido» o «cierre instantáneo» significan un tiempo de cierre de la válvula cualquiera, siempre que sea $\leq 2L/c$. Para obtener una expresión de la celeridad c se aplicarán los principios de la energía y de la cantidad de movimiento.

La energía cinética del agua se convierte por compresión en energía elástica. La energía cinética del agua es $MV_1^2/2 = (wAL/g)V_1^2/2$, donde A es el área de la sección recta de la tubería y L su longitud.

El módulo de elasticidad volumétrico del agua es $E_B = \dfrac{-\Delta p}{(\Delta \text{ volumen})/(\text{volumen original})}$ (kg/m²).

Por tanto, la reducción de volumen, Δ volumen $= \dfrac{(\text{volumen})(\Delta p)}{E_B} = \dfrac{(AL)(wh)}{E_B}$.

Trabajo de compresión = presión media por la reducción de volumen, es decir,

$$\tfrac{1}{2}(wAL/g)V_1^2 = \tfrac{1}{2}wh(ALwh/E_B) \qquad (A)$$

o
$$h^2 = V_1^2 E_B/gw \qquad (B)$$

Mediante el principio de la cantidad de movimiento (despreciando el rozamiento), se obtiene

$$MV_1 - \Sigma(F_x\,dt) = MV_2, \qquad -whA = (wQ/g)(0 - V_1), \qquad whA = (w/g)(Ac)V_1$$

o
$$h = cV_1/g \qquad (C)$$

Sustituyendo en (B), se llega a $c^2V_1^2/g^2 = V^2E_B/gw$, de la cual

$$c = \sqrt{E_B/\rho} \qquad (D)$$

50. Desarrollar una expresión que dé la celeridad de una onda de presión, debida al cierre rápido de una válvula en una tubería de transporte, considerando la tubería como deformable.

Solución:

En este caso hay que considerar la elasticidad de las paredes de la tubería, en adición a las magnitudes incluidas en la solución del problema precedente.

Para la tubería, el trabajo por la tracción de las paredes de la tubería es igual al producto de la fuerza media ejercida en las paredes de la tubería por la deformación. A partir del diagrama de cuerpo libre de la mitad de la sección recta de la tubería, sabiendo que $\Sigma Y = 0$, $2T = pdL = whdL$. Además, la deformación unitaria $\epsilon = \sigma/E$ donde $\sigma = pr/t = whr/t$. (Véase tensión en anillos o tubos de pared delgada en el Capítulo 2.) En esta deducción, la altura h representa la altura de presión sobre la normal de funcionamiento causada por el cierre rápido de la válvula.

$$\text{Trabajo} = \text{fuerza media} \times \text{deformación} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}whdL)(2\pi r\epsilon) \quad \text{en kgm}$$
$$= \tfrac{1}{4}whdL(2\pi r)(whr/tE)$$

Sumando este valor al de la ecuación (A) del problema anterior, se obtiene

$$\tfrac{1}{2}(wAL/g)V_1^2 = \tfrac{1}{2}wh(ALwh/E_B) + whdL(2\pi whr^2/tE)$$

que, después de sustituir $h = cV_1/g$, por (C) del Problema 49, da

$$\frac{V_1^2}{g} = \frac{c^2V_1^2}{g^2}\left(\frac{w}{E_B} + \frac{wd}{tE}\right)$$

$$\text{Celeridad } c = \sqrt{\frac{1}{\rho(1/E_B + d/Et)}} = \sqrt{\frac{E_B}{\rho(1 + E_B d/Et)}}$$

51. Determinar las celeridades de las ondas de presión que se propagan a lo largo de una tubería rígida que contiene (*a*) agua a 15° C, (*b*) glicerina a 20° C y (*c*) un aceite de Dr = 0,800. Utilizar, como valores del módulo de elasticidad volumétrico, de la glicerina y del aceite 44.350 y 14.100 kg/cm², respectivamente.

Solución:

$$c = \sqrt{\frac{\text{módulo de elasticidad volumétrico en kg/m}^2}{\text{densidad de fluido}}}$$

(*a*) $$c = \sqrt{\frac{22.000 \times 10^4}{102}} = 1470 \text{ m/seg}$$

(*b*) $$c = \sqrt{\frac{44.350 \times 10^4}{1{,}262 \times 1000/9{,}8}} = 1850 \text{ m/seg}$$

(*c*) $$c = \sqrt{\frac{14.100 \times 10^4}{0{,}800 \times 1000/9{,}8}} = 1310 \text{ m/seg}$$

52. En el Problema 51, si los líquidos fluyeran por una tubería de 30 cm de diámetro a 1,2 m/seg y fueran frenados instantáneamente, ¿qué aumento de presión podría esperarse, suponiendo la tubería rígida?

Solución:

Aumento de presión = ρc × variación de la velocidad

(*a*) Aumento de presión = 102(1470)(1,2 − 0) = 180.000 kg/m² = 18,0 kg/cm².

(*b*) Aumento de presión = 129(1850)(1,2) = 286.000 kg/m² = 28,6 kg/cm².

(*c*) Aumento de presión = 82(1310)(1,2) = 129.000 kg/m² = 12,9 kg/cm².

53. Una tubería de acero de 120 cm de diámetro y paredes de 9,5 mm de espesor transporta agua a 15° C y a una velocidad de 1,8 m/seg. Si el tramo de tubería tiene una longitud de 3000 m y una válvula existente en el extremo de descarga se cierra en 2,50 seg, ¿qué aumento en la tensión de las paredes de la tubería puede esperarse?

Solución:

La onda de presión se propagará desde la válvula hasta la embocadura de la tubería, retrocediendo de nuevo hasta la válvula en un

$$\text{Tiempo} = 2\left(\frac{\text{longitud de la tubería}}{\text{celeridad de la onda de presión}}\right)$$

La celeridad de la onda de presión, para una tubería deformable, viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{E_B \ (\text{kg/m}^2)}{\rho[1 + (E_B/E)(d/t)]}}$$

donde las dos relaciones del denominador son adimensionales al utilizar unidades acordes.

Tomando para el acero $E = 2{,}10 \times 10^6$ kg/cm², $$c = \sqrt{\frac{22.000 \times 10^4}{102\left[1 + \dfrac{22.000}{2{,}10 \times 10^6}\left(\dfrac{120}{0{,}95}\right)\right]}} = 964 \text{ m/seg}$$

y tiempo = 2(3000/964) = 6,22 seg.

Como el tiempo de cierre de la válvula es de 2,50 seg, es equivalente a un *cierre instantáneo*, ya que el tiempo de recorrido de ida y vuelta de la onda de presión es superior al tiempo de cierre.

Aumento de presión = $\rho c(dV)$ = 102(964)(1,8) = 176.990 kg/m² = 17,70 kg/cm².

Por la fórmula que da la tensión en anillos de pared delgada,

$$\text{Tensión de tracción } \sigma = \frac{\text{presión} \times \text{radio}}{\text{espesor}} = \frac{17{,}70 \times 60}{0{,}95} = 1120 \text{ kg/cm}^2 \text{ de aumento}$$

Este aumento de la tensión añadido al valor de diseño de 1130 kg/cm^2 hace que el valor final se aproxime al del límite elástico del acero. La duración del cierre de la válvula debería aumentarse al menos a 6,50 seg, aunque es preferible hacerlo varias veces mayor que los 6,35 seg calculados.

Para el cierre lento de válvulas, cuando el tiempo de cierre es mayor que $2L/c$, Norman R. Gibson ha sugerido un método de integración aritmética. En caso necesario, puede consultarse el volumen 83 de las «Transactions of the American Society of Civil Engineers» de 1919.

54. En una tubería de 7,5 cm que transporta glicerina a 20° C se efectúa el cierre rápido de una válvula. El aumento de presión es de 7,0 kg/cm^2. ¿Cuál es el caudal probable en l/seg? Utilizar $\rho = 129$ UTM/m^3 y $E_B = 44.350$ kg/cm^2.

Solución:

El valor de la celeridad, igual a 1850 m/seg, se ha calculado ya en el Problema 51.

Aumento de presión = ρc × variación de la velocidad

$$7{,}0 \times 10^4 = 129(1850)V, \quad \text{de donde} \quad V = 0{,}293 \text{ m/seg.}$$

Por tanto, $Q = AV = \frac{1}{4}\pi(0{,}075)^2 \times 0{,}293 \times 10^3 = 1{,}29$ l/seg.

55. A través de un conducto de ventilación de sección cuadrada de 1,5 m de lado circula aire a una velocidad de 6,0 m/seg y 27° C. Si los dispositivos de control se cierran rápidamente, ¿qué fuerza se ejercerá sobre la superficie de cierre de 1,5 m por 1,5 m?

Solución:

Para aire a 27° C, $\rho = 120$ UTM/m^3 y la celeridad

$$c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1{,}4(9{,}8)(29{,}3)(273 + 27)} = 347{,}5 \text{ m/seg.}$$

Utilizando ahora $\Delta p = \rho c V$, la fuerza

$$F = \Delta p \times \text{área} = (\rho c V)A = 0{,}120(347{,}5)(6)(1{,}5 \times 1{,}5) = 563 \text{ kg}$$

56. Un transmisor de sonar opera a 2 impulsos por segundo. Si el dispositivo se mantiene en la superficie libre de agua dulce a 2° C y el eco se recibe en la mitad entre la emisión de dos impulsos, ¿qué profundidad tiene el agua? (Se sabe que la profundidad es menor de 600 m.)

Solución:

La celeridad de la onda sonora en el agua a 2° C se calcula mediante

$$c = \sqrt{\frac{\text{mód. volumétrico de elasticidad}}{\text{densidad de fluido}}} = \sqrt{\frac{20.830 \times 10^4}{102}} = 1430 \text{ m/seg}$$

(*a*) La distancia recorrida por la onda sonora (hasta llegar al fondo y volver a la superficie) en $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ seg, o sea, en $\frac{1}{4}$ seg, (la mitad entre dos impulsos) es

$$2 \times \text{profundidad} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$
$$= 1430 \times \tfrac{1}{4} \quad \text{y} \quad \text{profundidad} = 179 \text{ m (mínima profundidad)}$$

(*b*) Si la profundidad excediera de 179 m, para que el eco se oiga entre dos impulsos (en su punto medio), la onda sonora habrá viajado 3/2 de 1/2 seg, o sea, 3/4 seg. Entonces,

$$\text{profundidad} = \tfrac{1}{2}(1430) \times \tfrac{3}{4} = 537 \text{ m}$$

(c) Para profundidades mayores de 600 m se obtendría

$$\text{profundidad} = \tfrac{1}{2}(1430) \times \tfrac{5}{4} = 895 \text{ m}$$
$$\text{profundidad} = \tfrac{1}{2}(1430) \times \tfrac{7}{4} = 1253 \text{ m, y así sucesivamente}$$

57. Un proyectil se mueve a 660 m/seg a través de aire en reposo a 38° C y 1,02 kg/cm² (ab). Determinar (*a*) el número de Mach, (*b*) el ángulo de Mach y (*c*) la resistencia para la forma *B* del Diagrama *H*, suponiendo que el diámetro es igual a 20 cm.

Solución:

(*a*) Celeridad $c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1{,}4(9{,}8)(29{,}3)(273 + 38)} = 354$ m/seg.

$$\text{Número de Mach } N_M = \frac{V}{c} = \frac{660}{354} = 1{,}86$$

(*b*) Angulo de Mach $\alpha = \text{arc sen } \dfrac{1}{N_M} = \text{arc sen } \dfrac{1}{1{,}86} = 32{,}5°$.

(*c*) Del Diagrama *H*, forma *B*, para un número de Mach de 1,86, $C_D = 0{,}60$.

El peso específico del aire será $w = \dfrac{p}{RT} = \dfrac{1{,}02 \times 10^4}{29{,}3(273 + 38)} = 1{,}1193$ kg/m³.

$$\text{Resistencia} = C_D \rho A V^2/2 = 0{,}60(1{,}1193/9{,}8) \times \tfrac{1}{4}\pi(0{,}20)^2 \times (660)^2/2 = 468 \text{ kg.}$$

58. El ángulo de Mach, medido en una fotografía del proyectil moviéndose en el aire, fue de 40°. Calcular la velocidad del proyectil, para el aire en las condiciones del problema anterior. (Celeridad $c = 354$ m/seg.)

Solución:

$$\text{Sen } \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{N_M}. \quad \text{Luego sen } 40° = \frac{354}{V} \text{ y } V = 550 \text{ m/seg.}$$

59. ¿Qué diámetro debería tener una esfera, de densidad relativa 2,50, para que en caída libre la velocidad límite fuera la velocidad de propagación del sonido? Utilizar $\rho = 0{,}1245$ UTM/m³.

Solución:

Para la caída libre de un cuerpo, cuando se alcance la velocidad límite, resistencia − peso = 0 y, del Diagrama *H*, $C_D = 0{,}80$.

Para el aire a 15° C, $c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1{,}4(9{,}8)(29{,}3)(273 + 15)} = 340$ m/seg.

Como Peso = resistencia

$$(2{,}50 \times 1000)(4\pi/3)(d/2)^3 = 0{,}80(0{,}1245)(\pi d^2/4)(340)^2/2, \qquad d = 3{,}45 \text{ m}$$

Problemas propuestos

60. Demostrar que el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento en el Problema 74 del Capítulo 6 es 1,20.

61. Demostrar que el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento en el Problema 72 del Capítulo 7 es 1,02.

62. Determinar el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento para el Problema 79 del Capítulo 6.

Sol. $\dfrac{(K+1)^2(K+2)^2}{2(2K+1)(2K+2)}$

63. Demostrar que el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento en el Problema 59 del Capítulo 7 es 1,12.

64. Un chorro de aceite de 5 cm de diámetro choca contra una placa plana mantenida en posición normal al eje del chorro. Para una velocidad del chorro de 25 m/seg, calcular la fuerza ejercida sobre la placa por el aceite, de densidad relativa 0,85. *Sol.* 106 kg

65. En el Problema 64, si la placa se mueve en la misma dirección y sentido que el chorro a una velocidad de 9 m/seg, ¿qué fuerza ejercerá el aceite sobre la placa? Si la velocidad de 9 m/seg tiene sentido opuesto al del chorro, ¿qué valor tendría la fuerza anterior? *Sol.* 44 kg, 197 kg

66. Un chorro de agua de 5 cm de diámetro ejerce una fuerza de 270 kg sobre una placa plana mantenida normalmente a la trayectoria del chorro. ¿Cuál es el caudal de desagüe del chorro? *Sol.* 72 l/seg

67. Un chorro de agua con un caudal de 35 l/seg incide sobre una placa plana mantenida normalmente al eje del chorro. Si la fuerza ejercida sobre la placa es de 75 kg, calcular el diámetro del chorro. *Sol.* 4,6 cm

68. Un chorro de agua de 5 cm de diámetro incide sobre un álabe curvo en reposo que desvía el chorro 135° respecto de su dirección y sentido originales. Despreciando el rozamiento a lo largo del álabe, determinar la fuerza resultante ejercida sobre el álabe si la velocidad del chorro es de 28 m/seg. *Sol.* 290 kg, $\theta_x = -22{,}5°$

69. Si en el problema precedente el álabe se mueve en la misma dirección y sentido contrario al del chorro de agua, a una velocidad de 6 m/seg, ¿cuál es la fuerza ejercida sobre el álabe y cuál la potencia requerida para mantener el movimiento? *Sol.* 428, 31,6 CV

70. Un álabe fijo desvía 180° un chorro de agua de 5 cm de diámetro y que se mueve a una velocidad de 35 m/seg. ¿Qué fuerza ejerce el álabe sobre el agua? *Sol.* 492 kg

71. Una tubería horizontal de 30 cm de diámetro se contrae a 15 cm de diámetro. Si el caudal es de 130 l/seg de un aceite de densidad relativa 0,88 y la presión en la tubería de diámetro menor es de 2,70 kg/cm², ¿cuál es la fuerza resultante ejercida sobre la contracción si se desprecia el rozamiento? *Sol.* 1525 kg

72. Por un codo reductor vertical (véase Fig. 11-18) circulan 350 l/seg de un aceite, Dr = 0,85, con una presión a la entrada del codo en A de 1,40 kg/cm². El diámetro en A es de 40 cm y en B de 30 cm y el volumen entre A y B de 0,10 m³. Despreciando el rozamiento, determinar la fuerza sobre el codo.
Sol. 2220 kg, $\theta_x = -76{,}2°$

73. El modelo de una lancha motora es movido a 450 m/seg mediante un chorro de agua de 25 mm de diámetro, expulsado directamente por la popa. La velocidad del chorro con relación al modelo es de 36 m/seg. ¿Cuál es la fuerza motora? *Sol.* 50 kg

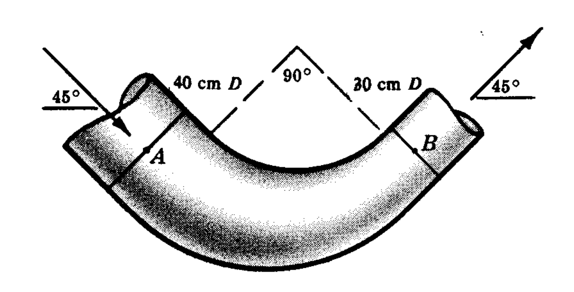


Fig. 11-18

74. Una boquilla de 5 cm de diámetro, $c_v = 0{,}97$, descarga un chorro horizontal de aceite, Dr = 0,80, por la pared lateral de un depósito, bajo una carga de 12 m. ¿Qué fuerza horizontal se ejerce sobre el depósito? *Sol.* 35,5 kg

75. El globo de un niño, de peso 0,10 kg, está lleno de aire, $\rho = 0{,}132$ UTM/m³. El tubo de llenado, de 6 mm de diámetro, se dirige hacia abajo al mismo tiempo que se abre. Si el caudal con que inicialmente se vacía es de 8 l/seg, ¿qué valor tiene la aceleración instantánea si se desprecia el rozamiento? *Sol.* 19,5 m/seg²

76. Una lancha accionada por un dispositivo de propulsión a chorro se mueve hacia aguas arriba en un río con una velocidad absoluta de 8,60 m/seg. La corriente del río es de 2,30 m/seg. El chorro de agua que arroja el dispositivo tiene una velocidad de 18,0 m/seg respecto de la lancha. Si el caudal del chorro es de 1400 l/seg, ¿qué empuje desarrolla el dispositivo de propulsión? *Sol.* 1015 kg

77. ¿Qué peso sustentará un ala de avión de 50 m^2 con un ángulo de ataque de 4° y una velocidad de 30 m/seg? Utilizar $C_L = 0{,}65$ y aire a 15° C. *Sol.* 1830 kg

78. ¿A qué velocidad vuela un avión que pesa 2700 kg si la superficie de sus alas es de 50 m^2 y el ángulo de ataque 8°? Utilizar $C_L = 0{,}90$. *Sol.* 31,0 m/seg

79. ¿Qué superficie de ala debe tener un avión que pesa 900 kg para que pueda aterrizar a una velocidad de 56 km/h? Utilizar el valor máximo de $C_L = 1{,}50$. *Sol.* 39,7 m^2

80. Si la resistencia sobre un ala de avión de 30 m^2 de superficie es de 310 kg, ¿a qué velocidad debe moverse el perfil con un ángulo de ataque de 7°? Utilizar $C_D = 0{,}05$. *Sol.* 58 m/seg

81. Sobre el plano de una señal de tráfico de 3,60 m por 0,60 m incide el viento a una velocidad de 46 km/h y con un ángulo de 8°. Utilizando los valores $C_L = 0{,}52$ y $C_D = 0{,}09$, calcular (*a*) la fuerza ejercida sobre la señal perpendicularmente a la dirección del viento y (*b*) la fuerza ejercida paralelamente a la dirección del viento. Suponer aire normal a 15° C. *Sol.* 11,5 kg, 2,0 kg

82. Demostrar que para un ángulo de ataque dado la resistencia sobre un perfil de ala es la misma para cualquier altitud. (Para un ángulo de ataque determinado, C_D no varía con la altitud.)

83. Un modelo de ala de avión de 1,00 m de alargamiento (longitud) y 10 cm de cuerda se ensaya en el túnel aerodinámico con un ángulo de ataque constante. El aire a presión normal y 27° C circula a 100 km/h. La sustentación y resistencia medidas son, respectivamente, 2,80 kg y 0,23 kg. Determinar los coeficientes de sustentación y resistencia. *Sol.* 0,605, 0,050

84. Calcular el número de Mach para (*a*) un avión que se mueve a una velocidad de 480 km/h, (*b*) un cohete que va a 3840 km/h y (*c*) un proyectil cuya velocidad es de 1920 km/h. Los tres se mueven a través de aire normal a 20° C. *Sol.* 0,388, 3,106, 1,553

85. Un motor turborreactor toma por el difusor de entrada 20 kg/seg de aire cuando se mueve a una velocidad de 210 m/seg. Si el empuje desarrollado es de 1220 kg cuando la velocidad de eyección de los gases es de 750 m/seg, ¿cuál es el peso del combustible consumido por segundo? *Sol.* 1,28 kg/seg

86. Por el conducto de entrada de un motor a reacción penetra el aire a la presión atmosférica y a una velocidad de 150 m/seg. El combustible se quema en el motor a razón de 1 parte por 50 partes de aire entrante en peso. El área de la sección de entrada es de 1550 cm^2 y la densidad del aire 0,126 UTM/m^3. Si la velocidad de eyección de los gases es de 1500 m/seg y la presión la atmosférica, ¿qué empuje desarrolla el motor? *Sol.* 4045 kg

87. Un automóvil tiene un área proyectada de 3,20 m^2 y se mueve a una velocidad de 80 km/h en aire en reposo a 27° C. Si $C_D = 0{,}45$, ¿qué potencia se consume para vencer la resistencia? *Sol.* 12,6 CV

88. Un tren de 150 m de longitud se mueve a través de aire normal a 15° C a una velocidad de 120 km/h. Se consideran los 1500 m^2 de superficie del tren como si pertenecieran a una placa plana. Para una capa límite turbulenta desde el borde de ataque, ¿cuál es la resistencia superficial debida a la fricción? *Sol.* 187 kg

89. Un cilindro de 60 cm de diámetro y 4,5 m de longitud se mueve a 50 km/h a través de agua a 15° C (paralelamente a su longitud). ¿Cuál es el coeficiente de resistencia si la resistencia superficial es de 165 kg? *Sol.* $C_D = 0{,}002$

90. Calcular la resistencia superficial debida al rozamiento sobre una placa plana de 30 cm de anchura y 90 cm de longitud, colocada longitudinalmente (*a*) en una corriente de agua a 21° C que fluye a una velocidad de 30 cm/seg y (*b*) en una corriente de un fuel-oil pesado a 21° C y una velocidad de 30 cm/seg. *Sol.* 0,0064 kg, 0,0696 kg

91. Un globo de 1,20 m de diámetro, que pesa 1,80 kg, está sometido a un empuje hidrostático medio de 2,25 kg. Utilizando $\rho = 0{,}120$ UTM/m^3 y $\nu = 1{,}58 \times 10^{-5}$ m^2/seg, evaluar la velocidad con que ascenderá. *Sol.* 6,07 m/seg

92. Calcular la velocidad límite a que caerá un grano de granizo de 13 mm de diámetro si la temperatura del aire es igual a 4,5° C y la densidad relativa del granizo 0,90. *Sol.* 16,5 m/seg

93. Un objeto que tiene un área proyectada de 0,60 m^2 se mueve a una velocidad de 50 km/h. Si el coeficiente de resistencia es de 0,30, calcular la resistencia al moverse a través de agua a 15° C y a través de aire normal a 15° C. *Sol.* 1770 kg, 2,16 kg

94. Un cuerpo se mueve a través de aire normal a 15° C a una velocidad de 80 km/h y para mantener esta velocidad se requiere una potencia de 5,5 CV. Si el área proyectada es de 1,20 m^2, determinar el coeficiente de resistencia. *Sol.* 0,503

95. Una placa rectangular lisa de 0,60 m de anchura por 24,0 m de longitud se mueve a una velocidad de 12,0 m/seg en la dirección de su longitud a través de una masa de aceite. Calcular la resistencia sobre la placa y el espesor de la capa límite en el borde de salida. ¿Sobre qué longitud de la placa se mantiene la capa límite laminar? Utilizar la viscosidad cinemática = $1{,}49 \times 10^{-5}$ m^2/seg y w = 850 kg/m^3. *Sol.* 471 kg, 0,321 m, 0,622 m

96. Suponiendo rígida una tubería de acero de 60 cm, ¿qué aumento de presión tiene lugar cuando se frena instantáneamente un flujo de 560 l/seg de aceite, de densidad relativa 0,85 y módulo de elasticidad volumétrico 17.500 kg/cm^2? *Sol.* 24,4 kg/cm^2

97. Si la tubería del Problema 96 tiene 2400 m de longitud, ¿qué tiempo debe durar la operación de cierre de una válvula para evitar el golpe de ariete? *Sol.* Más de 3,38 seg

98. Si una tubería de 60 cm de diámetro y 2400 m de longitud se ha diseñado para una tensión de trabajo de 1050 kg/cm^2, bajo una presión estática máxima de 325 m de agua, ¿cuál será el aumento de tensión en las paredes de la tubería por el cierre instantáneo de una válvula que frena un flujo de 840 l/seg? (E_B = 21.000 kg/cm^2.) *Sol.* 33,90 kg/cm^2

99. Calcular el ángulo de Mach para una bala que lleva una velocidad de 510 m/seg a través del aire a 1,033 kg/cm^2 y 15° C. *Sol.* 41°51′

100. ¿Cuál es el valor de la resistencia de un proyectil (forma *A*, Diagrama *H*) de 100 mm de calibre cuando lleva una velocidad de 570 m/seg a través del aire a 10° C y 1,033 kg/cm^2? *Sol.* 84,3 kg

Capítulo 12

Maquinaria hidráulica

MAQUINARIA HIDRAULICA

Se dan aquí unas consideraciones sobre los principios fundamentales en que se basa el diseño de bombas, soplantes, turbinas y hélices. Las bases esenciales son los principios del impulso-cantidad de movimiento (Capítulo 11) y del vórtice forzado (Capítulo 4), y las leyes de semejanza (Capítulo 5). Las modernas turbinas hidráulicas y bombas centrífugas son máquinas de gran rendimiento con pocas diferencias en sus características. Para cada diseño hay una relación definida entre la velocidad de giro N, el gasto o caudal Q, la altura de carga H, el diámetro D del rodete y la potencia P.

EN EL CASO DE RODETES, el par y la potencia producida vienen definidos por

$$\text{Par } T \text{ en mkg} = \frac{wQ}{g}(V_2 r_2 \cos \alpha_2 - V_1 r_1 \cos \alpha_1) \qquad (1)$$

y

$$\text{Potencia } P \text{ en mkg/seg} = \frac{wQ}{g}(V_2 u_2 \cos \alpha_2 - V_1 u_1 \cos \alpha_1) \qquad (2)$$

El desarrollo y notación se explican en el Problema 1.

RUEDAS HIDRAULICAS, BOMBAS Y SOPLANTES

Estas máquinas tienen un cierto número de constantes que, comúnmente, se determinan. En el Problema 5 se dan detalles.

1. *El factor de velocidad* ϕ se define como

$$\phi = \frac{\text{velocidad periférica del rodete}}{\sqrt{2gH}} = \frac{u}{\sqrt{2gH}} \qquad (3)$$

donde u = radio del rodete en m × velocidad angular en radianes/seg = $r\omega$ m/seg.

Este factor se expresa también de la forma

$$\phi = \frac{\text{diámetro en cm} \times \text{rpm}}{8460\sqrt{H}} = \frac{D_1 N}{8460\sqrt{H}} \qquad (4)$$

2*a*. *La relación de velocidad* puede expresarse así

$$\frac{\text{diámetro } D \text{ en m} \times \text{velocidad } N \text{ en rpm}}{\sqrt{g \times \text{altura } H \text{ en m}}} = \text{constante } C_N' \qquad (5a)$$

También

$$H = \frac{D^2 N^2}{C_N^2} \qquad (5b)$$

en donde g se engloba en el coeficiente C_N

2*b*. *La velocidad unitaria* se define como la velocidad de un rodete geométricamente semejante (homólogo) que tiene un diámetro de 1 cm, operando bajo una altura de 1 m. Esta velocidad unida (N_u en rpm) se expresa normalmente en función de D_1 en cm y N en rpm. Así, pues,

$$N_u = \frac{D \text{ en cm} \times \text{rpm}}{\sqrt{H}} = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} \qquad (6a)$$

También $$N = N_u \frac{\sqrt{H}}{D_1} \qquad (6b)$$

3*a*. *La relación de caudal* puede expresarse de la forma

$$\frac{\text{caudal } Q \text{ en m}^3/\text{seg}}{(\text{diámetro } D \text{ en m})^2 \sqrt{\text{altura } H \text{ en m}}} = \text{constante } C_Q \qquad (7a)$$

También $$Q = C_Q D^2 \sqrt{H} = C_Q D^2 (\frac{DN}{C_N}) = C'_Q D^3 N \qquad (7b)$$

El coeficiente C_Q puede expresarse también tomando como unidad de caudal l/min. Al tomar estos coeficientes de textos o manuales, las unidades deberán comprobarse para no incurrir en errores.

Si C_Q es igual para dos unidades homólogas, entonces C_N, C_P y el rendimiento serán los mismos, salvo en el caso de fluidos muy viscosos.

3*b*. *El caudal unitario* se define como el caudal de un rodete homólogo de 1 cm de diámetro, operando bajo una altura de 1 m. El caudal unitario Q_u en m³/seg se escribe de la forma

$$Q_u = \frac{\text{caudal } Q \text{ en m}^3/\text{seg}}{(\text{diámetro } D \text{ en cm})^2 \sqrt{\text{altura } H \text{ en m}}} = \frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}} \qquad (8a)$$

También $$Q = Q_u D_1^2 \sqrt{H} \qquad (8b)$$

4*a*. *La relación de potencia*, obtenida al emplear los valores de Q y H en las ecuaciones (7*b*) y (5*a*) es

$$\text{Potencia en CV } P = \frac{wQH}{75e} = \frac{w(C_Q D^2 \sqrt{H})H}{75e} = C_P D^2 H^{3/2} \qquad (9a)$$

También $$P = \frac{w(C'_Q D^3 N)}{75e} \times \frac{D^2 N^2}{g(C'_N)^2} = C'_P \rho D^5 N^3 \qquad (9b)$$

4*b*. *La potencia unitaria* se define como la potencia desarrollada por un rodete homólogo de 1 cm de diámetro, operando bajo una altura de 1 m. La potencia unitaria P_u es

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} \quad \text{y} \quad P = P_u D_1^2 H^{3/2} \qquad (10)$$

VELOCIDAD ESPECIFICA

La velocidad específica se define como la velocidad de un rodete con un diámetro tal que desarrolla 1 caballo de vapor de potencia para una altura de 1 m (véase Problema 5). La velocidad específica N_S puede expresarse de las dos siguientes formas:

1. *Para turbinas*:

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{\sqrt{\rho}(gH)^{5/4}}, \text{ que representa la ecuación general.} \qquad (11a)$$

también $$N_S = N_u \sqrt{P_u} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \text{ de corriente aplicación en turbinas de agua.} \qquad (11b)$$

2. *Para bombas y soplantes*:

$$N_S = \frac{N\sqrt{Q}}{(gH)^{3/4}} \text{ representa la ecuación general.} \qquad (12a)$$

También

$$N_S = N_u\sqrt{Q_u} = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \text{ de corriente aplicación.} \qquad (12b)$$

RENDIMIENTO

El rendimiento se expresa como una relación adimensional. Varía con la velocidad y el caudal.

Para turbinas, rendimiento total $e = \dfrac{\text{potencia en el eje}}{\text{potencia suministrada por el agua}}$ $\qquad (13)$

rendimiento hidráulico $e_h = \dfrac{\text{potencia utilizada}}{\text{potencia suministrada por el agua}}$

Para bombas, rendimiento $e = \dfrac{\text{potencia a la salida}}{\text{potencia a la entrada}} = \dfrac{wQH}{\text{potencia a la entrada}}$ $\qquad (14)$

CAVITACION

La cavitación causa la destrucción rápida del metal constituyente de los rodetes de las bombas y turbinas, de los álabes, de los venturímetros y, en ocasiones, de las tuberías. Esto sucede cuando la presión del líquido se hace menor que su tensión de vapor. Se remite al lector a obras tales como *Engineering Hydraulics*, Actas de la Cuarta Conferencia de Hidráulica, para una ampliación de este tema concreto.

PROPULSION POR HELICES

La propulsión por hélices ha sido durante mucho tiempo la potencia motriz de aviones y barcos. Por otra parte, las hélices se han empleado como ventiladores y como medios para producir potencia a partir del viento. El diseño de hélices no se aborda aquí, pero se dan las importantes expresiones en mecánica de fluidos del empuje y potencia. Tales expresiones, desarrolladas en el Problema 23, son:

Empuje $F = \dfrac{wQ}{g}(V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}})$ en kg $\qquad (15)$

Potencia a la salida $P_0 = \dfrac{wQ}{g}(V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}})\,V_{\text{inicial}}$ en kg/seg $\qquad (16)$

Potencia a la entrada $P_i = \dfrac{wQ}{g}\left(\dfrac{V_{\text{final}}^2 - V_{\text{inicial}}^2}{2}\right)$ $\qquad (17)$

Rendimiento $e = \dfrac{\text{potencia a la salida}}{\text{potencia a la entrada}} = \dfrac{2V_{\text{inicial}}}{V_{\text{final}} + V_{\text{inicial}}}$ $\qquad (18)$

LOS COEFICIENTES DE LA HELICE se refieren al empuje, al par y a la potencia. Pueden expresarse de la forma siguiente:

Coeficiente de empuje $C_F = \dfrac{\text{empuje } F \text{ en kg}}{\rho N^2 D^4}$ $\qquad (19)$

Valores altos de C_F producen una buena propulsión,

Coeficiente de par $C_T = \dfrac{\text{par } T \text{ en m kg}}{\rho N^2 D^5}$ $\qquad (20)$

Valores altos de C_T son normales en turbinas y molinos de viento.

$$\text{Coeficiente de potencia } C_P = \frac{\text{potencia } P \text{ en kg m/seg}}{\rho N^3 D^5} \qquad (21)$$

Este último coeficiente tiene la misma forma que en la ecuación *(9b)* anterior.

Estos tres coeficientes son adimensionales si N se expresa en revoluciones por segundo.

Problemas resueltos

1. Determinar el par y la potencia desarrollados por un rodete (tal como el de una bomba o turbina) en condiciones de flujo permanente.

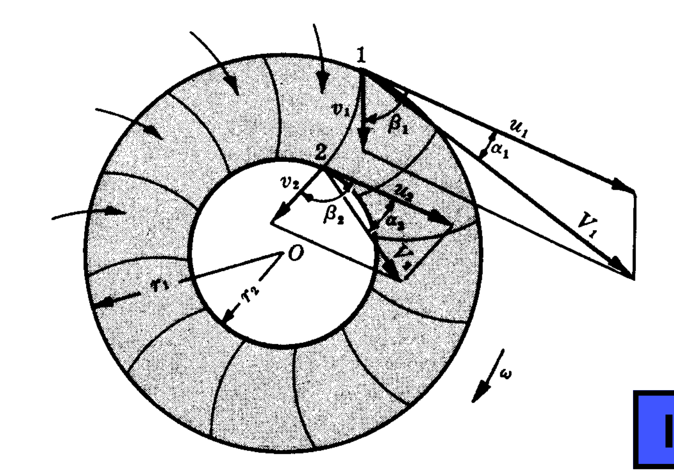


Fig. 12-1

Solución:

La Fig. 12-1 representa un rodete formado por canales curvos por los que el agua entra por el lado de radio r_1 y sale por el lado de radio r_2. Las velocidades relativas del agua con respecto a un álabe se representan por v_1 entrando por (1) y por v_2 saliendo por (2). La velocidad lineal del álabe es u_1 en (1) y u_2 en (2). Los diagramas vectoriales indican las velocidades absolutas del agua (V_1 y V_2).

Para la masa elemental de agua que pasa en *dt* segundos, la variación del momento de la cantidad de movimiento se origina por el momento cinético ejercido por el rodete. Es decir,

momento de la cantidad de movimiento inicial + momento cinético = momento de la cantidad de movimiento final

o
$$(dM)V_1 \times r_1 \cos\alpha_1 + \text{par} \times dt = (dM)V_2 \times r_2 \cos\alpha_2$$

Pero $dM = (w/g)Q\,dt$. Sustituyendo y despejando el par ejercido sobre el agua, obtenemos

$$\text{par } T = \frac{w}{g}Q(V_2 r_2 \cos\alpha_2 - V_1 r_1 \cos\alpha_1)$$

Por consiguiente, el par ejercido por el fluido sobre el rodete es

$$T = \frac{w}{g}Q(V_1 r_1 \cos\alpha_1 - V_2 r_2 \cos\alpha_2) \quad \text{en kg m}$$

La potencia es igual al par por la velocidad angular. Luego

$$P = T\omega = \frac{w}{g}Q(V_1 r_1 \cos\alpha_1 - V_2 r_2 \cos\alpha_2)\omega$$

Puesto que $u_1 = r_1\omega$ y $u_2 = r_2\omega$, la expresión se transforma en

$$P = \frac{w}{g}Q(V_1 u_1 \cos\alpha_1 - V_2 u_2 \cos\alpha_2) \quad \text{en kg m/seg} \qquad (1)$$

Las expresiones desarrolladas aquí son aplicables tanto a las bombas como a las turbinas. El punto importante es que, en el desarrollo, el punto (1) estaba *aguas arriba* y el (2), *aguas abajo*.

2. Establecer la ecuación de Bernoulli para un rodete de turbina.

Solución:

Escribiendo la ecuación de Bernoulli entre los puntos (1) y (2) en la figura del Problema 1, obtenemos

$$\left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{w} + z_1\right) - H_T - \text{pérdida de carga } H_L = \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{w} + z_2\right)$$

Del diagrama vectorial del Problema 1

$$V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 \cos\beta_1$$

y

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 \cos\beta_2$$

Por otra parte, haciendo $V_1 \cos\alpha_1 = a_1$ y $V_2 \cos\alpha_2 = a_2$, podemos calcular a partir del diagrama vectorial

$$a_1 = u_1 + v_1 \cos\beta_1 \qquad \text{y} \qquad a_2 = u_2 + v_2 \cos\beta_2$$

Además,

$$H_T \text{ m kg/kg} = \frac{wQ}{g}(V_1 u_1 \cos\alpha_1 - V_2 u_2 \cos\alpha_2) : wQ$$

$$= \frac{1}{g}(u_1 V_1 \cos\alpha_1 - u_2 V_2 \cos\alpha_2) \qquad (1)$$

Los términos de altura de velocidad y altura de carga de la turbina en la ecuación de Bernoulli anterior serían entonces

$$\frac{u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 \cos\beta_1}{2g}, \quad \frac{2(u_1 a_1 - u_2 a_2)}{2g}, \quad \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 \cos\beta_2}{2g}$$

Simplificando e incorporando estos términos en la ecuación de Bernoulli, se obtiene

$$\left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{w} + z_1\right) + \frac{u_2^2}{2g} - H_L = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{w} + z_2\right)$$

o

$$\left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{w} + z_1\right) - \left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}\right) - H_L = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{w} + z_2\right) \qquad (2)$$

en donde las velocidades v son valores relativos y el término en el segundo paréntesis se designa como altura de carga creada por el vórtice forzado o altura de carga centrífuga.

3. Una turbina gira a 100 rpm y desagua 0,810 m³/seg. La altura de presión a la salida es 0,30 m y el rendimiento hidráulico en estas condiciones es del 78,5 %. Los datos físicos son: $r_1 = 0{,}45$ m, $r_2 = 0{,}21$ m, $\alpha_1 = 15°$, $\beta_2 = 135°$, $A_1 = 0{,}115$ m², $A_2 = 0{,}075$ m², $z_1 = z_2$. Suponiendo una pérdida de carga de 1,20 m, determinar (*a*) la potencia dada a la turbina, (*b*) la altura de carga total disponible y la altura de carga utilizada y (*c*) la presión a la entrada.

Solución:

(*a*) Antes de sustituir en la ecuación de potencia [ecuación (*1*) del Problema 1] deben hacerse cálculos preliminares.

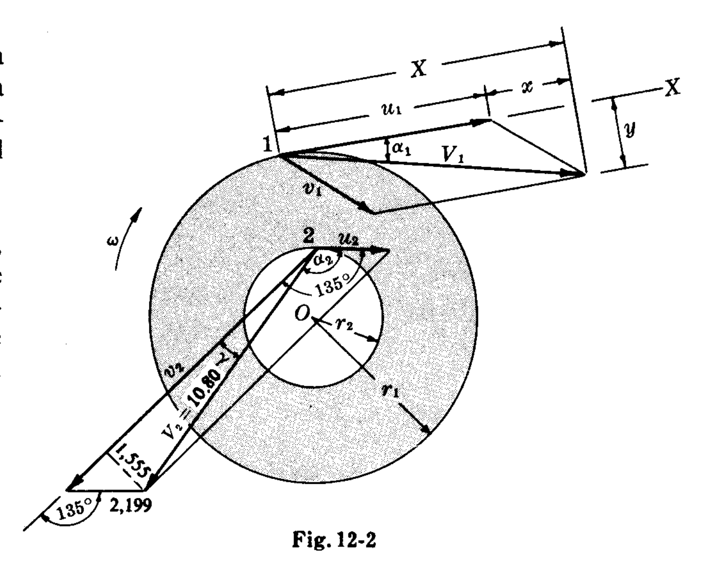


Fig. 12-2

$V_1 = Q/A_1 = 0{,}810/0{,}115 = 7{,}043$ m/seg, $\quad V_2 = 0{,}810/0{,}075 = 10{,}800$ m/seg.
$V_1 \cos \alpha_1 = 7{,}043 \times 0{,}966 = 6{,}804$ m/seg.
$u_1 = 0{,}45(2\pi)(100/60) = 4{,}712$ m/seg, $\quad u_2 = 0{,}21(2\pi)(100/60) = 2{,}199$ m/seg.

Del diagrama vectorial de la Fig. 12-2, donde γ = arc sen $1{,}555/10{,}800 = 8°17'$, obtenemos

$$\alpha_2 = 135° - \gamma = 126°43' \quad \text{y} \quad V_2 \cos \alpha_2 = 10{,}800(-0{,}598) = -6{,}458 \text{ m/seg}$$

Luego potencia $P = \dfrac{1000 \times 0{,}810}{75 \times 9{,}8}[6{,}804(4{,}712) - 2{,}199(-6{,}458)] = 50{,}98$ CV.

(*b*) Rendimiento $= \dfrac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \dfrac{\text{altura de carga utilizada}}{\text{altura de carga disponible}}$.

Pero carga utilizada $= \dfrac{\text{caballos de vapor utilizados} \times 75}{wQ}$ o $H_T = \dfrac{50{,}98 \times 75}{1000 \times 0{,}810} = 4{,}720$ m

Por consiguiente, carga disponible $= 4{,}720/0{,}785 = 6{,}013$ m

(*c*) A fin de aplicar la ecuación (*2*) del problema anterior, debemos calcular las dos velocidades relativas. Refiriéndose otra vez al diagrama vectorial anterior, obtenemos

$$X = 7{,}043 \cos 15° = 7{,}043(0{,}966) = 6{,}804 \text{ m/seg [como en } (a)]$$
$$y = 7{,}043 \text{ sen } 15° = 7{,}043(0{,}259) = 1{,}824 \text{ m/seg}$$
$$x = (X - u_1) = 6{,}804 - 4{,}712 = 2{,}092 \text{ m/seg}$$
$$v_1 = \sqrt{(1{,}824)^2 + (2{,}092)^2} = \sqrt{7{,}703} = 2{,}775 \text{ m/seg}$$

De manera análoga,

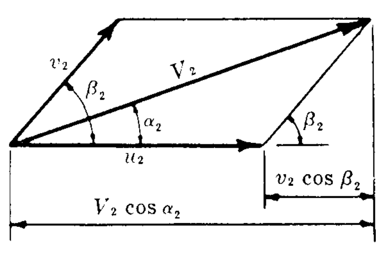
$$v_2 = V_2 \cos \gamma + u_2 \cos 45° = 10{,}800(0{,}990) + 2{,}199(0{,}707) = 12{,}247 \text{ m/seg}$$

La ecuación de Bernoulli da

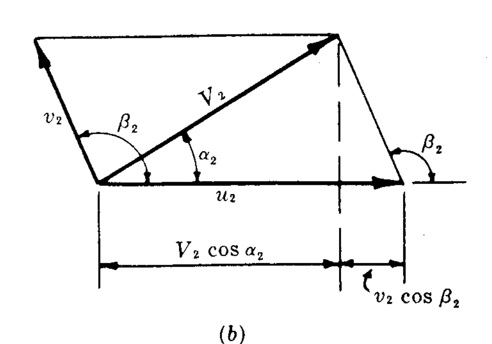
$$\left[\frac{(2{,}775)^2}{2g} + \frac{p_1}{w} + 0\right] - \left[\frac{(4{,}712)^2 - (2{,}199)^2}{2g}\right] - 1{,}200 = \left[\frac{(12{,}247)^2}{2g} + 0{,}300 + 0\right]$$

de donde $p_1/w = 9{,}646$ m.

4. Determinar el valor de la altura de carga desarrollada por el rodete de una bomba.



(*a*)



(*b*)

Fig. 12-3

Solución:

La expresión *(1)* del Problema 1, aplicada en la dirección del flujo en una bomba (donde r_1 es el radio interior, etc.), da

$$\text{Potencia de entrada} = \frac{wQ}{g}(u_2 V_2 \cos\alpha_2 - u_1 V_1 \cos\alpha_1)$$

y la carga comunicada por el rodete se obtiene dividiendo por wQ, luego

$$\text{carga } H' = \frac{1}{g}(u_2 V_2 \cos\alpha_2 - u_1 V_1 \cos\alpha_1)$$

En muchas bombas el flujo en el punto *(1)* puede suponerse radial y el valor del término $u_1 V_1 \cos\alpha_1$ es cero. Entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\text{carga } H' = \frac{1}{g}(u_2 V_2 \cos\alpha_2) \qquad (1)$$

En la Fig. 12-3(*a*) y (*b*) se ve que $V_2 \cos\alpha_2$ puede expresarse en función de u_2 y v_2, es decir,

$$V_2 \cos\alpha_2 = u_2 + v_2 \cos\beta_2$$

en donde hay que tener en cuenta el signo de $\cos\beta_2$. Entonces,

$$\text{carga } H' = \frac{u_2}{g}(u_2 + v_2 \cos\beta_2) \qquad (2)$$

Por otra parte, de los triángulos vectoriales,

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2 \cos(180^\circ - \beta_2)$$

que podemos escribir de la forma

$$u_2 v_2 \cos\beta_2 = \tfrac{1}{2}(V_2^2 - u_2^2 - v_2^2)$$

La ecuación *(2)* se transforma en

$$\text{carga } H' = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}$$

La carga desarrollada por la bomba será menor que el valor dado por esta expresión ya que existen pérdidas en el rodete y pérdidas a la salida. Luego

$$\text{Carga desarrollada } H = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) - \text{pérdida en el rodete} - \text{pérdida en la salida}$$

$$H = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) - K_i\frac{v_2^2}{2g} - K_e\frac{V_2^2}{2g}$$

5. Calcular para bombas y turbinas (*a*) el factor de velocidad ϕ, (*b*) la velocidad unitaria N_u, (*c*) el caudal unitario Q_u, (*d*) la potencia unitaria P_u y (*e*) la velocidad específica.

Solución:

(*a*) Por definición, $\phi = \dfrac{u}{\sqrt{2gH}}$. Pero $u = r\omega = r\dfrac{2\pi N}{60} = \dfrac{\pi D N}{60} = \dfrac{\pi D_1 N}{6000}$, donde D_1 es el diámetro en cm y N la velocidad en revoluciones por minuto. Finalmente,

$$\phi = \frac{\pi D_1 N}{6000} \times \frac{1}{\sqrt{2gH}} = \frac{D_1 N}{8.460\sqrt{H}} \qquad (1a)$$

(*b*) Si $D_1 = 1$ cm y $H = 1$ m, obtenemos de la ecuación *(1a)* anterior la velocidad unitaria N_u. Así, pues,

$$N_u = 8.460\,\phi \qquad (1b)$$

que es constante para todas las ruedas de diseño semejante si ϕ se refiere a la velocidad óptima. También, de la *(1a)* anterior,

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} \quad \text{en rpm} \qquad (2)$$

Así, pues, para rodetes homólogos, la velocidad óptima N varía inversamente al diámetro y directamente a la raíz cuadrada de H.

(*c*) Para la turbina tangencial, el caudal Q puede expresarse como

$$Q = cA\sqrt{2gH} = c\frac{\pi d_1^2}{4 \times 10.000}\sqrt{2gH} = \frac{c\pi\sqrt{2g}}{40.000}\left(\frac{d_1}{D_1}\right)^2 D_1^2\sqrt{H}$$

$$= (\text{factor})\, D_1^2\sqrt{H} = Q_u D_1^2\sqrt{H} \qquad (3)$$

Para $D_1 = 1$ cm y $H = 1$ m, el factor se define como caudal unitario Q_u.
Para turbinas de reacción y bombas, el caudal Q puede expresarse como el producto de

$$(c)(A)(\text{componente de velocidad})$$

La componente de velocidad depende de la raíz cuadrada de H y el seno del ángulo α_1 (véase Fig. 12-1 del Problema 1). Por consiguiente, el caudal Q puede escribirse en la forma de la ecuación (*3*) anterior.

(*d*) Aplicando la expresión (*3*) anterior,

$$\text{potencia } P = \frac{wQH}{75} = \frac{w(Q_u D_1^2\sqrt{H})H}{75}$$

Para $D_1 = 1$ cm y $H = 1$ m, la potencia $= wQ_u/75 =$ (factor).. Cuando el rendimiento se incluye en la potencia de salida para turbinas y la potencia del agua para bombas, el factor se transforma en la potencia unitaria P_u. Luego,

$$\text{potencia } P = P_u D_1^2 H^{3/2} \qquad (4)$$

(*e*) En la ecuación (*4*) podemos sustituir D_1 por su valor dado en la expresión (*2*) anterior, obteniendo

$$\text{potencia } P = P_u \frac{N_u^2 H}{N^2} H^{3/2}$$

También $$P_u N_u^2 = \frac{PN^2}{H^{5/2}} \quad \text{o} \quad N_u\sqrt{P_u} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \qquad (5)$$

El término $N_u\sqrt{P_u}$ se llama velocidad específica N_S. La expresión (*5*) se convierte entonces en

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \quad (\text{para turbinas}) \qquad (6)$$

Si P se sustituye por Q, eliminando D_1 en las ecuaciones (*2*) y (*3*), obtenemos

$$N_u^2 Q_u = \frac{QN^2}{H^{3/2}}$$

y $$N_S = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad (\text{para bombas}) \qquad (7)$$

donde esta velocidad específica indica la velocidad a la que circularía 1 m³/seg bajo 1 m de carga.

Estas son las expresiones comunes para bombas y ruedas de agua. Para rodetes homólogos en los que pueden emplearse diferentes fluidos, véanse las expresiones (*9b*), (*11a*) y (*12a*) al comienzo de este capítulo.

6. Una turbina tangencial desarrolla 7300 CV a 200 rpm bajo una carga de 240 m con un rendimiento del 82 %. (*a*) Si el factor de velocidad es 0,46, calcular el diámetro de la rueda, el caudal, la velocidad unitaria, el caudal unitario y la velocidad específica. (*b*) Para esta turbina, ¿cuál será la velocidad, la potencia y el caudal bajo una carga de 161 m? (*c*) Para una turbina que tenga el mismo diseño, ¿cuál deberá ser el diámetro de la rueda para desarrollar 3850 CV bajo una carga de 180 m y cuál será su velocidad y caudal? Suponer que el rendimiento no varía.

Solución:

Teniendo en cuenta las fórmulas del Problema 5, se procede como sigue:

(*a*) Puesto que $\phi = \dfrac{D_1 N}{8460\sqrt{H}}$, $D_1 = \dfrac{8460\sqrt{240} \times 0{,}46}{200} = 301{,}44$ cm

De caballos de vapor a la salida $= \dfrac{wQHe}{75}$, $\quad Q = \dfrac{7300 \times 75}{1000 \times 240 \times 0{,}82} = 2{,}782$ m³/seg.

$$N_u = \frac{ND_1}{\sqrt{H}} = \frac{200 \times 301{,}4}{\sqrt{240}} = 3891 \text{ rpm}$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{7300}{(301{,}4)^2(240)^{3/2}} = 0{,}0000216 \text{ CV}$$

$$Q_u = \frac{Q}{D_1^2\sqrt{H}} = \frac{2{,}782}{(301{,}4)^2 240} = 0{,}000001977 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{200\sqrt{7300}}{(240)^{5/4}} = 18{,}09 \text{ rpm}$$

(*b*) Velocidad $N = \frac{N_u\sqrt{H}}{D_1} = \frac{3891\sqrt{161}}{301{,}4} = 163{,}8$ rpm.

Potencia $P = P_u D_1^2 H^{3/2} = 0{,}0000216(301{,}4)^2(161)^{3/2} = 4010$ CV.

Caudal $Q = Q_u D_1^2\sqrt{H} = 0{,}000001977(301{,}4)^2\sqrt{161} = 2{,}279$ m³/seg

Los tres valores anteriores han podido obtenerse observando que, para la misma turbina (D_1 invariable), la velocidad varía como $H^{1/2}$, la potencia como $H^{3/2}$ y Q como $H^{1/2}$. Por consiguiente,

$$N = 200\sqrt{\frac{161}{240}} = 163{,}8 \text{ rpm}, \qquad P = 7300\left(\frac{161}{240}\right)^{3/2} = 4010 \text{ CV}, \qquad Q = 2{,}782\sqrt{\frac{161}{240}} = 2{,}279 \text{ m}^3/\text{seg}$$

(*c*) De $P = P_u D_1^2 H^{3/2}$ obtenemos

$$3850 = 0{,}0000216(D_1)^2(180)^{3/2}, \quad \text{de donde} \quad D_1^2 = 73.807 \quad \text{y} \quad D_1 = 271{,}7 \text{ cm}$$

$$N = \frac{N_u\sqrt{H}}{D_1} = \frac{3891\sqrt{180}}{271{,}7} = 192 \text{ rpm}$$

$$Q = Q_u D_1^2\sqrt{H} = 0{,}000001977(73807)\sqrt{180} = 1{,}958 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

7. Una turbina desarrolla 144 CV girando a 100 rpm bajo una carga de 8,0 m. (*a*) ¿Qué potencia desarrollaría bajo una carga de 11,0 m, suponiendo el mismo caudal? (*b*) ¿A qué velocidad giraría la turbina?

Solución:

(*a*) Potencia desarrollada = $wQHe/75$, de donde $wQe/75 = \text{CV}/H = 144/8$.

Para el mismo caudal (y rendimiento), bajo la carga de 11 m, obtenemos

$$wQe/75 = 144/8 = \text{CV}/11 \qquad \text{o} \qquad \text{CV} = 198$$

(*b*)

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{100\sqrt{144}}{(8)^{5/4}} = 89{,}19 \text{ rpm}$$

Luego

$$N = \frac{N_S H^{5/4}}{\sqrt{P}} = \frac{89{,}19(11)^{5/4}}{\sqrt{198}} = 127 \text{ rpm}$$

8. Una rueda de impulsión a la velocidad óptima produce 125 CV bajo una carga de 64 m. (*a*) ¿En qué tanto por ciento se incrementaría la velocidad para una carga de 88 m? (*b*) Suponiendo rendimientos iguales, ¿qué potencia resultaría?

Solución:

(*a*) Para la misma rueda, la velocidad es proporcional a la raíz cuadrada de la altura de carga. Entonces,

$$N_1/\sqrt{H_1} = N_2/\sqrt{H_2} \qquad \text{o} \qquad N_2 = N_1\sqrt{H_2/H_1} = N_1\sqrt{88/64} = 1{,}1726N_1$$

La velocidad se incrementaría en un 17,26 %.

(b) Para obtener la nueva potencia producida podemos aplicar la relación de velocidad específica.

De $N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}}$ tenemos $\frac{N_1\sqrt{125}}{(64)^{5/4}} = \frac{N_2\sqrt{P_2}}{(88)^{5/4}}$, de donde

$$P_2 = [\frac{N_1}{1{,}1726N_1}\sqrt{125}(\frac{88}{64})^{5/4}]^2 = 201{,}54 \text{ CV}$$

El mismo valor puede obtenerse observando que, para la misma rueda, la potencia varía como $H^{3/2}$, dando $P_2 = 125(88/64)^{3/2} = 201{,}54$ CV.

9. Hallar el diámetro aproximado y la velocidad angular de una rueda Pelton con un rendimiento del 85 % y una carga efectiva de 67 m, cuando el caudal es de 0,027 m^3/seg. Suponer los valores de $\phi = 0{,}46$ y $c = 0{,}975$.

Solución:

Para una rueda de impulsión la expresión general de la potencia es

$$P = \frac{wQHe}{75} = \frac{1000(cA\sqrt{2gH})He}{75} = \frac{1000c\pi\sqrt{2ge}}{75 \times 4 \times 10.000}d^2H^{3/2} = 0{,}00384d^2H^{3/2} \quad (1)$$

donde d = diámetro de boquilla en centímetros y los valores de c y e son 0,975 y 0,85, respectivamente.

$$\text{Potencia} = \frac{wQHe}{75} = \frac{1000 \times 0{,}027 \times 66 \times 0{,}85}{75} = 20{,}5 \text{ CV}$$

Sustituyendo este valor en la expresión (1) anterior obtenemos $d = 3{,}12$ cm. (Este mismo valor del diámetro d puede calcularse también aplicando la ecuación $Q = cA\sqrt{2g\,H}$ del Capítulo 9.)

Ahora se establecerá la relación de diámetro de la boquilla a diámetro de la rueda. Esta relación resultará de dividir la velocidad específica por la velocidad unitaria, o sea,

$$\frac{N_S}{N_u} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} : \frac{ND_1}{\sqrt{H}} = \frac{\sqrt{P} \times \sqrt{H}}{D_1H^{5/4}}$$

Sustituyendo el valor de P de la ecuación (1) anterior,

$$\frac{N_S}{N_u} = \frac{\sqrt{0{,}00384d^2H^{3/2}}\sqrt{H}}{D_1H^{5/4}} = 0{,}062\frac{d}{D_1}$$

Como $N_u = 8460\phi$ (véase Problema 5), se tiene

$$N_S = (8460 \times 0{,}46)(0{,}062\frac{d}{D_1}) = 241{,}28\frac{d}{D_1} \quad (2)$$

Se precisa suponer un valor de N_S en (2). Empleando $N_S = 10$, tenemos

$$10 = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{N\sqrt{20{,}5}}{(67)^{5/4}} \quad \text{o} \quad N = 423 \text{ rpm}$$

La velocidad de una rueda de impulsión debe sincronizarse con la velocidad del generador. Para un generador de 50 ciclos con 8 pares de polos, la velocidad $N = 6000/(2 \times 8) = 375$ rpm; y con 7 pares, $N = 6000/(2 \times 7) = 429$ rpm. Empleando, por ejemplo, el generador de 7 pares de polos, el cálculo da

$$N_S = \frac{429\sqrt{20{,}5}}{(67)^{5/4}} = 10{,}133$$

De la ecuación (2) anterior, $D_1 = 241{,}28d/N_S = 241{,}28(3{,}12)/10{,}133 = 74{,}29$ cm.

Para el generador de 7 pares de polos, $N = 429$ rpm.

10. Las turbinas de reacción en la instalación de la presa del Hoover tienen una capacidad estimada de 116.600 CV a 180 rpm bajo una carga de 148 m. El diámetro de cada turbina es 3,35 m y el caudal es 66,5 m^3/seg. Calcular el factor de velocidad, la velocidad unitaria, el caudal unitario, la potencia unitaria y la velocidad específica.

Solución:

Aplicando las ecuaciones (4) a (11) del principio de este Capítulo, obtenemos los valores siguientes:

$$\phi = \frac{D_1 N}{8460\sqrt{H}} = \frac{(3,35 \times 100)180}{8460\sqrt{148}} = 0,586$$

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} = \frac{(3,35 \times 100)180}{\sqrt{148}} = 4957 \text{ rpm}$$

$$Q_u = \frac{Q}{D_1^2\sqrt{H}} = \frac{66,5}{(335)^2\sqrt{148}} = 0,0000487 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{116.600}{(335)^2(148)^{3/2}} = 0,000577 \text{ CV}$$

$$N_S = N_u\sqrt{P_u} = 119,1$$

11. Una rueda de impulsión gira a 400 rpm bajo una carga efectiva de 60 m y desarrolla 90 CV al freno. Para valores de $\phi = 0,46$, $c_v = 0,97$ y rendimiento $e = 83\,\%$, determinar (*a*) el diámetro del chorro, (*b*) el caudal en m³/seg, (*c*) el diámetro de la rueda y (*d*) la altura de presión en la base de la boquilla de 20 cm de diámetro.

Solución:

(*a*) La velocidad del chorro es $v = c_v\sqrt{2gh} = 0,97\sqrt{19,6 \times 60} = 33,264$ m/seg.

Antes debe determinarse el caudal para poder calcular el diámetro del chorro.

Potencia en CV desarrollada $= wQHe/75$, $90 = 1000Q(60)(0,83)/75$ y $Q = 0,137$ m³/seg.

Entonces, área del chorro $= Q/v = 0,00407$ m² y diámetro del chorro $= 0,072$ m $= 7,20$ cm.

(*b*) Resuelto en (*a*).

(*c*) $\phi = \dfrac{D_1 N}{8460\sqrt{H}}$, $\quad 0,46 = \dfrac{D_1(400)}{8460\sqrt{60}}$ y $D_1 = 75,36$ cm

(*d*) Carga efectiva $h = (p/w + V^2/2g)$, donde p y V son valores medios de la presión y la velocidad medidas en la base de la boquilla. El valor de $V_{20} = Q/A_{20} = 4,314$ m/seg.

Luego $\dfrac{p}{w} = h - \dfrac{V_{20}^2}{2g} = 60 - \dfrac{(4,314)^2}{2g} = 59,05$ m.

12. Una rueda Pelton desarrolla 6000 CV al freno bajo una carga neta de 120 m a una velocidad de 200 rpm. Suponiendo $c_v = 0,98$, $\phi = 0,46$, rendimiento $= 88\,\%$ y la relación diámetro del chorro-diámetro de la rueda igual a 1/9, determinar (*a*) el caudal requerido, (*b*) el diámetro de la rueda, (*c*) el diámetro y el número de chorros requeridos y (*d*) la velocidad específica.

Solución:

(*a*) Potencia en CV del agua $= wQH/75$, $6000/0,88 = 1000Q120/75$ y $Q = 4,261$ m³/seg.

(*b*) Velocidad del chorro $v = c_v\sqrt{2gh} = 0,98\sqrt{19,6(120)} = 47,527$ m/seg.

Velocidad periférica $u = \phi\sqrt{2gh} = 0,46\sqrt{19,6(120)} = 22,309$ m/seg.

Luego $u = r\omega = \pi DN/60$, $\quad 22,309 = \pi D(200/60)$ y $D = 2,13$ m.

(*c*) Puesto que $d/D = 1/9$, $d = 2,13/9 = 0,237$ m de diámetro.

Número de chorros $= \dfrac{\text{caudal } Q}{\text{caudal por chorro}} = \dfrac{Q}{A_{ch}v_{ch}} = \dfrac{4,261}{\frac{1}{4}\pi(0,237)^2(47,527)} = 2,03$. Se emplean 2 chorros.

(*d*) La velocidad específica para las dos boquillas es $N_S = \dfrac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \dfrac{200\sqrt{6000}}{(120)^{5/4}} = 39,0$.

13. En la planta de Pickwick de TVA las turbinas de hélice tienen una potencia de 48.000 CV a 81,8 rpm bajo una carga de 13 m. El diámetro de desagüe es 742,4 cm. Para una turbina geométricamente semejante que desarrolle 36.000 CV bajo una carga de 11 m, ¿cuáles serán la velocidad y el diámetro? ¿Cuál será el porcentaje de variación del caudal?

Solución:

La velocidad específica de turbinas geométricamente semejantes puede expresarse de la forma

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}}. \qquad \text{Luego} \quad \frac{81{,}8\sqrt{48.000}}{(13)^{5/4}} = \frac{N\sqrt{36.000}}{(11)^{5/4}} \qquad \text{y} \qquad N = 76{,}6 \text{ rpm}$$

El mismo resultado puede obtenerse calculando N_u, luego P_u y N_S. Estos valores se aplican a la turbina que se va a diseñar. Así, pues,

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} = \frac{742{,}4(81{,}8)}{\sqrt{13}} = 16.843$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{48.000}{(742{,}4)^2(13)^{3/2}} = 0{,}00186$$

$$N_S = N_u\sqrt{P_u} = 16.843\sqrt{0{,}00186} = 726{,}4$$

y

$$N = \frac{N_S H^{5/4}}{\sqrt{P}} = \frac{726{,}4(11)^{5/4}}{\sqrt{36.000}} = 76{,}6 \text{ rpm, como antes}$$

Para el cálculo del diámetro de la nueva turbina, aplicando $N_u = \dfrac{D_1 N}{\sqrt{H}}$, $D_1 = \dfrac{N_u\sqrt{H}}{N} = \dfrac{16.843\sqrt{11}}{76{,}6} = 729$ cm.

Para hallar el porcentaje de variación del caudal Q, la relación de caudal para Pickwick y las nuevas turbinas es

$$\text{nueva}\frac{Q}{D_1^2 H^{1/2}} = \text{Pickwick}\frac{Q}{D_1^2 H^{1/2}}, \qquad \frac{Q_{\text{Pick}}}{(742{,}4)^2(13)^{1/2}} = \frac{Q_{\text{nueva}}}{(729)^2(11)^{1/2}}$$

y nuevo $Q = 0{,}887 Q_{\text{Pick}}$ o aproximadamente un 11 % de reducción de Q.

14. Un modelo de turbina de 37,5 cm desarrolla 12 CV a una velocidad de 1500 rpm bajo una carga de 7,5 m. Una turbina geométricamente semejante de 187,5 cm de diámetro trabaja con el mismo rendimiento bajo una carga de 14,7 m. ¿Qué velocidad y potencia se alcanzarán?

Solución:

De la expresión (*5a*) del principio de este capítulo,

$$C'_N = \frac{ND}{\sqrt{gH}} = \text{constante para turbinas homólogas}$$

Por consiguiente, $\text{modelo}\dfrac{ND}{\sqrt{gH}} = \text{prototipo}\dfrac{ND}{\sqrt{gH}}$, $\dfrac{1500 \times 37{,}5}{\sqrt{g \times 7{,}5}} = \dfrac{N \times 187{,}5}{\sqrt{g \times 14{,}7}}$ y $N = 420$ rpm.

De la expresión (*9a*), $C_p = \dfrac{P}{D^2 H^{3/2}} =$ constante. Por tanto,

$$\text{modelo}\frac{P}{D^2H^{3/2}} = \text{prototipo}\frac{P}{D^2H^{3/2}}, \qquad \frac{12}{(37{,}5)^2(7{,}5)^{3/2}} = \frac{P}{(187{,}5)^2(14{,}7)^{3/2}}, \qquad P = 823{,}2 \text{ CV}$$

15. Una turbina de reacción, de 50 cm de diámetro, cuando gira a 600 rpm, desarrolla 261 CV al freno, siendo el caudal de 0,710 m^3/seg. La altura de presión a la entrada de la turbina es de 27,50 m y la elevación de la carcasa de la turbina sobre el nivel de aguas abajo es de 1,88 m. El agua entra en la turbina con una velocidad de 3,60 m/seg. Calcular (*a*) la carga efectiva, (*b*) el rendimiento, (*c*) la velocidad resultante bajo una carga de 67,50 m y (*d*) la potencia al freno y el caudal bajo la carga de 67,50 m.

Solución:

(*a*) Carga efectiva $H = \dfrac{P}{w} + \dfrac{V^2}{2g} + z = 27{,}50 + \dfrac{(3{,}60)^2}{2g} + 1{,}88 = 30{,}0$ m

(*b*) Potencia suministrada por el agua $= wQH/75 = 1000(0{,}710)(30{,}0)/75 = 284$ CV.

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{potencia en el eje}}{\text{potencia suministrada}} = \frac{261}{284} = 91{,}9\,\%.$$

(*c*) Para la misma turbina, la relación $\dfrac{ND_1}{\sqrt{H}}$ es constante. Luego $\dfrac{N \times 50}{\sqrt{67{,}50}} = \dfrac{600 \times 50}{\sqrt{30}}$ o $N = 900$ rpm.

(*d*) Para la misma turbina, las relaciones $\dfrac{P}{D_1^2 H^{3/2}}$ y $\dfrac{Q}{D_1^2\sqrt{H}}$ son también constantes. Luego

$$\frac{P}{(50)^2(67{,}50)^{3/2}} = \frac{261}{(50)^2(30)^{3/2}}, \quad P = 881 \text{ CV} \quad \text{y} \quad \frac{Q}{(50)^2\sqrt{67{,}50}} = \frac{0{,}710}{(50)^2\sqrt{30}}, \quad Q = 1{,}065 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

16. Un rodete de una bomba de 30 cm de diámetro desagua 0,142 m³/seg cuando gira a 1200 rpm. El ángulo β_2 del álabe es 160° y el área de salida A_2 es 0,023 m². Suponiendo unas pérdidas de $2{,}8(v_2^2/2g)$ y $0{,}38(V_2^2/2g)$, calcular el rendimiento de la bomba (el área de salida se mide normal a v_2).

Solución:

Las velocidades absoluta y relativa a la salida deben calcularse en primer lugar. Las velocidades u_2 y v_2 son

$$u_2 = r_2\omega = (15/100)(2\pi \times 1200/60) = 18{,}850 \text{ m/seg}, \qquad v_2 = Q/A_2 = 0{,}142/0{,}023 = 6{,}174 \text{ m/seg}$$

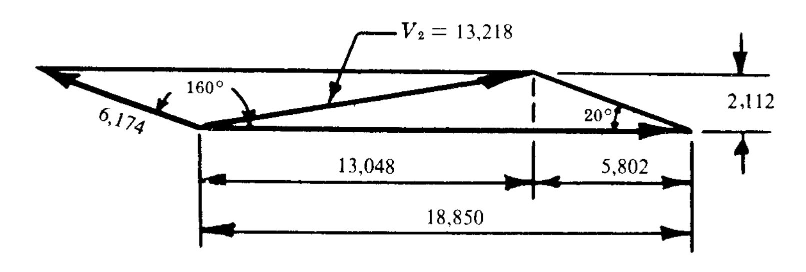


Fig. 12-4

Del diagrama vectorial representado en la Fig. 12-4, el valor de la velocidad absoluta a la salida es $V_2 = 13{,}218$ m/seg. Del Problema 4,

$$\text{carga suministrada por la bomba, } H' = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{(18{,}850)^2}{2g} - \frac{(6{,}174)^2}{2g} + \frac{(13{,}218)^2}{2g} = 25{,}1 \text{ m}$$

$$\text{Carga cedida al agua, } H = H' - \text{pérdidas} = 25{,}1 - \left(2{,}8\frac{(6{,}174)^2}{2g} + 0{,}38\frac{(13{,}218)^2}{2g}\right) = 16{,}3 \text{ m}.$$

Rendimiento $e = H/H' = 16{,}3/25{,}1 = 64{,}9\,\%$.

El valor de H' puede calcularse también mediante la expresión comúnmente usada

$$H' = \frac{u_2}{g}(u_2 + v_2\cos\beta_2) = \frac{18{,}850}{g}[18{,}850 + 6{,}174(-0{,}940)] = 25{,}1 \text{ m}$$

17. Una bomba centrífuga proporciona un caudal de 1000 l/min contra una carga de 15 m cuando la velocidad es de 1500 rpm. El diámetro del rodete impulsor es de 30 cm y la potencia al freno de 6 CV. Una bomba geométricamente semejante de 35 cm de diámetro gira a razón de 1750 rpm. Suponiendo que los rendimientos son iguales, (*a*) ¿qué carga desarrollará? (*b*) ¿Cuánta agua bombeará y (*c*) ¿qué potencia al freno desarrollará?

Solución:

(*a*) Las relaciones de velocidad, $\dfrac{DN}{\sqrt{H}}$, para el modelo y prototipo son iguales. Luego

$$\frac{30 \times 1500}{\sqrt{15}} = \frac{35 \times 1750}{\sqrt{H}} \quad \text{y} \quad H = 27{,}789 \text{ m}$$

(*b*) Las relaciones de caudal $\dfrac{Q}{D^2\sqrt{H}}$ son iguales. Luego

$$\frac{1000}{(30)^2\sqrt{15}} = \frac{Q}{(35)^2\sqrt{27{,}789}} \quad \text{y} \quad Q = 1852{,}6 \text{ l/min}$$

Otra relación de caudal muy empleada es $\dfrac{Q}{D^3N}$ = constante, de la cual

$$\frac{Q}{(35)^3(1750)} = \frac{1000}{(30)^3(1500)} \quad \text{y} \quad Q = 1852{,}6 \text{ l/min}$$

(*c*) La relación de potencia, $\dfrac{P}{D^5N^3}$ = constante, puede aplicarse para el modelo y el prototipo. Luego

$$\frac{P}{(35)^5(1750)^3} = \frac{6}{(30)^5(1500)^3} \quad \text{y} \quad P = 20{,}593 \text{ CV}$$

18. Una bomba de 15 cm de diámetro suministra 5200 l/min contra una altura de carga de 22,5 m cuando gira a 1750 rpm. En la Fig. 12-5 se representan las curvas altura de carga-caudal y rendimiento-caudal. Para una bomba de 20 cm geométricamente semejante girando a 1450 rpm y suministrando 7200 l/min, determinar (*a*) la altura de carga probable desarrollada por la bomba de 20 cm. (*b*) Suponiendo una curva de rendimiento semejante para la bomba de 20 cm, ¿qué potencia será requerida para tener el caudal de 7200 l/min?

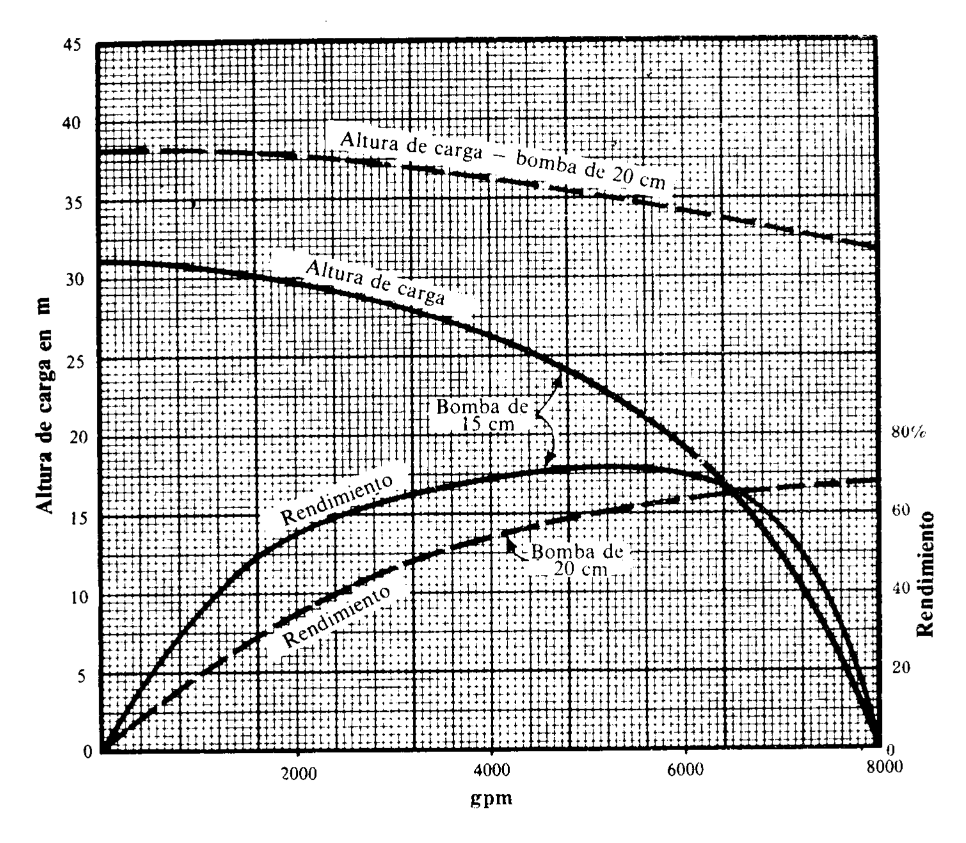


Fig. 12-5

Solución:

(*a*) Las bombas homólogas tendrán idénticas características a caudales correspondientes. Se eligen varios caudales para la bomba de 15 cm y se leen las correspondientes alturas de carga. Se calculan los valores de H y Q de manera que pueda representarse una curva para la bomba de 20 cm. Uno de tales cálculos se detalla a continuación y se establece una tabla de valores para cálculos semejantes.

Empleando el caudal dado de 5200 l/min y los 22,5 de carga, obtenemos de la relación de velocidad,

$$H_{20} = (D_{20}/D_{15})^2(N_{20}/N_{15})^2 H_{15} = (20/15)^2(1450/1750)^2 H_{15} = 1{,}221 H_{15} = 1{,}221(22{,}5) = 27{,}5 \text{ m}$$

De la relación de caudal, $\dfrac{Q}{D^3N}$ = constante, obtenemos

$$Q_{20} = (D_{20}/D_{15})^3(N_{20}/N_{15})Q_{15} = (20/15)^3(1450/1750)Q_{15} = 1{,}964Q_{15} = 1{,}964(5200) = 10.213 \text{ l/min}$$

Se han obtenido los siguientes valores adicionales que han servido para representar la curva a trazos de la Figura 12-5.

Bomba de 15 cm a 1750 rpm

Q en l/min	H en m	Rendimiento
0	31,0	4
2000	29,5	54 %
3200	28,0	64 %
4000	26,0	68 %
5200	22,5	70 %
6400	17,0	67 %

Bomba de 20 cm a 1450 rpm

Q en l/min	H en m	Rendimiento
0	37,8	0
3928	36,0	54 %
6285	34,2	64 %
7856	31,7	68 %
10213	27,5	70 %
12570	20,7	67 %

De la curva altura de carga-caudal, para Q = 7200 l/min la altura de carga es 32,5 m.

(*b*) El rendimiento de la bomba de 20 cm sería probablemente algo mayor que el de la bomba de 15 cm para relaciones comparables de caudal. En este caso, la hipótesis es que las curvas de rendimiento son las mismas para relaciones de caudal comparables. La tabla anterior da los valores para los caudales indicados. La figura representa la curva de rendimiento para la bomba de 20 cm y, para los 7200 l/min, el valor del rendimiento es de 67 %. Luego

$$P = \frac{wQH}{75e} = \frac{1000[7200/(60 \times 1000)](32{,}5)}{75(0{,}67)} = 77{,}6 \text{ CV}$$

19. Hay que suministrar 1225 l/min contra una carga de 126 m a 3600 rpm. Suponiendo un rendimiento aceptable de la bomba a velocidades específicas del rodete impulsor comprendidas entre 6000 y 19.000 rpm cuando el caudal Q se expresa en l/min, ¿cuántas etapas de bombeo se necesitarán?

Solución:

Para 1 etapa, $N_S = \dfrac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}} = \dfrac{3600\sqrt{1225}}{(126)^{3/4}} = 3350$. Este valor es demasiado bajo.

Si se toman 3 etapas, entonces la carga/etapa = 126/3 = 42 m y $N_S = \dfrac{3600\sqrt{1225}}{(42)^{3/4}} = 7640$.

Comparemos este valor con el valor para 4 etapas, para el cual H = 126/4 = 31,5 m, o sea, con

$$N_S = \frac{3600\sqrt{1225}}{(31{,}5)^{3/4}} = 9480$$

Esta última velocidad específica parece atractiva. Sin embargo, en la práctica, el costo adicional de la bomba de 4 etapas puede tener más importancia que el aumento del rendimiento de la unidad. Deberá realizarse un estudio económico de los costes.

20. A fin de predecir el comportamiento de una pequeña bomba de aceite, se realizan ensayos sobre un modelo que emplea aire. La bomba de aceite va a ser arrastrada por un motor de 1/20 CV a 1800 rpm y para la bomba de aire se dispone de un motor de 1/4 CV que gira a 600 rpm. Empleando como densidad relativa del aceite 0,912 y como densidad del aire (constante) 1,227 kg masa/m³, ¿cuál será la dimensión del modelo?

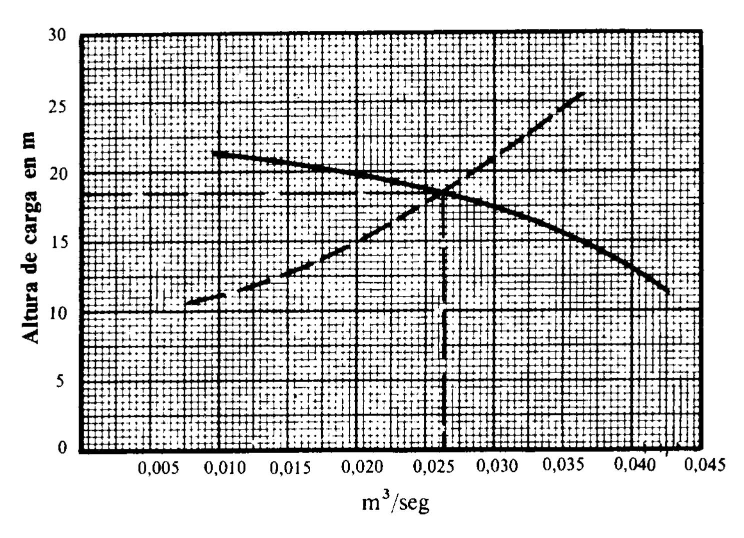
Solución:

Aplicando la relación de potencia, obtenemos prototipo $\dfrac{P}{\rho D^5 N^3}$ = modelo $\dfrac{P}{\rho D^5 N^3}$.

Luego $$\frac{1/20}{0{,}912(1000)D_p^5(1800)^3} = \frac{1/4}{1{,}227D_m^5(600)^3} \quad \text{y} \quad \frac{D_m}{D_p} = 10$$

El modelo será 10 veces mayor que la bomba de aceite.

21. Una bomba, girando a 1750 rpm, tiene una curva altura de carga-caudal como la representada en la Fig. 12-6. La bomba impulsa agua a través de una tubería de 15 cm de diámetro y 450 m de largo, con $f = 0{,}025$. La carga estática es 10,0 m y las pérdidas menores pueden despreciarse. Calcular el caudal y la altura de carga de la bomba en estas condiciones.



Solución:

Fig. 12-6

La pérdida de carga a través de la tubería aumenta con el caudal. Puede dibujarse una curva que represente la altura de carga total de bombeo en función del caudal (curva a trazos). Pero

altura de carga total de la bomba = carga estática + pérdidas en tubería

$$= 10{,}0 + 0{,}025\left(\frac{450}{0{,}15}\right)\frac{V^2}{2g} = 10{,}0 + 75{,}0\frac{V^2}{2g}$$

Podemos calcular esta altura de la manera siguiente:

$Q =$	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	m³/seg
$V = Q/A =$	0,566	0,849	1,132	1,415	1,698	m/seg
$75V^2/2g =$	1,226	2,758	4,903	7,662	11,033	m (pérdida)
Altura total $=$	11,226	12,758	14,903	17,662	21,033	m

La Fig. 12-6 indica que cuando el caudal es 0,0265 m³/seg la altura desarrollada por la bomba será igual a la altura total de bombeo, es decir, 18,5 m.

Para el cálculo económico de las dimensiones de la tubería, véase Capítulo 8, Problema 18.

22. ¿Cuál es la relación de potencia de una bomba y su modelo a escala 1/5 si la relación de alturas es 4 a 1?

Solución:

Para bombas geométricamente semejantes, $\frac{P}{D^2H^{3/2}}$ para la bomba $=$ $\frac{P}{D^2H^{3/2}}$ para el modelo. Entonces,

$$\frac{P_b}{(5D)^2(4H)^{3/2}} = \frac{P_m}{D^2H^{3/2}} \quad \text{y} \quad P_b = 25(4)^{3/2}P_m = 200P_m$$

23. Desarrollar las expresiones que dan el empuje y la potencia de salida de una hélice, la velocidad a través de la hélice y el rendimiento de la hélice.

Solución:

(*a*) Aplicando el principio de la cantidad de movimiento, el empuje F de la hélice varía la cantidad de movimiento de la masa M de aire de la Fig. 12-7. La hélice puede estar fija en un fluido que se mueve con velocidad de aproximación V_1 o puede moverse hacia la izquierda, a velocidad V_1 en el fluido en reposo. Así, pues, despreciando los vórtices y el rozamiento,

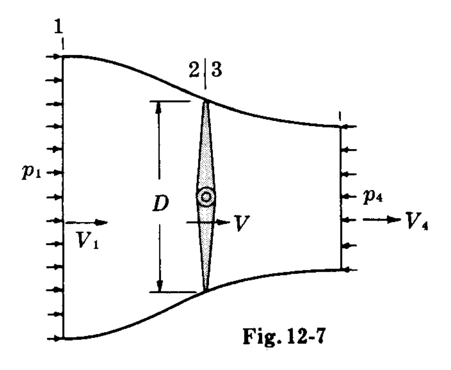


Fig. 12-7

$$\text{Empuje } F = \frac{wQ}{g}(\Delta V) = \frac{wQ}{g}(V_4 - V_1) \qquad (1a)$$

$$= \frac{w}{g}(\tfrac{1}{4}\pi D^2 V)(V_4 - V_1) \qquad (1b)$$

(*b*) La potencia de salida es simplemente P = fuerza de empuje × velocidad

$$= \frac{wQ}{g}(V_4 - V_1)V_1 \qquad (2)$$

(*c*) El empuje F es también igual a $(p_3 - p_2)(\frac{1}{4}\pi D^2)$. Por tanto, de (*1b*),

$$p_3 - p_2 = \frac{w}{g}V(V_4 - V_1) \qquad (3)$$

Aplicando el principio del trabajo y la energía cinética, tomando como unidad 1 m³ y suponiendo que no existen pérdidas de carga, se tiene

Energía cinética inicial/m³ + trabajo realizado/m³ = energía cinética final/m³

$$\tfrac{1}{2}(w/g)V_1^2 + (p_3 - p_2) = \tfrac{1}{2}(w/g)V_4^2$$

de donde
$$p_3 - p_2 = \frac{w}{g}\left(\frac{V_4^2 - V_1^2}{2}\right) \qquad (4)$$

Puede obtenerse el mismo resultado aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2, y 3 y 4 y despejando $(p_3 - p_2)$. Obsérvese que $(p_3 - p_2)$ viene dado en kg/m² × m/m o m kg/m³.

Igualando (*3*) y (*4*),

$$V = \frac{V_1 + V_4}{2} = \frac{V_1 + (V_1 + \Delta V)}{2} = V_1 + \frac{\Delta V}{2} \qquad (5)$$

indicando que la velocidad a través de la hélice es la media de las velocidades delante y detrás de la hélice.

El caudal de fluido Q puede expresarse en función de esta velocidad V, o sea,

$$Q = AV = \tfrac{1}{4}\pi D^2 V = \tfrac{1}{4}\pi D^2\left(\frac{V_1 + V_4}{2}\right) \qquad (6a)$$

o
$$Q = \tfrac{1}{4}\pi D^2(V_1 + \tfrac{1}{2}\Delta V) \qquad (6b)$$

(*d*) El rendimiento de la hélice es

$$e = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{(wQ/g)(V_4 - V_1)V_1}{\frac{1}{2}(wQ/g)(V_4^2 - V_1^2)} = \frac{2V_1}{V_4 + V_1} = \frac{V_1}{V} \qquad (7)$$

representando el denominador la variación de la energía cinética creada por la potencia de entrada.

24. Un modelo de hélice, de 36 cm de diámetro, desarrolla un empuje de 22 kg a una velocidad de 3 m/seg en el agua. (*a*) ¿Qué empuje desarrollaría una hélice semejante de 180 cm a la misma velocidad en el agua? (*b*) ¿Y a la velocidad de 6 m/seg? (*c*) ¿Cuál sería la velocidad en la estela en (*b*)?

Solución:

(*a*) Velocidad lineal $V = r\omega$ o varía como DN. Luego podemos escribir

$$V_m \propto 36N_m \quad \text{y} \quad V_p \propto 180N_p$$

Puesto que las velocidades son iguales, $36N_m = 180N_p$.

Empleando la expresión del coeficiente de empuje, ecuación (*19*), obtenemos

$$\frac{F}{\rho N^2 D^4}\text{modelo} = \frac{F}{\rho N^2 D^4}\text{prototipo}, \qquad \frac{22}{\rho(\frac{180}{36}N_p)^2(36)^4} = \frac{F}{\rho(N_p)^2(180)^4}, \qquad F = 550 \text{ kg}$$

En la ecuación *(19)* el diámetro D está en m y N en revoluciones por segundo. Sin embargo, cuando las relaciones se igualan entre sí, en tanto se empleen las mismas unidades en cada relación (m/m, cm/cm, rpm/rpm), se llega a una solución correcta.

(*b*) En este caso $V_m \propto 36N_m$ y $(2V_m = V_p) \propto 180\ N_p$. Estos valores dan $72N_m = 180N_p$. Luego

$$\frac{22}{\rho(\frac{180}{72}N_p)^2(36)^4} = \frac{F}{\rho N_p^2(180)^4} \qquad \text{y} \qquad F = 2200 \text{ kg}$$

Nota: La relación anterior velocidad lineal-velocidad angular-diámetro puede escribirse de la forma

$$\frac{V}{ND}\text{para modelo} = \frac{V}{ND}\text{para prototipo} \qquad (1)$$

Esta relación se llama relación avance-diámetro puesto que V/N es el recorrido de avance de la hélice en una revolución.

(*c*) La velocidad en la estela (o cambio de velocidad) puede obtenerse resolviendo la ecuación (*6b*) del problema anterior para ΔV una vez sustituido Q por $\frac{F}{\rho \Delta V}$ [de la ecuación (*1a*)]. Luego

$$\frac{F}{\rho \Delta V} = (\tfrac{1}{4}\pi D^2)V_1 + (\tfrac{1}{4}\pi D^2)(\tfrac{1}{2}\Delta V) \qquad \text{y} \qquad (\Delta V)^2 + 2V_1\Delta V - \frac{8F}{\rho\pi D^2} = 0$$

Despejando ΔV y tomando la raíz real se tiene

$$\Delta V = -V_1 + \sqrt{V_1^2 + \frac{8F}{\rho\pi D^2}} \qquad (2)$$

Con los valores anteriores, tomando D en m,

$$\Delta V = -6{,}0 + \sqrt{(6{,}0)^2 + \frac{8 \times 2200}{(1000/9{,}8)\pi(1{,}8)^2}} = 1{,}28 \text{ m/seg} \qquad \text{o} \qquad V_4 = 7{,}28 \text{ m/seg}$$

25. Determinar el coeficiente de empuje de una hélice de 10 cm de diámetro que gira a 1800 rpm y desarrolla un empuje de 1,25 kg en agua dulce.

Solución:

$$\text{Coeficiente de empuje} = \frac{F}{\rho N^2 D^4} = \frac{1{,}25}{(1000/9{,}8)(1800/60)^2(0{,}1)^4} = 0{,}136.$$

El coeficiente es adimensional cuando F viene dado en kg, N en revoluciones/seg y D en m.

26. Los coeficientes de potencia y de empuje de una hélice de 2,4 m de diámetro, moviéndose hacia adelante a 30 m/seg con una velocidad de giro de 2400 rpm, son 0,068 y 0,095, respectivamente. (*a*) Determinar la potencia requerida y el empuje en aire ($\rho = 0{,}125$ UTM/m^3). (*b*) Si la relación avance-diámetro para el rendimiento máximo es 0,70, ¿cuál es la velocidad del aire para el rendimiento máximo?

Solución:

(*a*) Potencia $P = C_p\rho N^3 D^5$ en m kg/seg $= \frac{0{,}068(0{,}125)(2400/60)^3(2{,}4)^5}{75} = 578$ CV.

Empuje $F = C_F\rho N^2 D^4$ en kg $= 0{,}095(0{,}125)(2400/60)^2(2{,}4)^4 = 630$ kg.

(*b*) Puesto que $V/ND = 0{,}70$, $\quad V = 0{,}70(2400/60)(2{,}4) = 67{,}2$ m/seg.

27. Un avión vuela a 290 km/h en aire tranquilo, $w = 1{,}200$ kg/m^3. La hélice tiene 1,70 m de diámetro y la velocidad del aire a través de la hélice es de 97 m/seg. Determinar (*a*) la velocidad en la estela, (*b*) el empuje, (*c*) la potencia de entrada, (*d*) la potencia de salida, (*e*) el rendimiento y (*f*) la diferencia de presión a través de la hélice.

Solución:

Aplicando las expresiones desarrolladas en el Problema 23 anterior, obtenemos, de (*5*),

(*a*) $V = \frac{1}{2}(V_1 + V_4)$, $97 = \frac{1}{2}[290(1000/3600) + V_4]$, $V_4 = 113{,}4$ m/seg (relativa al fuselaje).

(*b*) Empuje $F = \dfrac{w}{g}Q(V_4 - V_1) = \dfrac{1{,}200}{9{,}8}[\frac{1}{4}\pi(1{,}70)^2(97)](113{,}4 - 80{,}6) = 884$ kg.

(*c*) Potencia de entrada $P_e = FV/75 = 884(97)/75 = 1143$ CV.

(*d*) Potencia de salida $P_s = FV_1/75 = 884(80{,}6)/75 = 950$ CV.

(*e*) Rendimiento $e = 950/1143 = 83{,}1\,\%$

o, de la ecuación (*7*) del Problema 23, $e = \dfrac{2V_1}{V_4 + V_1} = \dfrac{2(80{,}6)}{113{,}4 + 80{,}6} = 83{,}1\,\%$.

(*f*) Diferencia de presión $= \dfrac{\text{empuje } F}{\text{área } (\frac{1}{4}\pi D^2)} = \dfrac{884}{\frac{1}{4}\pi(1{,}7)^2} = 389$ kg/m^2

o, de la ecuación (*4*) del Problema 23, diferencia de presión $= \dfrac{1{,}200}{8{,}8}\left(\dfrac{(113{,}4)^2 - (80{,}6)^2}{2}\right) = 389$ kg/m^2.

Problemas propuestos

28. Una rueda de impulsión trabaja bajo una carga efectiva de 190 m. El diámetro del chorro es 10 cm. Para valores de $\phi = 0{,}45$, $c_v = 0{,}98$, $\beta = 160°$ y $v_2 = 0{,}85(V_1 - u)$. Calcular la potencia en el eje. *Sol.* 972 CV

29. Una rueda de impulsión desarrolla 2500 CV bajo una carga efectiva de 274 m. El diámetro de la boquilla es de 12,50 cm, $c_v = 0{,}98$, $\phi = 0{,}46$ y $D/d = 10$. Calcular el rendimiento y la velocidad de giro.
Sol. 77,7 %, 515 rpm

30. Un modelo de turbina, construido a escala 1 : 5, se ha proyectado para desarrollar 4,25 CV al freno a una velocidad de 400 rpm bajo una carga de 1,80 m. Suponiendo rendimientos equivalentes y bajo una carga de 9 m, ¿cuáles serán la velocidad y la potencia de la turbina a escala normal? *Sol.* 178,9 rpm, 1188 CV

31. Determinar el diámetro de la rueda de impulsión y su velocidad de giro a partir de los datos siguientes: $\phi = 0{,}46$, $e = 82\,\%$, $c_v = 0{,}98$, $D/d = 12$, carga = 400 m y potencia cedida = 4800 CV. *Sol.* 152,4 cm, 510,4 rpm

32. Una turbina de reacción girando a velocidad óptima produce 34 CV al freno a 620 rpm bajo una carga de 30 m. Si el rendimiento es del 70,0 % y la relación de velocidad $\phi = 0{,}75$, determinar (*a*) el diámetro de la rueda, (*b*) el caudal en m^3/seg, (*c*) la velocidad característica N_S y (*d*) la potencia al freno y el caudal para una carga de 60 m.
Sol. 56,1 cm, 0,121 m^3/seg, 51,49 rpm, 96,2 CV y 0,171 CV

33. En condiciones de máximo rendimiento una turbina de 125 cm de diámetro desarrolla 300 CV bajo una carga de 4,5 m y a 95 rpm. ¿A qué velocidad giraría una turbina homóloga de 62,5 cm de diámetro si trabaja bajo una carga de 7,5 m? ¿Qué potencia desarrollaría? *Sol.* 245,3 rpm, 161,4 CV

34. Una turbina de impulsión de 150 cm de diámetro desarrolla 625 CV al freno cuando trabaja a 360 rpm bajo una carga de 120 m. (*a*) ¿Bajo qué carga trabajaría una turbina semejante a la misma velocidad a fin de desarrollar 2500 CV al freno? (*b*) Para la carga calculada, ¿qué diámetro debería emplearse? *Sol.* 208,8 m, 197,9 cm

35. La relación de velocidad ϕ de una turbina es 0,70 y la velocidad específica es 90. Determinar el diámetro de la turbina para que la potencia sea 2500 CV con una carga de 100 m. *Sol.* 104 cm

36. De un ensayo sobre una turbina se sacan los siguientes datos: potencia al freno = 22,5 CV, carga = 4,80 m, N = 140 rpm, diámetro de la turbina 90 cm y Q = 0,380 m^3/seg. Calcular la potencia de entrada, el rendimiento, la relación de velocidad y la velocidad específica. *Sol.* 24,32 CV, 92,5 %, 0,70, 96,25

37. Una bomba centrífuga gira a 600 rpm. Se dan los siguientes datos: r_1 = 5 cm, r_2 = 20 cm, A_1 (radial) = 75π cm^2, A_2 (radial) = 180π cm^2, β_1 = 135°, β_2 = 120°, flujo radial a la entrada de los álabes. Despreciando el rozamiento, calcular las velocidades relativas a la entrada y a la salida y la potencia transmitida al agua.
Sol. 4,443 m/seg, 1,451 m/seg, 14,4 CV

38. ¿Cuál será el diámetro de una bomba centrífuga que gira a 750 rpm y bombea 0,250 m^3/seg contra una carga de 9 m? Emplear C_N = 80. *Sol.* 32 cm

39. Una bomba centrífuga suministra 0,070 m^3/seg contra una altura de carga de 7,50 m a 1450 rpm y requiere una potencia de 9,0 CV. Si se reduce la velocidad a 1200 rpm, calcular el caudal, altura y potencia, suponiendo el mismo rendimiento. *Sol.* 0,058 m^3/seg, 5,14 m, 5,1 CV

40. Una hélice de 200 cm de diámetro gira a 1200 rpm en una corriente de aire que se mueve a 40 m/seg. Las pruebas realizadas indican un empuje de 325 kg y una potencia absorbida de 220 CV. Calcular, para una densidad del aire de 0,125 UTM/m^3, los coeficientes de empuje y potencia. *Sol.* 0,406, 0,516

41. Una hélice de 1,50 m de diámetro se mueve en agua a 9 m/seg y desarrolla un empuje de 1600 kg. ¿Cuál es el aumento en la velocidad de la estela? *Sol.* 0,937 m/seg

42. Una hélice de 20 cm desarrolla un empuje de 7,20 kg a 140 rpm y una velocidad del agua de 3,6 m/seg. Para una hélice semejante de un barco que se mueve a 7,2 m/seg, ¿qué dimensión deberá tener la hélice para que desarrolle un empuje de 18.000 kg? ¿A qué velocidad deberá girar la hélice? *Sol.* 500 cm, 11,2 rpm

43. En una chimenea de ventilación un ventilador produce una velocidad de aire de 25 m/seg cuando gira a 1200 rpm. (*a*) ¿Qué velocidad producirá si el ventilador gira a 1750 rpm? (*b*) Si un motor de 3,25 CV arrastra al ventilador a 1200 rpm, ¿qué potencia deberá tener el motor para llevar al ventilador a 1750 rpm?
Sol. 36,458 m/seg, 10,08 CV

44. Para suministrar 2500 m^3/min de aire a un túnel de ventilación, ¿qué potencia deberá tener el motor de un ventilador si las pérdidas en el túnel son 14,4 cm de agua y si el rendimiento del ventilador es del 68 %? Emplear w_{aire} = 1,200 kg/m^3. *Sol.* 117,65 CV

45. Una hélice de 3 m de diámetro se mueve a través del aire, w = 1,222 kg/m^3, a 90 m/seg. Si se suministran 1200 CV a la hélice, ¿qué empuje desarrollará y cuál será el rendimiento de la hélice? *Sol.* 941,5 kg, 94,15 %

APENDICES

Tablas y diagramas

S

I

TABLA 1

(*A*) PROPIEDADES APROXIMADAS DE ALGUNOS GASES

Gas	Peso específico w a 20° C, 1 Atm. kg/m³	Constante R del gas m/°K	Exponente adiabático k	Viscosidad cinemática ν a 20° C, 1 Atm. m²/seg
Aire	1,2047	29,3	1,40	1,488 × 10^{-5}
Amoniaco	0,7177	49,2	1,32	1,535
Anhídrido carbónico	1,8359	19,2	1,30	0,846
Metano	0,6664	53,0	1,32	1,795
Nitrógeno	1,1631	30,3	1,40	1,590
Oxígeno	1,3297	26,6	1,40	1,590
Anhídrido sulfuroso	2,7154	13,0	1,26	0,521

(*B*) ALGUNAS PROPIEDADES DEL AIRE A LA PRESION ATMOSFERICA

Temperatura °C	Densidad ρ UTM/m³	Peso específico w kg/m³	Viscosidad cinemática ν m²/seg	Viscosidad dinámica μ kg seg/m²
−20	0,1424	1,3955	1,188 × 10^{-5}	16,917 × 10^{-7}
−10	0,1370	1,3426	1,233	16,892
0	0,1319	1,2926	1,320	17,411
10	0,1273	1,2475	1,415	18,013
20	0,1229	1,2047	1,488	18,288
30	0,1188	1,1642	1,600	19,008
40	0,1150	1,1270	1,688	19,412
50	0,1115	1,0927	1,769 × 10^{-5}	19,724 × 10^{-7}

(*C*) PROPIEDADES MECANICAS DEL AGUA A LA PRESION ATMOSFERICA

Temp. °C	Densidad UTM/m³	Peso específico kg/m³	Viscosidad dinámica kg seg/m²	Tensión superficial kg/m	Presión de vapor kg/cm² (ab)	Módulo de elasticidad volumétrico kg/cm²
0	101,96	999,87	18,27 × 10^{-5}	0,00771	0,0056	20200
5	101,97	999,99	15,50	0,00764	0,0088	20900
10	101,95	999,73	13,34	0,00756	0,0120	21500
15	101,88	999,12	11,63	0,00751	0,0176	22000
20	101,79	998,23	10,25	0,00738	0,0239	22400
25	101,67	997,07	9,12	0,00735	0,0327	22800
30	101,53	995,68	8,17	0,00728	0,0439	23100
35	101,37	994,11	7,37	0,00718	0,0401	23200
40	101,18	992,25	6,69	0,00711	0,0780	23300
50	100,76	988,07	5,60 × 10^{-5}	0,00693	0,1249	23400

TABLA 2

DENSIDAD RELATIVA Y VISCOSIDAD CINEMATICA DE ALGUNOS LIQUIDOS

(Viscosidad cinemática = valor de la tabla × 10^{-6})

	Agua**		**Disolvente comercial**		**Tetracloruro de carbono**		**Aceite lubricante medio**	
Temp. °C	Densid. relat.	Visc. cinem. m^2/seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m^2/seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m^2/seg	Densid. relat.	Viscos. cinem. m^2/seg
5	1,000	1,520	0,728	1,476	1,620	0,763	0,905	471
10	1,000	1,308	0,725	1,376	1,608	0,696	0,900	260
15	0,999	1,142	0,721	1,301	1,595	0,655	0,896	186
20	0,998	1,007	0,718	1,189	1,584	0,612	0,893	122
25	0,997	0,897	0,714	1,101	1,572	0,572	0,890	92
30	0,995	0,804	0,710	1,049	1,558	0,531	0,886	71
35	0,993	0,727	0,706	0,984	1,544	0,504	0,883	54,9
40	0,991	0,661	0,703	0,932	1,522	0,482	0,875	39,4
50	0,990	0,556					0,866	25,7
65	0,980	0,442					0,865	15,4

	Aceite a prueba de polvo*		**Fuel-oil medio***		**Fuel-oil pesado***		**Gasolina***	
Temp. °C	Densid. relat.	Visc. cinem. m^2/seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m^2/seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m^2/seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m^2/seg
5	0,917	72,9	0,865	6,01	0,918	400	0,737	0,749
10	0,913	52,4	0,861	5,16	0,915	290	0,733	0,710
15	0,910	39,0	0,857	4,47	0,912	201	0,729	0,683
20	0,906	29,7	0,855	3,94	0,909	156	0,725	0,648
25	0,903	23,1	0,852	3,44	0,906	118	0,721	0,625
30	0,900	18,5	0,849	3,11	0,904	89	0,717	0,595
35	0,897	15,2	0,846	2,77	0,901	67,9	0,713	0,570
40	0,893	12,9	0,842	2,39	0,898	52,8	0,709	0,545

Algunos otros líquidos

Líquido y temperatura	Densid. relat.	Visc. cinem. m^2/seg
Turpentina a 20° C	0,862	1,73
Aceite de linaza a 30° C	0,925	35,9
Alcohol etílico a 20° C	0,789	1,54
Benceno a 20° C	0,879	0,745
Glicerina a 20° C	1,262	662
Aceite de castor a 20° C	0,960	1030
Aceite ligero de máq. a 16,5° C	0,907	137

* Kessler y Lenz, Universidad de Wisconsin, Madison.
** ASCE Manual 25.

TABLA 3

COEFICIENTES DE FRICCION f PARA AGUA SOLAMENTE

(Intervalo de temperatura aproximado de 10° C a 21° C)

Para tuberías viejas – intervalo aproximado de ϵ: 0,12 cm a 0,60 cm
Para tuberías usadas – intervalo aproximado de ϵ: 0,06 cm a 0,09 cm
Para tuberías nuevas – intervalo aproximado de ϵ: 0,015 cm a 0,03 cm
(f = valor tabulado × 10^{-4})

Diámetro y tipo de tubería		VELOCIDAD (m/seg)										
		0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,4	3,0	4,5	6,0	9,0
10 cm	Comercial vieja	435	415	410	405	400	395	395	390	385	375	370
	Comercial usada	355	320	310	300	290	285	280	270	260	250	250
	Tubería nueva	300	265	250	240	230	225	220	210	200	190	185
	Muy lisa	240	205	190	180	170	165	155	150	140	130	120
15 cm	Comercial vieja	425	410	405	400	395	395	390	385	380	375	365
	Comercial usada	335	310	300	285	280	275	265	260	250	240	235
	Tubería nueva	275	250	240	225	220	210	205	200	190	180	175
	Muy lisa	220	190	175	165	160	150	145	140	130	120	115
20 cm	Comercial vieja	420	405	400	395	390	385	380	375	370	365	360
	Comercial usada	320	300	285	280	270	265	260	250	240	235	225
	Tubería nueva	265	240	225	220	210	205	200	190	185	175	170
	Muy lisa	205	180	165	155	150	140	135	130	120	115	110
25 cm	Comercial vieja	415	405	400	395	390	385	380	375	370	365	360
	Comercial usada	315	295	280	270	265	260	255	245	240	230	225
	Tubería nueva	260	230	220	210	205	200	190	185	180	170	165
	Muy lisa	200	170	160	150	145	135	130	125	115	110	105
30 cm	Comercial vieja	415	400	395	395	390	385	380	375	365	360	355
	Comercial usada	310	285	275	265	260	255	250	240	235	225	220
	Tubería nueva	250	225	210	205	200	195	190	180	175	165	160
	Muy lisa	190	165	150	140	140	135	125	120	115	110	105
40 cm	Comercial vieja	405	395	390	385	380	375	370	365	360	350	350
	Comercial usada	300	280	265	260	255	250	240	235	225	215	210
	Tubería nueva	240	220	205	200	195	190	180	175	170	160	155
	Muy lisa	180	155	140	135	130	125	120	115	110	105	100
50 cm	Comercial vieja	400	395	390	385	380	375	370	365	360	350	350
	Comercial usada	290	275	265	255	250	245	235	230	220	215	205
	Tubería nueva	230	210	200	195	190	180	175	170	165	160	150
	Muy lisa	170	150	135	130	125	120	115	110	105	100	95
60 cm	Comercial vieja	400	395	385	380	375	370	365	360	355	350	345
	Comercial usada	285	265	255	250	245	240	230	225	220	210	200
	Tubería nueva	225	200	195	190	185	180	175	170	165	155	150
	Muy lisa	165	140	135	125	120	120	115	110	105	100	95
75 cm	Comercial vieja	400	385	380	375	370	365	360	355	350	350	345
	Comercial usada	280	255	250	245	240	230	225	220	210	205	200
	Tubería nueva	220	195	190	185	180	175	170	165	160	155	150
	Muy lisa	160	135	130	120	115	115	110	110	105	100	95
90 cm	Comercial vieja	395	385	375	370	365	360	355	355	350	345	340
	Comercial usada	275	255	245	240	235	230	225	220	210	200	195
	Tubería nueva	215	195	185	180	175	170	165	160	155	150	145
	Muy lisa	150	135	125	120	115	110	110	105	100	95	90
120 cm	Comercial vieja	395	385	370	365	360	355	350	350	345	340	335
	Comercial usada	265	250	240	230	225	220	215	210	200	195	190
	Tubería nueva	205	190	180	175	170	165	160	155	150	145	140
	Muy lisa	140	125	120	115	110	110	105	100	95	90	90

TABLA 4

PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS

(Subíndice 1 = aguas arriba y subíndice 2 = aguas abajo)

Accesorio	Pérdida de carga media
1. De depósito a tubería – conexión a ras de la pared (pérdida a la entrada)	$0{,}50\,\frac{V_2^2}{2g}$
– tubería entrante	$1{,}00\,\frac{V_2^2}{2g}$
– conexión abocinada	$0{,}05\,\frac{V_2^2}{2g}$
2. De tubería a depósito (pérdida a la salida)	$1{,}00\,\frac{V_1^2}{2g}$
3. Ensanchamiento brusco	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Ensanchamiento gradual (véase Tabla 5)	$K\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturímetros, boquillas y orificios	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right)\frac{V_2^2}{2g}$
6. Contracción brusca (véase Tabla 5)	$K_c\,\frac{V_2^2}{2g}$
7. Codos, accesorios, válvulas* Algunos valores corrientes de K son: 45°, codo . . . . 0,35 a 0,45 90°, codo . . . . 0,50 a 0,75 Tes . . . . 1,50 a 2,00 Válvulas de compuerta (abierta) . . . . . aprox. 0,25 Válvulas de control (abierta) . . . . aprox. 3,0	$K\,\frac{V^2}{2g}$

* Véanse manuales de hidráulica para más detalles.

TABLA 5

VALORES DE K*

Contracciones y ensanchamientos

Contracción brusca		Ensanchamiento gradual para un ángulo total del cono						
d_1/d_2	K_c	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1,2	0,08	0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
1,4	0,17	0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,50	0,53
1,6	0,26	0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
1,8	0,34	0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
2,0	0,37	0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
2,5	0,41	0,04	0,08	0,16	0,30	0,48	0,65	0,70
3,0	0,43	0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
4,0	0,45	0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
5,0	0,46	0,04	0,08	0,16	0,31	0,50	0,67	0,72

* Valores tomados de King, *Handbook of Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company.

TABLA 6

ALGUNOS VALORES DEL COEFICIENTE C_1 DE HAZEN-WILLIAMS

Tuberías rectas y muy lisas	140
Tuberías de fundición lisas y nuevas	130
Tuberías de fundición usadas y de acero roblonado nuevas	110
Tuberías de alcantarillado vitrificadas	110
Tuberías de fundición con algunos años de servicio	100
Tuberías de fundición en malas condiciones	80

TABLA 7

COEFICIENTES DE DESAGÜE PARA ORIFICIOS CIRCULARES DE ARISTA VIVA

Para agua a 15° C vertiendo en aire a la misma temperatura

Altura de carga en metros	Diámetro del orificio en cm					
	0,625	1,250	1,875	2,500	5,00	10,00
0,24	0,647	0,627	0,616	0,609	0,603	0,601
0,42	0,635	0,619	0,610	0,605	0,601	0,600
0,60	0,629	0,615	0,607	0,603	0,600	0,599
1,20	0,621	0,609	0,603	0,600	0,598	0,597
1,80	0,617	0,607	0,601	0,599	0,597	0,596
2,40	0,614	0,605	0,600	0,598	0,596	0,595
3,00	0,613	0,604	0,600	0,597	0,596	0,595
3,60	0,612	0,603	0,599	0,597	0,595	0,595
4,20	0,611	0,603	0,598	0,596	0,595	0,594
4,80	0,610	0,602	0,598	0,596	0,595	0,594
6,00	0,609	0,602	0,598	0,596	0,595	0,594
7,50	0,608	0,601	0,597	0,596	0,594	0,594
9,00	0,607	0,600	0,597	0,595	0,594	0,594
12,00	0,606	0,600	0,596	0,595	0,594	0,593
15,00	0,605	0,599	0,596	0,595	0,594	0,593
18,00	0,605	0,599	0,596	0,594	0,593	0,593

Fuente: F. W. Medaugh y G. D. Johnson, Civil Engr., julio 1940, pág. 424.

TABLA 8

ALGUNOS FACTORES DE EXPANSION *Y* PARA FLUJO COMPRESIBLE A TRAVES DE TOBERAS Y VENTURIMETROS

p_2/p_1	k	Relación de diámetros (d_2/d_1)				
		0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
0,95	1,40 1,30 1,20	0,973 0,970 0,968	0,972 0,970 0,967	0,971 0,968 0,966	0,968 0,965 0,963	0,962 0,959 0,956
0,90	1,40 1,30 1,20	0,944 0,940 0,935	0,943 0,939 0,933	0,941 0,936 0,931	0,935 0,931 0,925	0,925 0,918 0,912
0,85	1,40 1,30 1,20	0,915 0,910 0,902	0,914 0,907 0,900	0,910 0,904 0,896	0,902 0,896 0,887	0,887 0,880 0,870
0,80	1,40 1,30 1,20	0,886 0,876 0,866	0,884 0,873 0,864	0,880 0,869 0,859	0,868 0,857 0,848	0,850 0,839 0,829
0,75	1,40 1,30 1,20	0,856 0,844 0,820	0,853 0,841 0,818	0,846 0,836 0,812	0,836 0,823 0,798	0,814 0,802 0,776
0,70	1,40 1,30 1,20	0,824 0,812 0,794	0,820 0,808 0,791	0,815 0,802 0,784	0,800 0,788 0,770	0,778 0,763 0,745

Para $p_2/p_1 = 1{,}00$, $Y = 1{,}00$.

TABLA 9

ALGUNOS VALORES MEDIOS DE *n* EMPLEADOS EN LAS FORMULAS DE KUTTER Y MANNING Y DE *m* EN LA FORMULA DE BAZIN

Tipo de canal abierto	n	m
Cemento muy pulido, madera muy bien acepillada	0,010	0,11
Madera acepillada, acequias de duelas de madera nuevas, fundición	0,012	0,20
Tubería de alcantarillado bien vitrificada, buena mampostería, tubería de hormigón, ordinario, madera sin acepillar, acequias de balasto liso	0,013	0,29
Tubería de alcantarillado de arcilla ordinaria y tubería de fundición ordinaria, cemento con pulido ordinario	0,015	0,40
Canales de tierra, rectos y bien conservados	0,023	1,54
Canales de tierra dragados en condiciones ordinarias	0,027	2,36
Canales labrados en roca	0,040	3,50
Ríos en buenas condiciones	0,030	3,00

TABLA 10

VALORES DE *C* DE LA FORMULA DE KUTTER

Pendiente *S*	*n*	Radio hidráulico *R* en metros														
		0,06	0,09	0,12	0,18	0,24	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,20	1,80	2,40	3,00	4,50
0,00005	0,010	48	54	60	68	73	77	85	91	95	98	103	110	114	118	121
	0,012	38	43	49	54	59	62	70	75	78	82	87	93	97	100	104
	0,015	29	32	36	42	46	49	55	59	62	65	70	76	80	83	88
	0,017	24	28	31	36	40	43	47	51	54	57	62	67	71	74	78
	0,020	19	23	25	29	33	35	40	44	46	49	52	58	61	64	69
	0,025	14	17	19	23	25	27	31	34	36	39	43	47	51	53	57
	0,030	12	14	15	18	20	22	26	28	30	32	36	41	43	46	50
0,0001	0,010	54	60	65	72	77	81	87	92	95	98	103	108	112	114	117
	0,012	42	47	52	58	62	66	72	76	79	82	86	91	94	96	99
	0,015	31	35	40	45	49	51	57	60	63	65	69	74	77	79	83
	0,017	26	30	34	39	41	44	49	52	55	57	61	65	69	71	75
	0,020	21	25	28	31	35	37	41	45	47	49	52	56	59	61	65
	0,025	15	19	21	24	26	28	33	35	37	39	43	46	49	51	54
	0,030	13	15	17	19	22	23	26	29	30	33	35	40	41	44	47
0,0002	0,010	58	63	69	76	80	83	89	93	96	98	102	107	109	112	114
	0,012	46	51	55	61	65	68	73	77	79	82	85	89	92	94	97
	0,015	34	38	42	46	50	53	58	61	63	65	68	73	76	77	80
	0,017	29	33	36	40	43	46	50	54	55	57	61	65	67	69	72
	0,020	23	26	29	33	36	38	42	45	47	49	52	55	58	60	62
	0,025	17	19	22	25	28	30	33	36	38	39	42	46	47	50	52
	0,030	14	15	18	20	22	24	27	29	31	33	35	38	41	43	45
0,0004	0,010	61	67	71	77	82	84	91	94	96	98	102	106	108	110	112
	0,012	48	52	57	62	66	69	74	78	80	82	84	89	91	93	95
	0,015	35	40	43	48	51	54	59	62	63	65	68	72	74	76	78
	0,017	30	34	38	41	44	46	51	54	56	57	61	64	66	68	71
	0,020	24	28	30	34	37	39	43	46	47	49	52	55	57	59	61
	0,025	18	20	23	26	28	30	33	36	38	39	41	45	47	49	51
	0,030	14	17	18	21	23	24	28	30	31	33	35	38	40	41	44
0,001	0,010	62	68	73	79	83	86	91	95	97	98	102	105	108	109	111
	0,012	49	54	58	63	67	70	75	78	80	82	85	88	91	92	94
	0,015	36	41	44	49	52	54	59	62	64	66	68	72	73	75	78
	0,017	30	35	38	42	45	47	51	54	56	58	61	63	66	67	70
	0,020	25	28	31	34	38	39	43	46	48	49	51	54	57	58	60
	0,025	18	21	24	26	29	30	34	36	38	39	41	45	46	48	50
	0,030	15	17	19	21	23	25	28	30	31	33	35	38	40	41	43
0,01	0,010	63	69	73	79	83	86	91	95	97	98	102	105	107	108	110
	0,012	49	55	59	64	67	71	75	78	80	82	85	88	90	92	94
	0,015	37	42	45	49	52	55	59	62	64	66	68	71	73	75	77
	0,017	31	35	38	43	45	47	51	55	57	58	60	63	65	67	70
	0,020	25	29	31	35	38	40	43	46	48	49	51	54	56	58	60
	0,025	19	22	24	27	29	31	34	36	38	39	41	44	46	47	50
	0,030	15	17	19	22	24	25	28	30	32	33	35	37	39	40	43

TABLA 11*

VALORES DEL FACTOR DE DESCARGA K EN $Q = (K/n)y^{8/3}S^{1/2}$ PARA CANALES TRAPEZOIDALES

(y = profundidad de la corriente, b = anchura de la solera del canal)

Pendientes de los lados de la sección del canal (horizontal a vertical)

y/b	Vertical	$\frac{1}{4}:1$	$\frac{1}{2}:1$	$\frac{3}{4}:1$	$1:1$	$1\frac{1}{2}:1$	$2:1$	$2\frac{1}{2}:1$	$3:1$	$4:1$
0,01	98,7	99,1	99,3	99,6	99,8	100,1	100,4	100,6	100,9	101,3
0,02	48,7	49,1	49,4	49,6	49,8	50,1	50,4	50,7	50,9	51,3
0,03	32,0	32,4	32,7	33,0	33,2	33,5	33,8	34,1	34,3	34,7
0,04	23,8	24,1	24,4	24,6	24,8	25,2	25,4	25,7	26,0	26,4
0,05	18,8	19,1	19,4	19,7	19,9	20,2	20,5	20,8	21,0	21,5
0,06	15,5	15,8	16,1	16,4	16,6	16,9	17,2	17,5	17,7	18,2
0,07	13,12	13,46	13,73	14,0	14,2	14,5	14,8	15,1	15,3	15,9
0,08	11,31	11,64	11,98	12,18	12,38	12,72	13,06	13,33	13,59	14,13
0,09	9,96	10,30	10,57	10,83	11,04	11,37	11,71	11,98	12,25	12,79
0,10	8,88	9,22	9,49	9,69	9,96	10,30	10,57	10,90	11,17	11,71
0,11	7,96	8,30	8,59	8,82	9,03	9,35	9,69	10,03	10,30	10,83
0,12	7,22	7,56	7,84	8,08	8,28	8,61	8,95	9,29	9,56	10,09
0,13	6,60	6,92	7,21	7,44	7,65	8,01	8,34	8,61	8,95	9,49
0,14	6,06	6,39	6,67	6,90	7,11	7,47	7,81	8,08	8,41	9,02
0,15	5,60	5,92	6,20	6,44	6,65	7,00	7,34	7,67	7,94	8,55
0,16	5,20	5,52	5,79	6,03	6,24	6,60	6,92	7,23	7,54	8,14
0,17	4,84	5,16	5,44	5,67	5,88	6,25	6,58	6,88	7,19	7,81
0,18	4,53	4,85	5,12	5,36	5,57	5,93	6,26	6,57	6,87	7,47
0,19	4,25	4,56	4,84	5,07	5,28	5,65	5,98	6,29	6,60	7,20
0,20	4,00	4,31	4,58	4,82	5,03	5,39	5,72	6,04	6,35	6,93
0,22	3,57	3,88	4,15	4,38	4,59	4,95	5,29	5,61	5,92	6,53
0,24	3,21	3,51	3,78	4,01	4,22	4,59	4,93	5,24	5,56	6,18
0,26	2,91	3,21	3,47	3,71	3,92	4,29	4,62	4,95	5,26	5,88
0,28	2,66	2,95	3,21	3,45	3,65	4,02	4,36	4,68	5,00	5,63
0,30	2,44	2,73	2,99	3,22	3,43	3,80	4,14	4,46	4,78	5,41
0,32	2,25	2,54	2,79	3,02	3,23	3,60	3,94	4,27	4,59	5,22
0,34	2,08	2,36	2,62	2,85	3,06	3,43	3,77	4,10	4,41	5,05
0,36	1,94	2,21	2,47	2,70	2,90	3,28	3,62	3,94	4,27	4,90
0,38	1,80	2,08	2,34	2,56	2,77	3,14	3,48	3,81	4,13	4,77
0,40	1,69	1,97	2,21	2,44	2,64	3,01	3,36	3,69	4,01	4,65
0,42	1,59	1,86	2,11	2,33	2,54	2,91	3,25	3,58	3,90	4,54
0,44	1,49	1,76	2,01	2,23	2,44	2,81	3,15	3,48	3,81	4,44
0,46	1,41	1,67	1,92	2,14	2,34	2,72	3,06	3,39	3,71	4,35
0,48	1,33	1,59	1,83	2,06	2,26	2,63	2,98	3,31	3,63	4,27
0,50	1,26	1,52	1,76	1,98	2,19	2,56	2,90	3,24	3,56	4,20
0,55	1,11	1,36	1,59	1,82	2,02	2,39	2,74	3,07	3,40	4,04
0,60	0,983	1,23	1,46	1,68	1,88	2,25	2,60	2,93	3,26	3,90
0,70	0,794	1,03	1,26	1,47	1,67	2,04	2,39	2,72	3,05	3,69
0,80	0,661	0,882	1,10	1,31	1,51	1,88	2,23	2,56	2,89	3,54
0,90	0,559	0,774	0,989	1,20	1,39	1,76	2,11	2,44	2,77	3,42
1,00	0,481	0,686	0,895	1,10	1,30	1,66	2,01	2,34	2,67	3,32
1,20	0,369	0,563	0,767	0,962	1,16	1,52	1,86	2,20	2,53	3,18
1,40	0,293	0,476	0,672	0,868	1,06	1,42	1,76	2,10	2,42	3,08
1,60	0,240	0,415	0,604	0,794	0,983	1,35	1,69	2,02	2,35	2,99
1,80	0,201	0,367	0,552	0,740	0,929	1,29	1,63	1,96	2,29	2,93
2,00	0,171	0,330	0,511	0,700	0,882	1,24	1,58	1,91	2,24	2,89
2,25	0,143	0,295	0,471	0,655	0,834	1,19	1,53	1,86	2,19	2,84

* Valores tomados de King, de *Handbook of Hydraulics*, 4.ª ed., McGraw-Hill Co.

TABLA 12*

VALORES DEL FACTOR DE DESCARGA K' EN $Q = (K'/n)b^{8/3}S^{1/2}$ PARA CANALES TRAPEZOIDALES

(y = profundidad de la corriente, b = anchura de la solera del canal)

Pendientes de los lados de la sección del canal (horizontal a vertical)

y/b	Vertical	$\frac{1}{4}:1$	$\frac{1}{2}:1$	$\frac{3}{4}:1$	1 : 1	$1\frac{1}{2}:1$	2 : 1	$2\frac{1}{2}:1$	3 : 1	4 : 1
0,01	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00047	0,00047
0,02	0,00143	0,00145	0,00145	0,00146	0,00147	0,00148	0,00149	0,00149	0,00150	0,00151
0,03	0,00279	0,00282	0,00285	0,00287	0,00288	0,00291	0,00293	0,00295	0,00298	0,00302
0,04	0,00444	0,00451	0,00457	0,00461	0,00465	0,00471	0,00476	0,00482	0,00489	0,00495
0,05	0,00637	0,00649	0,00659	0,00667	0,00674	0,00686	0,00695	0,00705	0,00713	0,00731
0,06	0,00855	0,00875	0,00888	0,00902	0,00915	0,00929	0,00949	0,00962	0,00976	0,01009
0,07	0,01090	0,01117	0,01144	0,01164	0,01178	0,01211	0,01231	0,01258	0,01277	0,01326
0,08	0,01346	0,0139	0,0142	0,0145	0,0147	0,0151	0,0155	0,0159	0,0162	0,0168
0,09	0,0162	0,0168	0,0172	0,0176	0,0180	0,0185	0,0190	0,0194	0,0199	0,0209
0,10	0,0191	0,0198	0,0205	0,0209	0,0214	0,0221	0,0228	0,0234	0,0241	0,0253
0,11	0,0221	0,0231	0,0238	0,0245	0,0251	0,0260	0,0269	0,0278	0,0285	0,0301
0,12	0,0253	0,0264	0,0275	0,0283	0,0290	0,0303	0,0314	0,0324	0,0334	0,0355
0,13	0,0286	0,0300	0,0312	0,0323	0,0332	0,0347	0,0361	0,0374	0,0387	0,0413
0,14	0,0320	0,0338	0,0353	0,0365	0,0376	0,0395	0,0412	0,0428	0,0443	0,0475
0,15	0,0355	0,0376	0,0394	0,0409	0,0422	0,0445	0,0466	0,0485	0,0504	0,0542
0,16	0,0392	0,0417	0,0437	0,0455	0,0471	0,0498	0,0523	0,0546	0,0569	0,0614
0,17	0,0429	0,0458	0,0482	0,0503	0,0522	0,0554	0,0583	0,0610	0,0637	0,0690
0,18	0,0468	0,0501	0,0529	0,0553	0,0575	0,0612	0,0646	0,0678	0,0710	0,0773
0,19	0,0507	0,0544	0,0577	0,0605	0,0630	0,0764	0,0713	0,0750	0,0787	0,0859
0,20	0,0546	0,0590	0,0627	0,0659	0,0687	0,0738	0,0783	0,0826	0,0868	0,0952
0,22	0,0629	0,0683	0,0734	0,0774	0,0808	0,0875	0,0935	0,0989	0,1043	0,1151
0,24	0,0714	0,0781	0,0841	0,0895	0,0942	0,1023	0,1097	0,1164	0,1238	0,1373
0,26	0,0801	0,0882	0,0956	0,1023	0,1077	0,1178	0,1272	0,1359	0,1447	0,1622
0,28	0,0888	0,0989	0,108	0,116	0,122	0,135	0,146	0,157	0,168	0,189
0,30	0,0983	0,1097	0,120	0,130	0,138	0,153	0,167	0,180	0,193	0,218
0,32	0,1077	0,1211	0,134	0,145	0,155	0,172	0,189	0,205	0,220	0,250
0,34	0,1171	0,133	0,147	0,160	0,172	0,193	0,213	0,231	0,256	0,285
0,36	0,1272	0,145	0,162	0,177	0,190	0,215	0,238	0,259	0,280	0,322
0,38	0,137	0,157	0,177	0,194	0,210	0,238	0,264	0,289	0,313	0,361
0,40	0,147	0,170	0,192	0,212	0,229	0,262	0,292	0,320	0,349	0,404
0,42	0,157	0,184	0,208	0,230	0,251	0,287	0,322	0,354	0,386	0,450
0,44	0,167	0,197	0,225	0,250	0,273	0,314	0,353	0,390	0,426	0,498
0,46	0,178	0,211	0,242	0,270	0,295	0,343	0,386	0,428	0,468	0,549
0,48	0,188	0,225	0,259	0,291	0,319	0,372	0,421	0,468	0,513	0,604
0,50	0,199	0,239	0,277	0,312	0,344	0,402	0,457	0,509	0,561	0,662
0,55	0,225	0,276	0,324	0,369	0,410	0,486	0,556	0,623	0,690	0,821
0,60	0,252	0,315	0,375	0,431	0,483	0,577	0,666	0,752	0,834	1,003
0,70	0,308	0,398	0,485	0,568	0,645	0,787	0,922	1,050	1,178	1,427
0,80	0,365	0,488	0,610	0,725	0,834	1,036	1,231	1,413	1,595	1,952
0,90	0,423	0,585	0,747	0,902	1,050	1,332	1,588	1,844	2,093	2,577
1,00	0,480	0,688	0,895	1,104	1,299	1,662	2,012	2,342	2,672	3,318
1,20	0,600	0,915	1,245	1,568	1,878	2,470	3,035	3,580	4,112	5,162
1,40	0,720	1,171	1,649	2,127	2,591	3,479	4,320	5,141	5,949	7,537
1,60	0,841	1,454	2,113	2,786	3,445	4,704	5,908	7,079	8,210	10,498
1,80	0,962	1,763	2,645	3,553	4,441	6,157	7,806	9,421	10,969	14,065
2,00	1,083	2,100	3,244	4,428	5,599	7,873	10,027	12,180	14,266	18,371
2,25	1,238	2,564	4,098	5,693	7,268	10,363	13,324	16,218	19,112	24,697

* Valores tomados de King, de *Handbook of Hydraulics*, 4.ª ed., McGraw-Hill Co.

TABLA 13

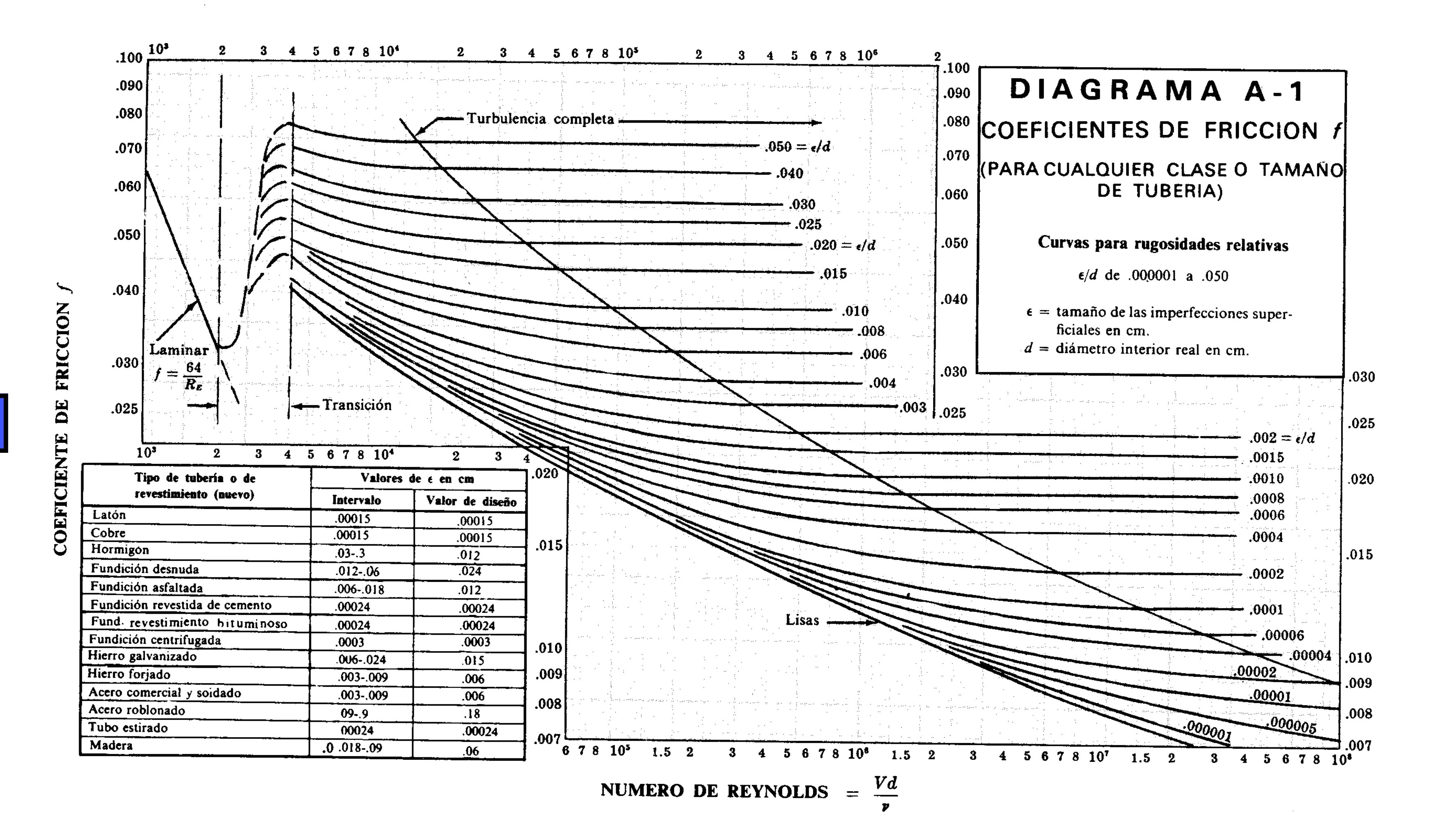
AREAS DE CIRCULOS

Diámetro interior (cm)	Area (cm^2)	Diámetro interior (cm^2)	Area (cm^2)
2,0	3,14	25	490,9
2,5	4,91	30	706,9
3,0	7,07	35	962,1
3,5	9,62	40	1.257
4,0	12,57	45	1.590
4,5	15,90	50	1.964
5,0	19,64	75	4.418
5,5	23,76	100	7.854
6,0	28,27	125	12.272
7,0	38,48	150	17.672
8,0	50,27	175	24.053
9,0	63,62	200	31.416
10,0	78,54	225	39.761
15,0	176,7	250	49.087
20,0	314,2	300	70.686

TABLA 14

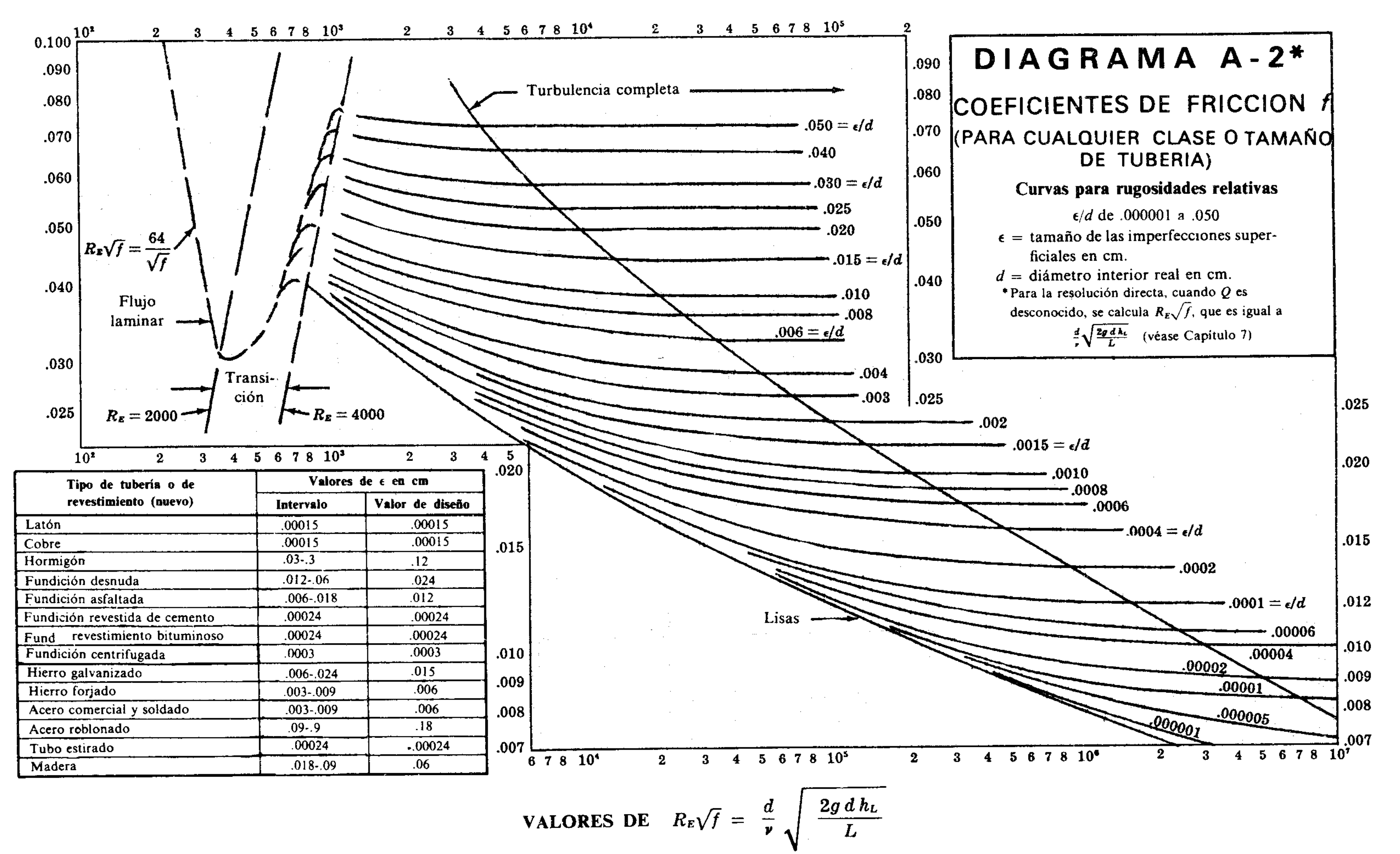
PESOS Y DIMENSIONES DE TUBERIAS DE FUNDICION

Diám. Nom. de tubería		Tubería tipo A (carga 30 m)			Tubería tipo B (carga 60 m)			Tubería tipo C (carga 90 m)		
(in)	(cm aprox.)	Espesor de pared (cm)	Diám. interior (cm)	Peso (kg/m)	Espesor de pared (cm)	Diám. interior (cm)	Peso (kg/m)	Espesor de pared (cm)	Diám. interior (cm)	Peso (kg/m)
4	10	1,07	10,06	29,8	1,14	10,41	32,3	1,22	10,26	34,7
6	15	1,12	15,29	45,8	1,22	15,60	49,6	1,30	15,44	53,3
8	20	1,17	20,65	63,9	1,30	20,40	70,7	1,42	20,78	77,6
10	25	1,27	25,65	85,0	1,45	25,30	95,0	1,57	25,81	105,4
12	30	1,37	30,78	107,9	1,57	30,38	122,2	1,73	30,84	136,5
14	35	1,45	35,97	133,4	1,68	35,51	152,6	1,88	35,99	173,7
16	40	1,52	41,15	161,2	1,78	40,64	186,1	2,03	41,15	214,0
18	45	1,63	46,28	192,3	1,91	45,72	223,3	2,21	46,18	260,5
20	50	1,70	51,46	223,3	2,03	50,80	260,5	2,34	51,36	310,1
24	60	1,93	61,67	304,0	2,26	61,01	347,3	2,64	61,57	415,6
30	75	2,24	76,15	434,2	2,62	76,05	496,1	3,05	76,20	595,4
36	90	2,51	91,39	583,1	2,92	91,44	676,1	3,45	91,39	812,4
42	105	2,79	106,68	762,9	3,25	106,53	880,8	3,91	106,73	1.066,8
48	120	3,20	121,87	992,4	3,61	121,82	1.116,4	4,34	121,87	1.352,0
54	135	3,43	137,06	1.190,8	3,94	137,16	1.389,2	4,83	137,16	1.699,9
60	150	3,53	152,45	1.364,5	4,24	152,55	1.643,3	5,08	152,91	1.997,6
72	180	4,11	183,13	1.908,3	4,95	183,13	2.302,7	6,07	183,13	2.834,2
84	210	4,37	213,61	2.435,2	5,64	213,61	3.131,9			



Tipo de tubería o de revestimiento (nuevo)	Valores de ϵ en cm	
	Intervalo	Valor de diseño
Latón	.00015	.00015
Cobre	.00015	.00015
Hormigon	.03-.3	.012
Fundición desnuda	.012-.06	.024
Fundición asfaltada	.006-.018	.012
Fundición revestida de cemento	.00024	.00024
Fund. revestimiento bituminoso	.00024	.00024
Fundición centrifugada	.0003	.0003
Hierro galvanizado	.006-.024	.015
Hierro forjado	.003-.009	.006
Acero comercial y soldado	.003-.009	.006
Acero roblonado	09-.9	.18
Tubo estirado	00024	.00024
Madera	.0 .018-.09	.06

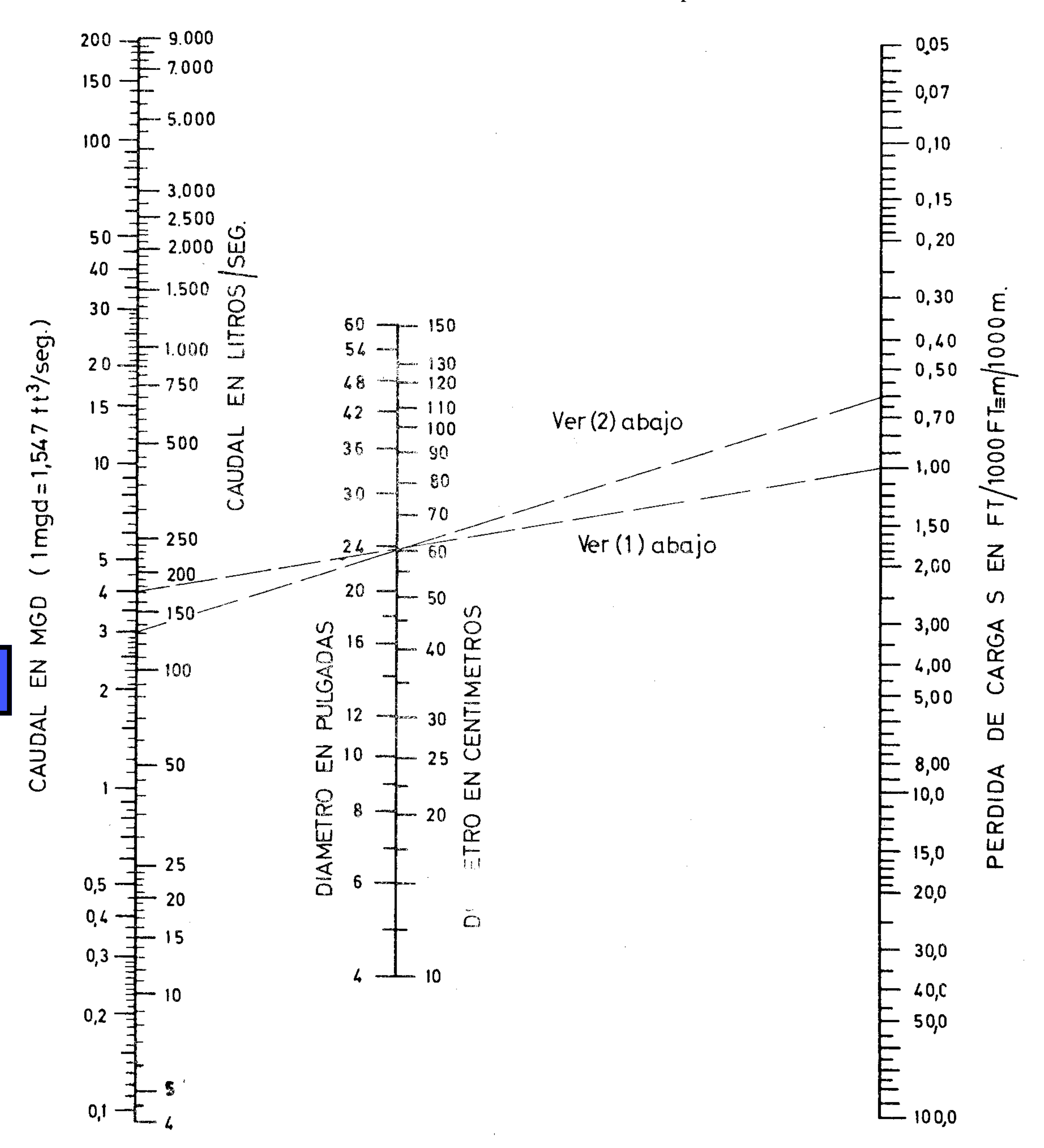
Nota: Por razones tipográficas, se ha conservado en estos diagramas la notación decimal de la edición en inglés.



Tipo de tubería o de revestimiento (nuevo)	Valores de ε en cm	
	Intervalo	Valor de diseño
Latón	.00015	.00015
Cobre	.00015	.00015
Hormigón	.03-.3	.12
Fundición desnuda	.012-.06	.024
Fundición asfaltada	.006-.018	.012
Fundición revestida de cemento	.00024	.00024
Fund revestimiento bituminoso	.00024	.00024
Fundición centrifugada	.0003	.0003
Hierro galvanizado	.006-.024	.015
Hierro forjado	.003-.009	.006
Acero comercial y soldado	.003-.009	.006
Acero roblonado	.09-.9	.18
Tubo estirado	.00024	.00024
Madera	.018-.09	.06

DIAGRAMA B

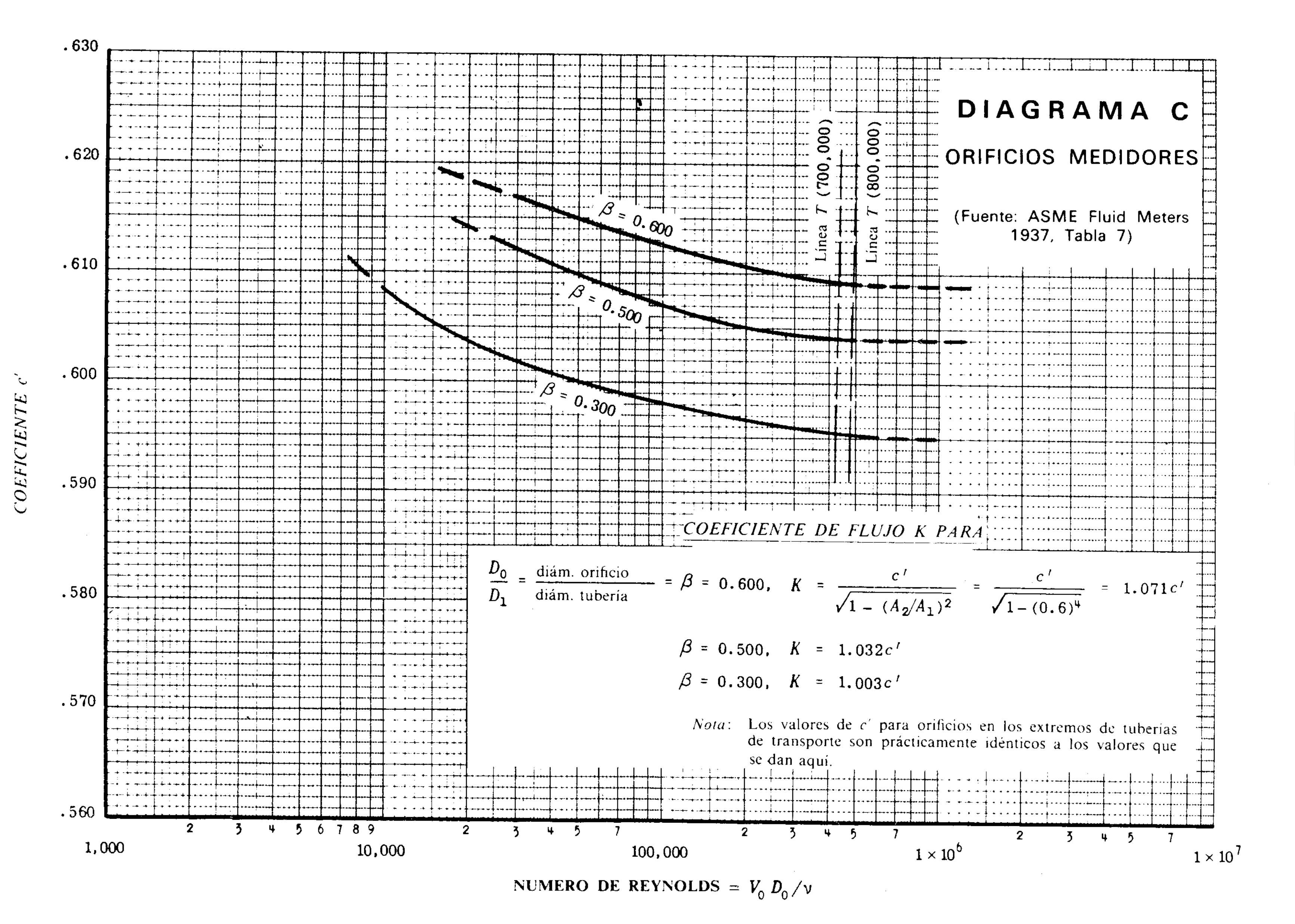
MONOGRAMA DE CAUDALES
FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS, $C_1 = 100$

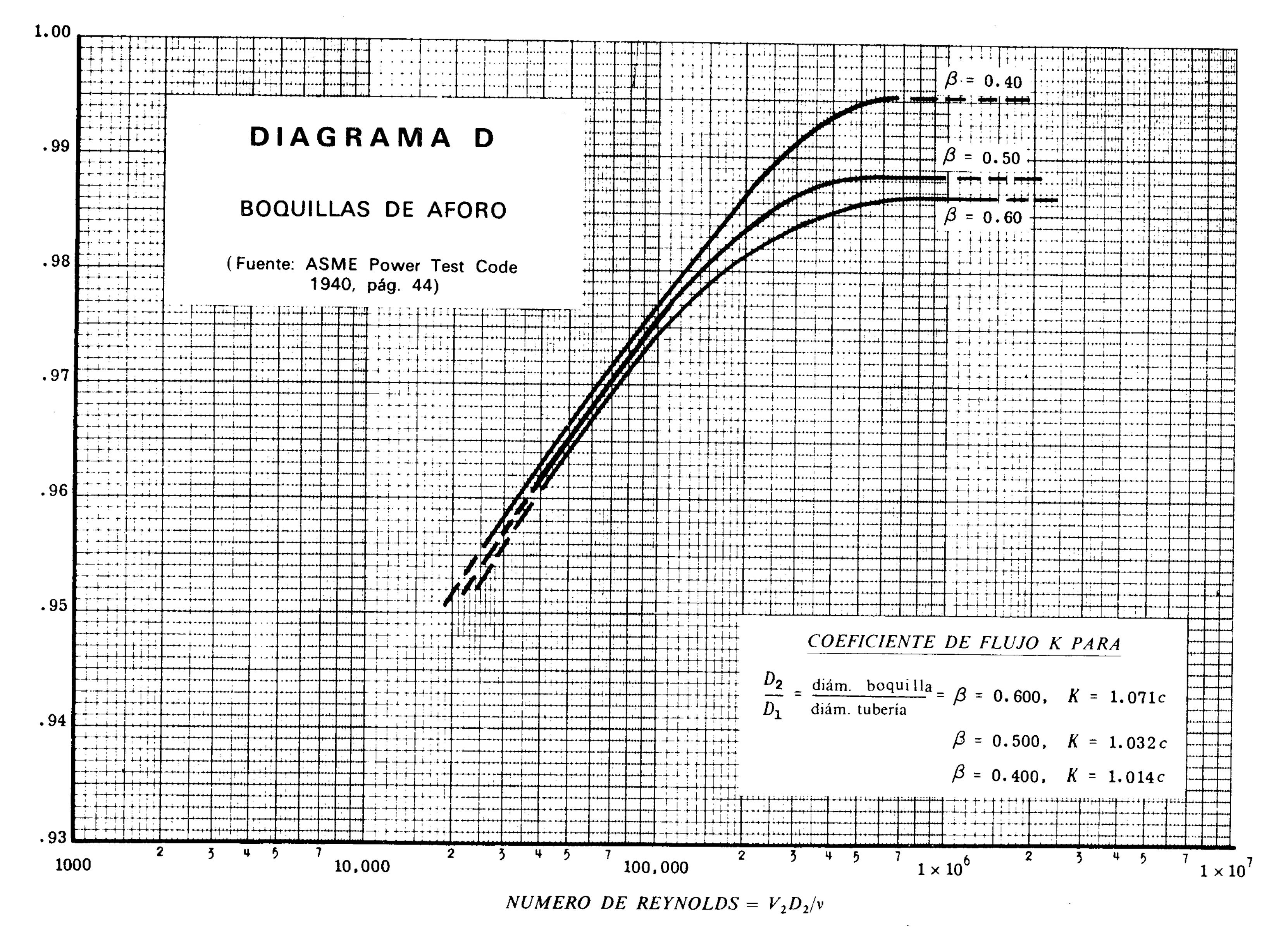


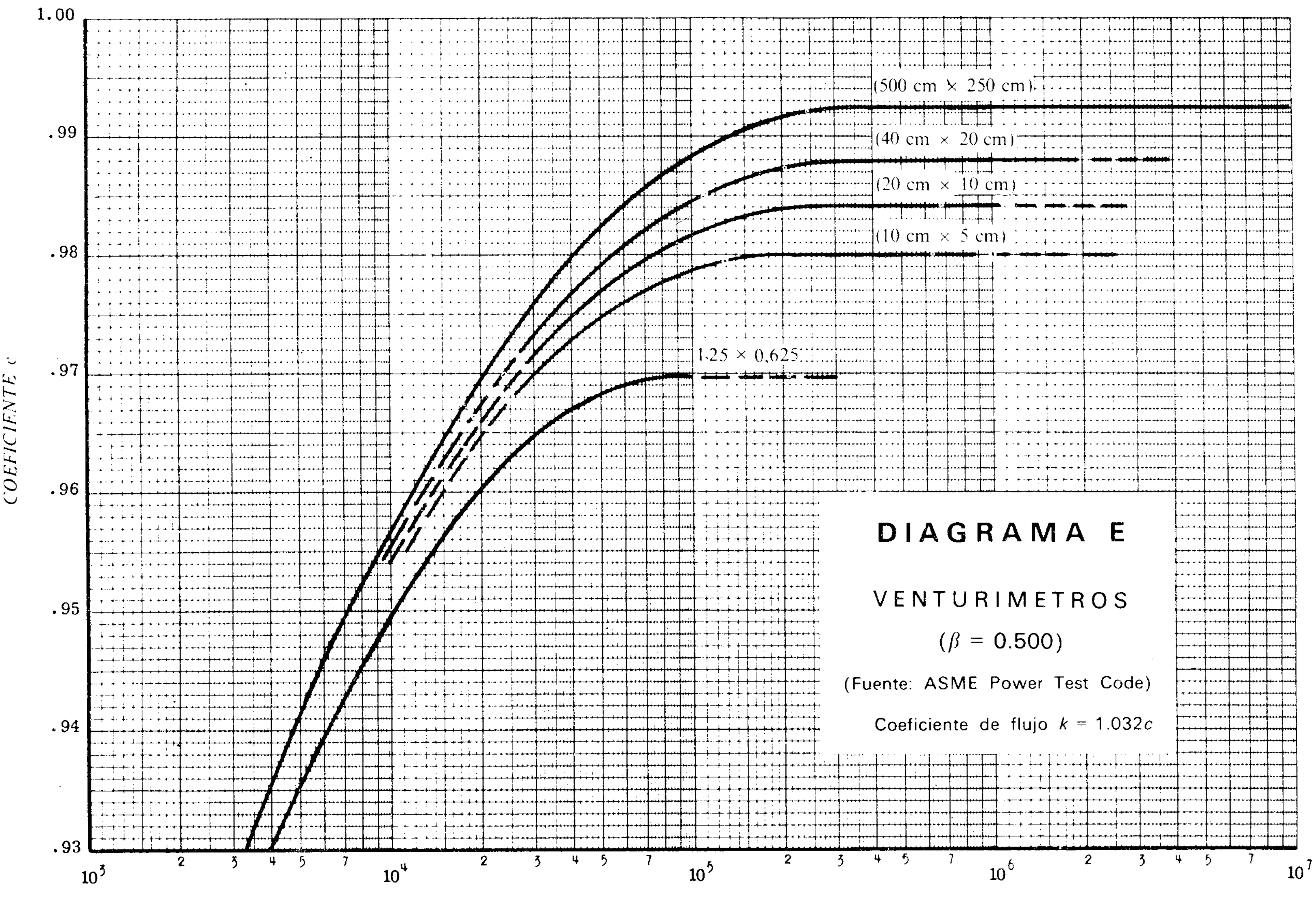
<u>UTILIZACION DEL MONOGRAMA</u>

(1) Dado D=60cm., S=1,0 m/1000m, C_1= 120; determinar el caudal Q.
El nomograma dá Q_{100}= 170 l./seg.
Para C_1=120, Q = (120/100) 170 = 204 l./seg.

(2) Dado Q=156 l./seg., D= 60cm., C_1 = 120; determinar la pérdida de carga.
Cambiando Q_{120} a Q_{100} : Q_{100} = (100/120)156 =130 l./seg.
ma dá S=0,60 m./1000m.


DIAGRAMA C
ORIFICIOS MEDIDORES
(Fuente: ASME Fluid Meters 1937, Tabla 7)
Línea T (700,000)
Línea T (800,000)
β = 0.600
β = 0.500
β = 0.300
COEFICIENTE DE FLUJO K PARA
$\frac{D_0}{D_1} = \frac{\text{diám. orificio}}{\text{diám. tubería}} = \beta = 0.600, \quad K = \frac{c'}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}} = \frac{c'}{\sqrt{1-(0.6)^4}} = 1.071c'$
$\beta = 0.500, \quad K = 1.032c'$
$\beta = 0.300, \quad K = 1.003c'$
Nota: Los valores de c' para orificios en los extremos de tuberías de transporte son prácticamente idénticos a los valores que se dan aquí.
COEFICIENTE c'
.630
.620
.610
.600
.590
.580
.570
.560
1,000
10,000
100,000
1×10^6
1×10^7
NUMERO DE REYNOLDS = $V_0 D_0/\nu$


DIAGRAMA D
BOQUILLAS DE AFORO
(Fuente: ASME Power Test Code 1940, pág. 44)
β = 0.40
β = 0.50
β = 0.60
COEFICIENTE DE FLUJO K PARA
$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\text{diám. boquilla}}{\text{diám. tubería}} = \beta = 0.600, \quad K = 1.071c$
$\beta = 0.500, \quad K = 1.032c$
$\beta = 0.400, \quad K = 1.014c$
1.00
.99
.98
.97
.96
.95
.94
.93
COEFICIENTE c
1000
10,000
100,000
1×10^6
1×10^7
NUMERO DE REYNOLDS = $V_2 D_2 / \nu$


DIAGRAMA E
VENTURIMETROS
(β = 0.500)
(Fuente: ASME Power Test Code)
Coeficiente de flujo k = 1.032c
(500 cm × 250 cm)
(40 cm × 20 cm)
(20 cm × 10 cm)
(10 cm × 5 cm)
1.25 × 0.625
1.00
.99
.98
.97
.96
.95
.94
.93
COEFICIENTE c
10³
2
3
4
5
7
10⁴
10⁵
10⁶
10⁷
NUMERO DE REYNOLDS = V₂D₂/ν

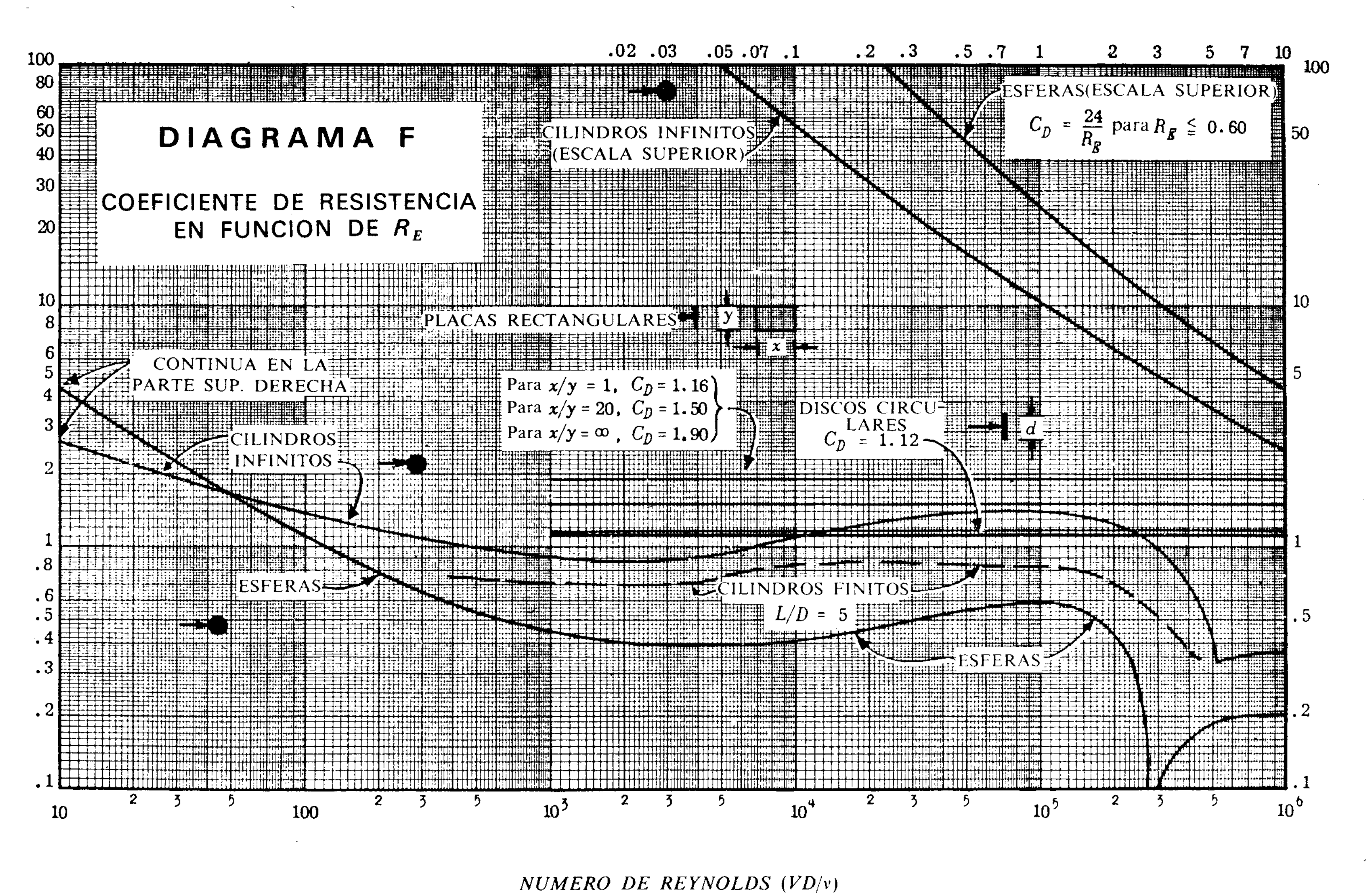

DIAGRAMA F
COEFICIENTE DE RESISTENCIA
EN FUNCION DE R_E
CILINDROS INFINITOS
(ESCALA SUPERIOR)
ESFERAS(ESCALA SUPERIOR)
$C_D = \frac{24}{R_E}$ para $R_E \leq 0.60$
PLACAS RECTANGULARES
y
x
CONTINUA EN LA
PARTE SUP. DERECHA
Para $x/y = 1$, $C_D = 1.16$
Para $x/y = 20$, $C_D = 1.50$
Para $x/y = \infty$, $C_D = 1.90$
DISCOS CIRCU-
LARES
$C_D = 1.12$
d
CILINDROS
INFINITOS
ESFERAS
CILINDROS FINITOS
$L/D = 5$
ESFERAS
COEFICIENTE DE RESISTENCIA C_D
NUMERO DE REYNOLDS (VD/ν)

DIAGRAMA G

COEFICIENTES DE RESISTENCIA PARA PLACAS PLANAS Y LISAS

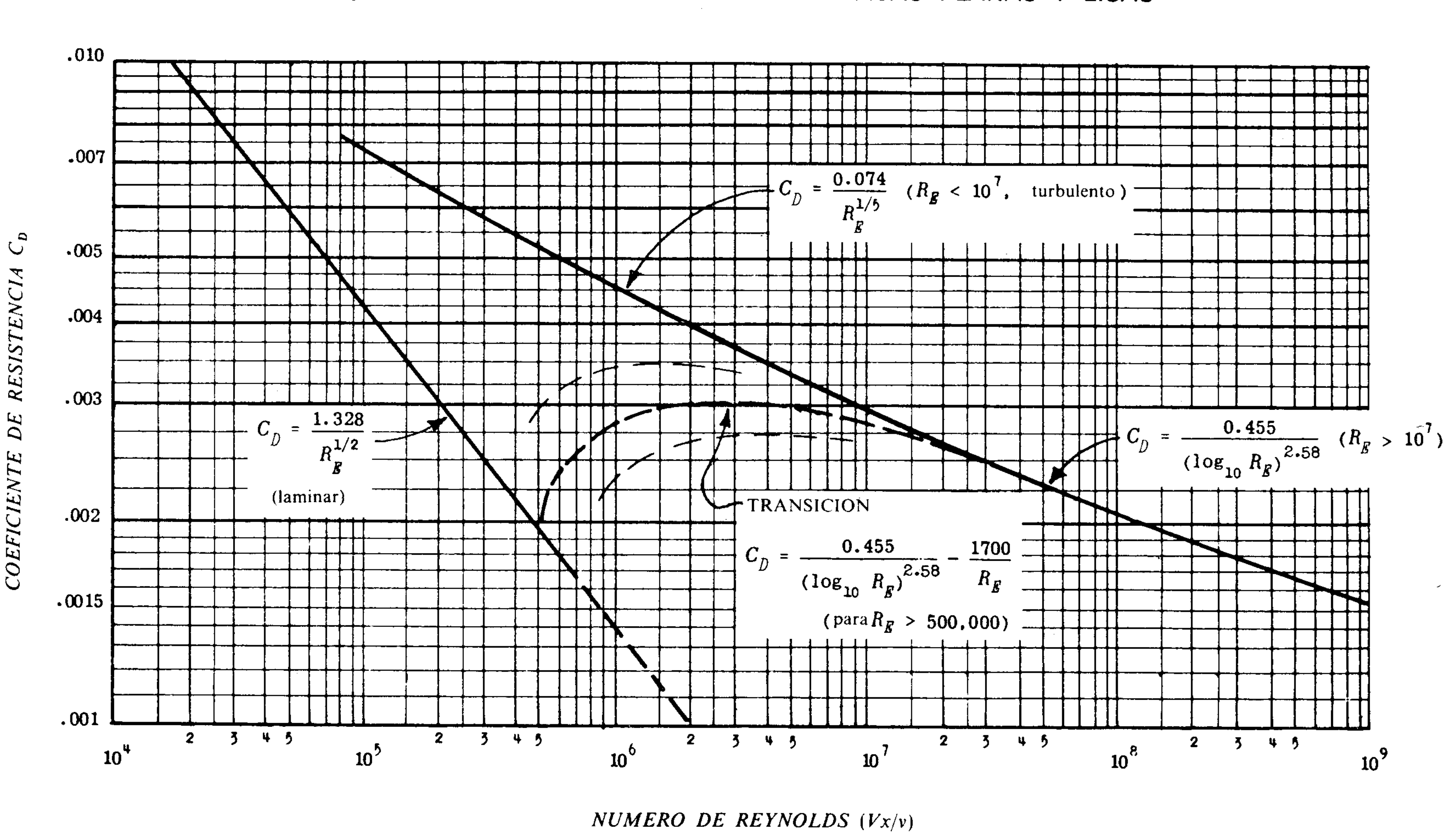
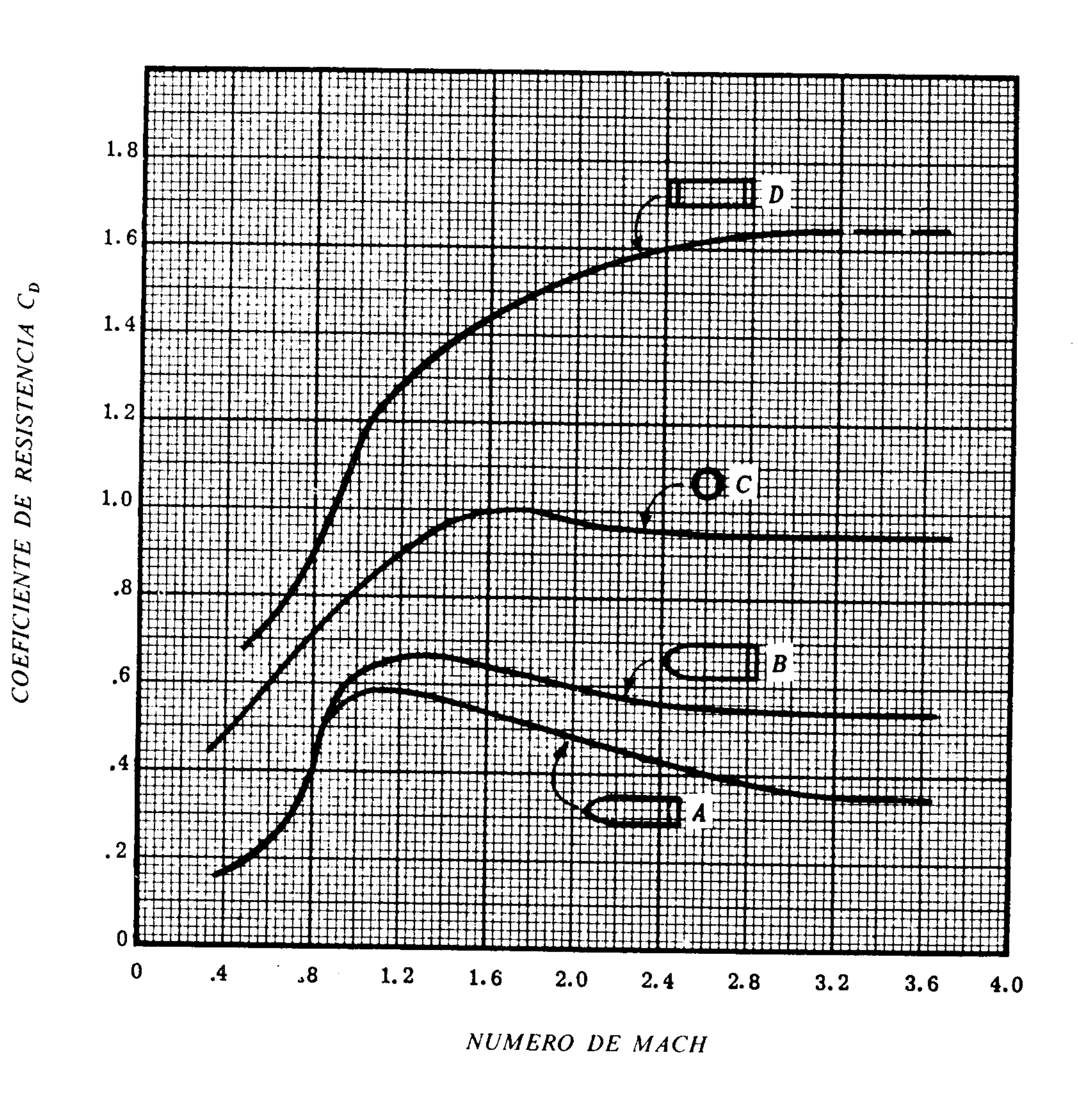


DIAGRAMA H

COEFICIENTES DE RESISTENCIA A VELOCIDADES SUPERSONICAS



S

I

INDICE